قانون الأعداد الكبيرة القوي لدوال عشوائية مرتبطة
تعميم نظرية كانتيلي لدوال عشوائية مرتبطة
(نظرية النهايات)

د ٠ محمد جنيد العمر
أستاذ مساعد فى قسم الأحصاء الرياضى
كلية العلوم – جامعة حلب- سوريا

الملخص

فى الحقيقة إن مفهوم قانون الأعداد الكبيرة القوي المتعلق بمتتالية متغيرات عشوائية مستقلة $\{X_k\}, k=0,1,2,\ldots,n,\ldots$ شريطة محدودية التوقع الرياضى لهذه المتغيرات والذى يتحقق فى أغلب الحالات العملية التى يعالجها الاحصاء التطبيقي كان ينحصر فى إحدى أهم وأبرز نظرية من ضمن نظريات النهايات وهى نظرية كانتيلي الشهيرة ، أنظر المرجع [1]
وفى هذا البحث تم تطبيق قانون الأعداد الكبيرة القوي على متتالية دوال عشوائية مرتبطة من الشكل: $\{\gamma_k(X_{k-1}, X_k)\} \quad , k=1,2,\ldots\ldots\ldots,n,\ldots\ldots$
وذلك من خلال تعميم إحدى أهم النظريات للعالم كانتيلي والتى تلعب دوراً هاماً فى نظرية الاحتمالات و ذلك بمفهوم التقارب الاحتمالى .

مقدمة :

في هذا البحث تم تطبيق قانون الأعداد الكبيرة القوي على متتالية دوال عشوائية مرتبطة من الشكل $\{\gamma_k(X_{k-1}, X_k)\} \quad , k=1,2,\ldots\ldots\ldots,n,\ldots\ldots$
حيث ان: $\{X_k\}, k=0,1,2,\ldots,n,\ldots$ متغيرات عشوائيه مستقلة، وذلك من خلال تقسيم المجموع $S_n^* = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(X_{k-1}, X_k)$ إلى مجاميع يمثل كل منها مجموع دوال عشوائية مستقلة . ومن أجل التوصل إلى النتيجة وهى تطبيق هذه النظرية فى الحالة العامة عندما تكون الدوال العشوائية مرتبطة استخدمنا المتباينه الهامة التالية والتى تنص على :
مهما يكن المتغيرين العشوائيين μ, η ولجميع قيم العددين الحقيقيين $u > 0 \ , \ v > 0$ فأن المتباينة التالية محققة:

$$P\{\mu < u - v\} - P\{\eta \geq v\} \leq P\{\mu + \eta < u\} \leq P\{\mu < u + v\} + P\{\eta \geq v\}$$

وبالتالى أستطعنا أن نعمم قانون الأعداد الكبيرة القوي لدوال عشوائية مرتبطة وذلك من خلال تعميم نظرية كانتيلى الشهيرة. علماً أن أستخدام هذا القانون كان محصوراً على متغيرات عشوائية مستقلة. وبشرط محددية التوقع الرياضى لهذه المتغيرات.

نظرية كانتيلي :

إذا كانت $\{X_k\}, k = 0,1,2,\ldots,n,\ldots$ متتالية متغيرات عشوائية مستقلة وذات عزوم منتهية من المرتبة الرابعة حول المتوسط بحيث أنه لأي ثابت موجب C:

$$E|X_n - E(X_n)|^4 \le C, \qquad n \ge 0$$

فإن :

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$

حيث : $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$

فإذا فرض ان $\{X_k\}, \quad k = 0,1,2,\ldots n,\ldots$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة. يمكن كتابة المجموع على الشكل التالى.

$$S_n^* = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(X_{k-1}, X_k)$$

حيث : $\{y_k = \gamma_k(X_{k-1}, X_k)\}, \quad k = 1,2,\ldots n,\ldots$ متتالية دوال عشوائية مرتبطة.

نظرية :

إذا كانت $\{y_k\} \quad , \quad k=1,2,\ldots,n,\ldots$ متتالية دوال عشوائية مرتبطة وذات عزوم منتهية من المرتبة الرابعة حول المتوسط بحيث أنه من أجل أى ثابت C

$$E|y_n - E(y_n)|^4 \le C \quad , \qquad n \ge 1$$

فإن:

$$\frac{S_n^* - E(S_n^*)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$

حيث : $S_n^* = \sum_{k=1}^{n} y_k$

البرهان :

يمكن كتابة المجموع : $S_n^* = \sum_{k=1}^{n} y_k$ بالشكل التالى :

$$S_n^* = S'_{n,m} + S''_{n,m} + S^0_{n,m}$$

حيث ان المجموع $S'_{n,m}$ يمثل مجموع دوال عشوائيه مستقلة.

$$S'_{n,m}=\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{m}\right]}\left(S^{*}_{i\,m-1}-S^{*}_{(i-1)m}\right)$$

$$S''_{n,m}=\sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{m}\right]} y_{jm} \qquad ,$$

$$S^{0}_{n,m}=S^{*}_{n}-\left(S'_{n,m}+S''_{n,m}\right)$$

وبالتالى بالإعتماد على نظرية كانتيلى الشهيرة فى حالة الأستقلال نجد:

$$E\left|\left(S^{*}_{[\frac{n}{m}]m-1}-S^{*}_{([\frac{n}{m}]-1)m}\right)-E\left(S^{*}_{[\frac{n}{m}]m-1}-S^{*}_{([\frac{n}{m}]-1)m}\right)\right|^{4}=E\left|\frac{m-1}{m}\left(Y_n-E(Y_n)\right)\right|^{4}$$

$$=\left(\frac{m-1}{m}\right)^{4}E\left|Y_n-EY_n\right|$$

$$\leq\left(\frac{m-1}{m}\right)^{4}.C \qquad , \qquad n\geq 1$$

وذلك بالإعتماد على الشرط فى هذه النظرية . وبالتالى ينتج أن :

$$\frac{S'_{n,m}-E\,S'_{n,m}}{\frac{(m-1)}{m}.n}\xrightarrow[,n\to\infty]{P}0$$

هذا يكافىء:

$$P\left\{\left|\frac{S'_{n,m}-ES'_{n,m}}{\frac{(m-1)}{m}.n}\right|\geq\varepsilon\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \qquad ,\forall\varepsilon>0$$

اى أن:

$$P\left\{\left|\frac{S'_{n,m}-E\,S'_{n,m}}{n}\right|\geq\frac{m-1}{m}.\varepsilon\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

وبالأنتقال إلى النهايات عندما $m\to\infty$ نجد :

$$P\left\{\left|\frac{S'_{n,m}-E\,S'_{n,m}}{n}\right|\geq\varepsilon\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \qquad (١)$$

كما أن المجموع $S''_{n,m}$ يمثل مجموع دوال عشوائية مستقلة كل من هذه الدوال يأخذ الشكل :

$$y_{jm} = \gamma_{jm_j}(X_{jm-1} - X_{jm}) \quad , \qquad j = 1,2,\ldots\ldots\ldots, \left[\frac{n}{m}\right]$$

وبالتالى إعتمادا على نظرية كانتيلى الشهيرة فى حالة الأستقلال نجد :

$$E\left| y_{\left[\frac{n}{m}\right]m} - Ey_{\left[\frac{n}{m}\right]m} \right|^4 = \left(\frac{1}{m}\right)^4 E\left|y_n - E(y_n)\right|^4$$

$$\leq \left(\frac{1}{m}\right)^4 C \quad , \qquad n \geq 1$$

وذلك بالأعتماد على الشرط فى هذه النظرية . وبالتالى ينتج أن:

$$\frac{S''_{n,m} - E\,S''_{n,m}}{\frac{n}{m}} \xrightarrow[,n\to\infty]{P} 0$$

هذا يكافىء

$$P\left\{\left|\frac{S''_{n,m} - E\,S''_{n,m}}{\frac{n}{m}}\right| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to 0]{} 0 \qquad , \forall \varepsilon > 0$$

اى أن

$$P\left\{\left|\frac{S''_{n,m} - E\,S''_{n,m}}{n}\right| \geq \frac{\varepsilon}{m}\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

وبالأنتقال إلى النهايات عندما $m \to \infty$ نجد :

$$P\left\{\left|\frac{S''_{n,m} - E\,S''_{n,m}}{n}\right| \geq 0\right\} \xrightarrow[n\to 0]{} 0 \qquad (2)$$

وأخيرا المجموع $S^0_{n,m}$ لا يتجاوز m حدا وبالتالى يكون :

$$P\left\{\left|S^0_{n,m}\right| \geq \varepsilon\right\} \leq m\,P\left\{\gamma_1(X_0, X_1) \geq \frac{\varepsilon}{m}\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad (3)$$

هذا يعنى:

$$S^0_{n,m} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$

بالأعتماد على المتباينه التالية :

مهما يكن المتغيرين العشوائين μ,η ولجميع قيم لعددين الحقيقيين $u>0, v>0$ فإن:

$$P\{\mu<u-v\}-P\{\eta\geq v\}\leq P\{\mu+\eta<u\}\leq P\{\mu<u+v\}+P\{\eta\geq v\}$$

أنظر المراجع التالي [2] ، [3] ، [4]
وبملاحظة:

$$\frac{S_n^*-ES_n^*}{n}=\frac{(S'_{n,m}+S''_{n,m}+S^0_{n,m})-E(S'_{n,m}+S''_{n,m}+S^0_{n,m})}{n}$$

$$=\frac{(S'_{n,m}-E\,S'_{n,m})+(S''_{n,m}-E\,S''_{n,m})+(S^0_{n,m}-E\,S^0_{n,m})}{n}$$

بأخذ:

$$\mu=\frac{S'_{n,m}-E\,S'_{n,m}}{n}\quad,\eta=\frac{(S''_{n,m}-E\,S''_{n,m})+(S^0_{n,m}-E\,S^0_{n,m})}{n}\quad,u=\frac{m-1}{m}\varepsilon,\ v=\frac{1}{m}\varepsilon$$

وبملاحظة العلاقات (1),(2),(3) وباستخدم المتباينه السابقة مع تثبيت m وجعل $n\to\infty$ نحصل على :

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{S'_{n,m}-E\,S'_{n,m}}{n}\right|<\left(\frac{m-1}{m}\right)\varepsilon-\frac{\varepsilon}{m}\right\}-\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{(S''_{n,m}-E\,S''_{n,m})+(S^0_{n,m}-E\,S^0_{n,m})}{n}\geq\frac{\varepsilon}{m}\right\}$$

$$\leq\lim_{n\to\infty}\inf P\left\{\left|\frac{S_n^*-E\,S_n^*}{n}<\frac{m-1}{m}\varepsilon\right|\right\}\leq\lim_{n\to\infty}\sup p\left\{\left|\frac{S_n^*-E\,S_{nn}^*}{n}<\frac{m-1}{m}\varepsilon\right|\right\}\leq$$

$$\leq\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{S'_{n,m}-E\,S'_{n,m}}{n}\right|<\frac{m-1}{m}\varepsilon+\frac{1}{m}\varepsilon\right\}+\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{(S''_{n,m}-E\,S''_{n,m})+(S^0_{n,m}-E\,S^0_{n,m})}{n}\right|\geq\frac{1}{m}\varepsilon\right\}$$

وبالأنتقال إلى النهايات من أجل $m\to\infty$ نحصل على

$$1\leq\lim_{n\to\infty}\inf P\left\{\frac{S_n^*-E\,S_n^*}{n}<\varepsilon\right\}\leq\lim_{n\to\infty}\sup p\left\{\frac{S_n^*-E\,S_n^*}{n}<\varepsilon\right\}\leq 1$$

هذا يبين أن

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{S_n^*-E\,S_n^*}{n}\right|<\varepsilon\right\}=1$$

وهذا يكافىء :

$$P\left\{\left|\frac{S_n^*-E\,S_n^*}{n}\geq\varepsilon\right|\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

اى ان

$$\frac{S_n^*-E\,S_n^*}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{P}0$$

وهو المطلوب.

المراجع
REFERENCES

[1] - تشربايف – أ. ن ١٩٨٠ موسكو كتاب نظرية الاحتمالات
[2] - د٠ محمد جنيد العمر – ١٩٨٤ مجلة العلوم الإكرانية – معهد الرياضيات جامعة كييف – صفحة ١١٧ – ١٢٢
[3] - د٠ محمد جنيد العمر – ١٩٨٨ مجلة العلوم الروسية – موسكو صفحة ٥٥٢ – ٥٥٥
[4] - د٠ محمد جنيد العمر + د٠ محمد خير أحمد . تشتت مجموع دوال عشوائية مرتبطة المؤتمر الرياضيات الثالث ١٩٩٦ – أربد - الأردن
[5] - جيند ينكو – أ .. ن- ١٩٨٥ موسكو كتاب (الاحتمالات)