جمهورية مصر العربية

معهد التخطيط القومى

سلسلة مذكرات خارجية

مذكرة خارجية رقم (١٨٨)

محاضرات فى الاقتصاد الرياضى

دكتور/ محمد محمود الإمام

الجزء الأول

٧ يونية ١٩٦٢

جمهورية مصر العربية – طريق صلاح سالم – مدينة نصر – القاهرة – مكتبب ريد رقم ١١٧٦٥

A.R.E Salah Salem St. Nasr City , Cairo P.O.Box : 11765

الفصـــــــل الأول

مقدمـــة رياضيـــــة

١ـ الاعـداد المركبـــة

١/١ـ الاعداد والعمليات الرياضية :

اذا بدأنا بأبسط أنواع الاعداد وجدنا أنه الأعداد الصحيحة (الكامـــلة) integers التى تبنى على الاعداد الطبيعية (١ ، ٢ ، ٣ ، .....) ومن الممـــكن تطبيق عمليات الجمع عليها ويكون الناتج أيضا أعدادا صحيحة وكما أنه من الممكن تعميم هذه القاعدة الى الضرب ، ثم تعميم الضرب الى عملية الرفع الى أس صحيح موجـب .

غير أن عملية القسمة لاتؤدى دائما الى أعداد صحيحة وهنا يجب أن يضـاف الى مجموعة الأعداد الصحيحة مجموعة أخرى هى الكسور fractions وتتكون مـن المجموعتين معا ما يعرف بالأعداد القياسية rational numbers . وعـلى ذلك نستطيع اجراء عمليات الجمع والضرب والرفع الى أس صحيح والقسمة على هـــذه المجموعة دون أن نصادف حالات شـاذة .

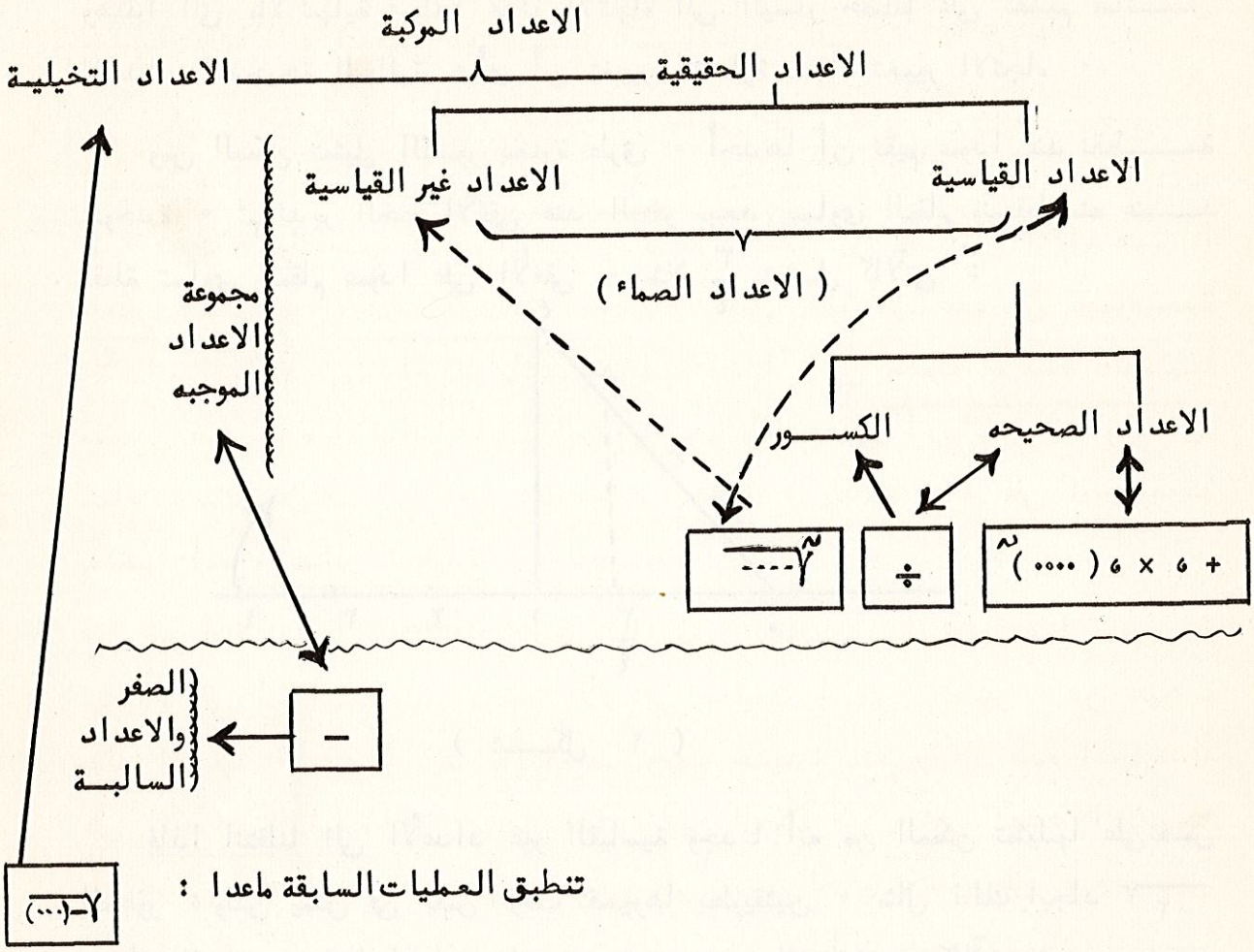
فاذا انتقلنا الى عملية ايجاد الجذور (عكس الأس) نصادف صعوبة مماثـلة لتلك التى ظهرت عند القسمة (عكس الضرب) اذ أن الجذر النونى لأى عـــدد قياسى لايلزم أن يكون عددا قياسيا أى لايلزم أن يكون فى شكل خارج قسمة عدد قياسى على عدد قياسى آخر (باعتبار الواحد الصحيح عدد قياسى) . ولذلـــك نحتاج الى اضافة مجموعة جديدة هى مجموعة الأعداد غير القياسية irrational numbers للتعبير عن هذه المقادير . ولكن لايجب أن يعنى هذا أن يـكون أى عدد منتميا الى احدى المجموعتين ، اذ من الجائز أن يشتمل العدد الواحـد

على جزئين أحدهما قياسى والآخر غير قياسى ويعبر عن ذلك بكتابة الجزئين وبينهما علامة (+) وهذا هو ما يطلق أسم الأعداد الصماء Surds

ولكن يلاحظ أن كل هذه العمليات لاتظهر فكرة الاشارة ، ويمكن تسمية المجموعات السابقة كلها بأسم مجموعة الأعداد الموجبة positive number system فاذا أردنا اجراء عملية الطرح وجب أن ندخل اصطلاحين جديدين الأول هو الصفر والثانى هو الأعداد السالبة . وبذلك نحصل مقابل كل عدد فى مجموعة الأعداد السابقة على نظير له باشارة سالبة ومنها تتكون مجموعة الأعداد السالبة وتنطبق على هذه الأعداد عمليات الجمع والضرب والرفع الى أس والقسمة دون أن نصادف عددا لاينضم الى أحد المجموعات السابقة ، ولذلك نطلق على المجموعة بأكملها أسم الأعداد الحقيقية Real numbers

غير أننا اذا أردنا ايجاد الجذر التربيعى لمقادير سالبة صادفتنا صعوبة جديدة هى أنه ليست بين مجموعة الأعداد الحقيقية ما يمكن التعبير به عن نتيجة هذه العملية . لذلك لابد من اضافة مجموعة جديدة للتعبير عن هذه الأعداد هى الأعداد التخيلية imaginary ، ومن الممكن أن يحتوى العدد الواحد على جزئين أحدهما حقيقى والآخر تخيلى وفى هذه الحالة نحصل على ما يسمى بالأعداد المركبة complex numbers . وبذلك يصبح فى مقدورنا أن نجرى جميع العمليات الرياضية الأساسية دون أن نصادف حالة خارجة عن المجموعتين السابقتين . وعلى ذلك يمكن اعتبار جميع الأعداد أعدادا مركبة ، فاذا كان الجزء التخيلى منها = صفر فان العدد يكون حقيقيا ، واذا كان الجزء الحقيقى = صفر كان العدد تخيليا .

ويمكن تلخيص هذه المجموعات كالآتى :



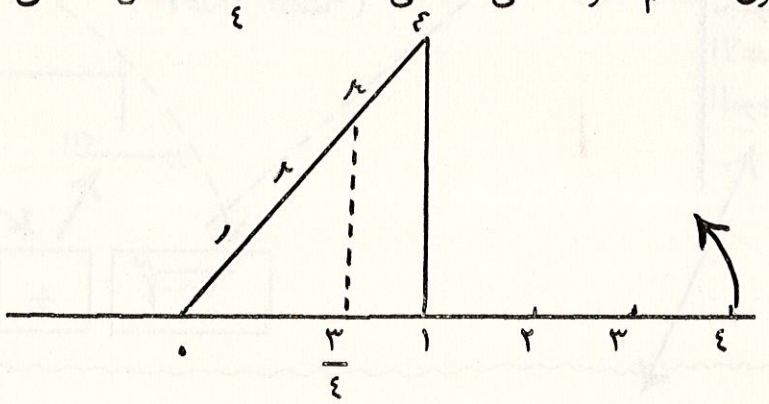
(شكل ١) مجموعات الاعداد

١/٢ـ التمثيل البياني للاعداد الحقيقية :

يقابل التمثيل الرمزى للاعداد المختلفة والعمليات التى تجرى عليها ، تمثيل بيانى . وهذا يستدعى ادخال فكرة الأبعاد dimensions ونبدأ بخط مستقيم فى المستوى نأخذ نقطة عليه تمثل الصفر ثم مسافة الى يمين الصفر نعتبرها الوحدة وباستخدام أدوات القياس المعروفة نقسم الخط الى مسافات متساوية وكل منها تساوى الوحدة ، فنحصل على متسلسلة تبدأ بالصفر ثم ١ ، ٢ ، ٣ ، .....

وهكذا الى مالا نهاية ٠ واذا غيرنا الاتجاه الى اليسار حصلنا على تقسيم مماثل للاعداد الصحيحة السالبة ٠ أى أن تغيير الاشارة معناه تغيير الاتجاه ٠

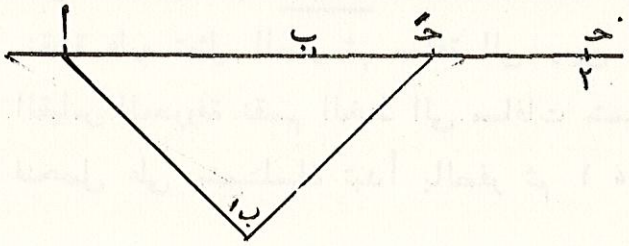
ومن الممكن تمثيل الكسور بعدة طرق ٠ أحدها أن نقيم عمودا عند نقطة الوحدة ٠ ثم ندير الخط الأفقى عند الصفر ببعد يساوى المقام ونسقط منه عند نقطة تساوى المقام عمودا على الأفقى ٠ مثلا $\frac{٣}{٤}$ تمثل كالآتى :



(شكل ٢)

فاذا انتقلنا الى الأعداد غير القياسية وجدنا أنه من الممكن تمثيلها على نفس المحور ، ولكن يمكن فى نفس الوقت تفسيرها بطريقتين ٠ مثال ذلك ايجاد $\sqrt{٢}$ فعلامة الجذر معناها اجراء عملية معينة ، وهذه العملية تتم كالآتى :

اذا سمينا نقطة الصفر " ا " والوحدة " ب " ونقطة ٢ " حـ " فاننا نستطيع أن نتصور أن الخط انكسر عند النقطة ب التى أخذت الوضع بَ بحيث ظلت ا ثابتة وتحركت حـ يسارا على المحور الافقى بحيث تأخذ الوضع حـَ ، حيث يكون ابَ عمودا على بَ حـَ .



(شكل ٣)

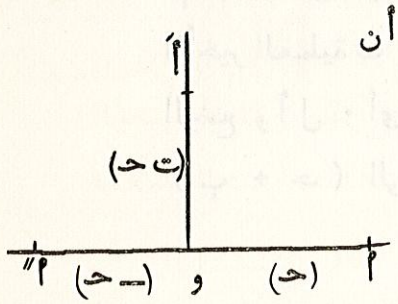
وبذلك يكون أ حَ هو الجذر المطلوب ٠ وعلى ذلك يمكن تفسير العملية باحدى طريقتين :

١ـ الأولى هى انكسار أ ب حـ ليأخذ الوضع أ بَ حَ ٠ أى أنه يحتفظ بطوله الكلى مع تغيير الاتجاه بصورة منكسرة ٠

٢ـ الثانية هى تحرك حـ لكى تقع على حَ ، أى أن أ حـ يتغير طوله ولكنه لايزال محتفظا باتجاهه ٠

١/٣ـ الاعداد التخيلية والمركبة :

لنفرض الآن أن لدينا مستوى أى سطحا ذا بعدين ٠ ولنفرض أننا أخذنا على المحور الأفقى البعد الموجب و أ وليكن طوله هو حـ ٠ فاذا تحرك هذا البعد فى اتجاه عمودى على المحور الأفقى أخذ الوضع و أ على المحور الرأسى لأعلى ، ولو أنه يظل محتفظا بطوله ولنرمز لهذه العملية operation بالرمز ت حـ (تحويرحـ)* ثم لنكرر هذه العملية مرة أخرى ، فنجد أن البعد و أ يأخذ الوضع و أ أى أنه يأخذ الاتجاه العكسى لاتجاهه الأصلى ، فاذا اعتبرنا أن تكرار العملية ت مرتين معناه ضربها فى نفسها أى ت^{٢}



(شكل ٤)

∴ ت (ت حـ) = ت^{٢} حـ = ـ حـ

---

* ويسمى الرمز ت باسم " محوّل " operator وواضح من اللفظة الانجليزية أنه " أداة اجراء عملية " ، ونحن نقترح الترجمة السابقة نظرا لأن أى عملية يقصد بها أساسا تحويل متغير من صورة لأخرى ٠

فاذا عاملنا العامل $ت^{٢}$ على أنه عدد فان

$$ت^{٢} = -١ \qquad \therefore ت = \sqrt{-١} \qquad (١)$$

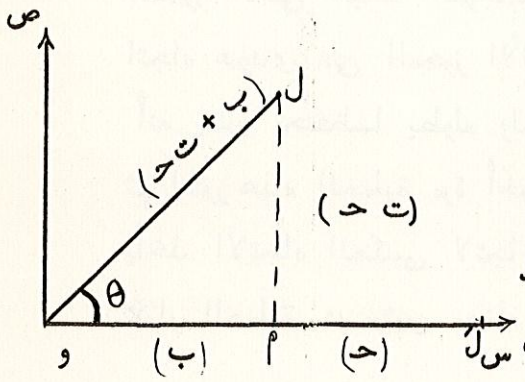
ومعنى هذا أنه اذا كانت الأعداد الحقيقية تمثل على المحور الأفقى ، فـان المحور الرأسى يمثل الأعداد التخيلية كما ينظر اليها من المحور الأفقى .

وحسب التعريفات السابقة فان الاعداد المركبة يرمز اليها بالرمز

ب + ت حـ

ويمكن تمثيل هذه الأعداد بيانيـا بعدة طرق :

أ ـ باستخدام المحاور الكرتيزية المتعامدة :



نرسم المحورين المتعامدين وس ، وص .
ونأخذ على المحور الأفقى البعد و ا طوله ب
ثم البعد ا ل طوله حـ . فاذا أدخلنا عـلى الأخير العملية ت فان الخط و أ لَ يأخـذ الوضع و أ ل . أى أن العدد يتحول مـن (ب + حـ) الى (ب + ت حـ) .

(شكل ٥) رسم أرجاند للعدد المركب

وكما مثلنا العدد الحقيقى بالطول و أ أو النقطة أ فى الاتجاه و أ ، فاننا نعتبر أن العدد المركب قد مثـل بالنقطة ل أو بالبعد ول فى الاتجـاه ول أو مايسمى الموجـه vector ول . ويسمى هذا التمثيل البيانى برسـم أرجاند Argand diagram

تعريف : العدد المركب ع هو زوج من الأعداد الحقيقية (ب ، حـ) مأخوذة

بهذا الترتيب ، ويتمثل فى المستوى و س ص بالموجه و ل حيث ل هى النقطة التى أحداثياها (ب ، حـ) .

ونلاحظ أن العدد المركب هو زوج من الأعداد الحقيقية وليس الأعداد الحقيقية ذاتها . وكما هو معلوم ، فان طول الموجه و ل هو $\sqrt{ب^٢ + حـ^٢}$ ، وهذا عدد حقيقى ويسمى بالقيمة المطلقة للعدد المركب أى |ع| ، ونظرا لأن هذا العدد يتحدد باتجاهه وطوله فاننا نعين زاوية الاتجاه argument ولتكن الزاوية θ . وتتحدد بدلالة ب ، حـ كالآتى : ظا θ = $\frac{حـ}{ب}$. وعلى هذا نلخص نتائجنا فى الآتى :

العدد المركب ع = ب + ت حـ يتمثل بالموجه و ل

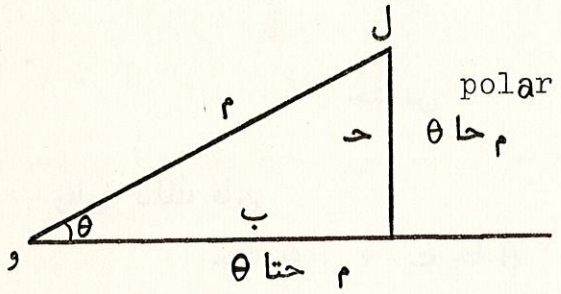
قيمته المطلقه |ع| = $\sqrt{ب^٢ + ب^٢}$ = م مثلا (عدد حقيقى) (٢)

وزاوية اتجاهه اتجاه (ع) = $ظا^{-١} \frac{حـ}{ب}$ = θ مثلا

ب — باستخدام الأحداثيات القطبية :

الأحداثيات القطبية polar coordinates

لنقطة معينة مثل ل تتحدد ببعد النقطة عن نقطة الأصل



(شكل ٦)

واتجاهها أى الزاوية التى تصنعها مع الأفقى و س . أى بالبعد م والزاويه θ وواضح أن الجزء الحقيقى من العدد أى ب يساوى م حتا θ ، بينما الجزء التخيلى هو ت حـ = ت م حا θ . اذن يمكن كتابة العدد كالآتى :

ع = م (حتا θ + ت حا θ) (٣)

وتكون قيمته المطلقة هى $|ع| = م \sqrt{حتا^{٢}\theta + حا^{٢}\theta} = م$ كما سبق

بينما زاوية اتجاهه $= \theta$

تمثيل العدد المركب بالدالة الأسية :

من المعلوم وفقا لنظرية مكلورين أنه يمكن تمثيل الدالة المتصلة د (س) كالآتى :

$$د(س) = د(٠) + س\, د'(٠) + \frac{س}{!٢}\, د''(٠) + \cdots + \frac{س^{ن}}{!ن}\, د^{(ن)}(٠) + \cdots$$

حيث $د^{(ن)}$ هو التفاضل النونى للدالة د بالنسبة الى س ، وجميع التفاضلات محسوبة عند س = صفر ٠ وكما هو معلوم فان

$$\frac{ء\, حاس}{ء\, س} = حتاس \text{ ، } \frac{ء\, حتاس}{ء\, س} = - حاس$$

اذن بحساب التفاضلات المتتالية ثم وضع س فيها = صفر فان

$$حاس = س - \frac{س^{٣}}{!٣} + \frac{س^{٥}}{!٥} - \cdots$$

$$\text{ ، } حتاس = ١ - \frac{س^{٢}}{!٢} + \frac{س^{٤}}{!٤} - \cdots$$

وعلى ذلك فان

$$حتا\theta + ت\, حا\theta = ١ + ت\theta - \frac{\theta^{٢}}{!٢} - \frac{ت\theta^{٣}}{!٣} + \cdots$$

$$= ١ + ت\theta + \frac{(ت\theta)^{٢}}{!٢} + \frac{(ت\theta)^{٣}}{!٣} + \cdots$$

$$\therefore حتا\theta + ت\, حا\theta = هـ^{ت\theta} \qquad (٤)$$

بالمثل يمكن أثبات أن

$$\text{حتا}\,\theta - \text{ت حا}\,\theta = \text{هـ}^{-\text{ت}\theta} \qquad (٤')$$

وعلى هذا فان

$$(\text{حتا}\,\theta + \text{ت حا}\,\theta)^{\text{ن}} = (\text{هـ}^{\text{ت}\theta})^{\text{ن}} = \text{هـ}^{\text{ت ن}\theta} = \text{حتا ن}\theta + \text{ت حا ن}\theta \qquad (٥)$$

$$\text{،}(\text{حتا}\,\theta - \text{ت حا}\,\theta)^{\text{ن}} = (\text{هـ}^{-\text{ت}\theta})^{\text{ن}} = \text{هـ}^{-\text{ت ن}\theta} = \text{حتا ن}\theta - \text{ت حا ن}\theta \qquad (٥')$$

هذه النتائج تعرف باسم نظرية دى موافر De Moivre

وعلى هذا فان العدد المركب يمكن تمثيله بدلالة الدالة الأسية :

$$\text{ع} = \text{م هـ}^{\text{ت}} \qquad (٦)$$

والنظرية السابقة تعطينا نتيجة هامة بالنسبة لرفع هذه الأعداد الى أس ن.

١/٤ـ القواعد الجبرية للاعداد المركبة :

القواعد الجبرية هى مجموعة العمليات التى تعالج بها مجموعة معينة من الأعداد . وهذه القواعد هى أساسا اصطلاحية ، ولما كانت القواعد الجبرية الخاصة بالأعداد الحقيقية شائعة الاستخدام فمن المفيد أن نستخدمها للتعبير عن العمليات المناظرة بالنسبة للأعداد المركبة . وسنرمز الى العدد المركب $\text{ع}_{\text{ر}}$ (ر = ١ ، ٢ ، .....) بالرمز ($\text{س}_{\text{ر}} + \text{ت ص}_{\text{ر}}$) وبناء على ذلك نعرف القواعد الجبرية كالآتى :

١ـ تعريف الصفر : وفقا لتعريف العدد ع بأنه النقطة (س ، ص) ، فان ع = صفر معناه النقطة التى أحداثياها هما س = صفر ، ص = صفر ، ويؤول الموجه ول الى نقطة الأصل فى المستوى . فالصفر ، كأى عدد مركب ، يتكون من عنصرين ولا يجب اعتباره كعدد حقيقى عادى .

٢ـ التساوى : اذا كان $\text{ع}_{١} = (\text{س}_{١} + \text{ت ص}_{١})$ يساوى $\text{ع}_{٢} = (\text{س}_{٢} + \text{ت ص}_{٢})$

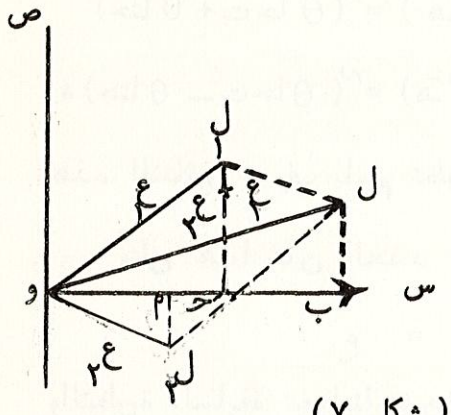
فان $\text{س}_{١} = \text{س}_{٢}$ ، $\text{ص}_{١} = \text{ص}_{٢}$

أى أن الجزء الحقيقى يساوى الحقيقى بينما التخيلى يساوى التخيلى ٠

٣ـ الجمـــع : اذا عرفنا المجموع $ع_1 + ع_2$ بأنه العدد $ع = س + ت ص$ فان :

$$ع = (س_1 + ت ص_1) + (س_2 + ت ص_2) = (س_1 + س_2) + ت (ص_1 + ص_2) \qquad (٧)$$

ومن قاعدة التساوى يتضح أن الجزء الحقيقى فى المجموع هو مجموع الجزئين الحقيقيين $س = س_1 + س_2$ ، بينما الجزء التخيلى يساوى مجموع الجزئين التخيليين : $ص = ص_1 + ص_2$ ٠ أى أن المجموع هو الآخر عدد مركب ٠ ومن الممكن تمثيل عملية الجمع بيانيا ، بتكملة متوازى الأضلاع الذى ضلعاه $ع_1$ ، $ع_2$ فيكون المجموع هو الموجه الذى يمثل قطر متوازى الأضلاع و ل ، وأحداثيا ل هما $(س_1 + س_2)$ ، $(ص_1 + ص_2)$ ٠ فمن الواضح أن وأ = $س_2$ بينما $س_1$ = وحـ = ا ب



(شكل ٧)

اذن وأ + أ ب = وب = $س_1 + س_2$ ٠ وبالمثل بالنسبة للأحداثى الرأسى٠

٤ـ الضرب فى عدد حقيقى : يؤدى ضرب العدد $ع_1$ فى عدد حقيقى أ الى الحصول على عدد مركب $ع = أ ع_1$ ، عنصراه هما حاصلا ضرب عنصرى العدد الأصلى فى العدد أ ٠ أى أن

$$ع = أ ع_1 = (أ س_1 ، أ ص_1) \qquad (٨)$$

ومعنى هذا تغيير طول الموجه و $ل_1$ بالنسبة أ : ا مع الاحتفاظ باتجاهه٠

٥ـ ضرب الاعداد المركبة : يمكن تعريف عملية الضرب بسهولة باستخدام الصورة الأسية :

$$ع_١ = م_١ هـ^{ت\theta_١} \qquad ع_٢ = م_٢ هـ^{ت\theta_٢}$$

$$\therefore ع = ع_١ \times ع_٢ = م_١ \times م_٢ \times هـ^{ت(\theta_١ + \theta_٢)} \qquad (٩)$$

فاذا كتبا حاصل الضرب $ع = م\ هـ^{ت\theta}$ فان $م = م_١ + م_٢$ ، $\theta = \theta_١ + \theta_٢$

ولتحويل هذه النتيجة الى الصورة الأصلية نلاحظ أن

$$ع = م_١ م_٢ \left[حتا(\theta_١ + \theta_٢) + ت\ حا(\theta_١ + \theta_٢) \right]$$

$$= م_١ م_٢ \left[(حتا\theta_١ حتا\theta_٢ - حا\theta_١ حا\theta_٢) + ت(حا\theta_١ حتا\theta_٢ + حتا\theta_١ حا\theta_٢) \right]$$

$$= م_١ م_٢ \left[\left(\frac{س_١}{م_١} \times \frac{س_٢}{م_٢} - \frac{ص_١}{م_١} \times \frac{ص_٢}{م_٢}\right) + ت\left(\frac{ص_١}{م_١} \times \frac{س_٢}{م_٢} + \frac{س_١}{م_١} \times \frac{ص_٢}{م_٢}\right) \right]$$

$$\therefore ع = (س_١ س_٢ - ص_١ ص_٢) + ت(س_١ ص_٢ + س_٢ ص_١) \qquad (١٠)$$

أى أن حاصل الضرب $ع = ع_١ ع_٢$ هو العدد المركب

$$\{(س_١ س_٢ - ص_١ ص_٢) ، (س_١ ص_٢ + س_٢ ص_١)\}$$

ومن الممكن استخلاص هذه النتيجة بتطبيق طرق الضرب العادية على حاصل الضرب مباشرة

$(س_١ + ت ص_١) \times (س_٢ + ت ص_٢)$ مع ملاحظة أن $ت^٢ = -١$

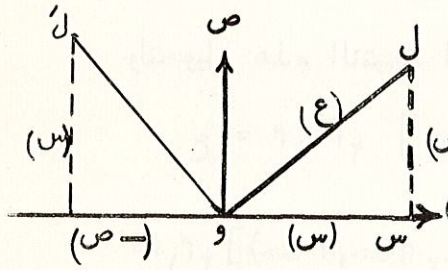
٦ـ <u>حالات خاصة</u> : يمكن تعريف الوحدة " ١ " بأخذ موجه على المحور الأفقى يساوى (١ ، صفر) وتكون زاوية اتجاه الموجه θ = صفر . كما يمكن تعريف المحول "ت" بأنه (صفر ، ١) وواضح من (٢) أن زاوية اتجاهه θ هى $\frac{ط}{٢}$.

أى أن كلا منهما عبرنا عنه بشكل عدد مركب . ومن الواضح أن العدد أ هو أ × ١ = (أ ، صفر) بينما ت حـ = (صفر ، حـ) . اذن

أ + ت حـ = (أ ، صفر) + (صفر ، حـ) = (أ ، حـ)

أى أن كل عدد مركب (س ، ص) يمكن التعبير عنه بمجموع عددين مركبين الأول هو العدد المركب الوحدة مضروبا فى عدد حقيقى س ، والآخر هو العدد المركب ت مضروبا فى العدد الحقيقى ص .

ولتمثيل عملية الضرب فى الوحدة وفى ت نلاحظ أنه اذا كان لدينا العدد ع يمثله الموجه و ل فان حاصل الضرب :



(شكل ٨)

١×ع = (١ ، صفر) (س ، ص) = (س ـ صفر ، ص + صفر)

= (س ، ص) = ع = الموجه و ل

، ت × ع = (صفر ، ١) (س ، ص) = (صفر ـ ص ، صفر + س) = (ـ ص ، س) = الموجه و ل'

أى أن الضرب فى ت يؤدى الى تحوير الموجه بزاوية قائمة $\theta = \frac{ط}{٢}$. فعملية الضرب تنطوى على عملية جمع للزوايا ، فيضاف الى الزاوية θ الأصليه الزاوية $\frac{ط}{٢}$. وكذلك .

ت^{٢} = (صفر ، ١) × (صفر ، ١) = (صفر ـ ١ ، صفر + صفر) = (ـ ١ ، صفر)

ت^{٢} = (ـ ١) × ١ (١١)

حيث (ـ ١) هو العدد الحقيقى ـ ١ بينما ١ هو الوحدة المركبة وهنا يتم التحوير مرتين .

ومن الممكن استخلاص هذه النتائج باستخدام الأحداثيات القطبية . فبوضع م = ١ ، $\theta = \frac{ط}{٢}$ نجد أن العدد بالصورة الأسية يكون هو ع = هـ$^{ت \frac{ط}{٢}}$ =

حتا $\frac{ط}{٢}$ + ت حا $\frac{ط}{٢}$ ومنها ت = هـ$^{ت \frac{ط}{٢}}$ ، ـ ت = هـ$^{ـ ت \frac{ط}{٢}}$ (١٢)

∴ هـ$^{\frac{ت ط}{٢}}$ + هـ$^{ـ ت \frac{ط}{٢}}$ = صفر (١٣)

بالمثل اذا كانت $\theta = \pm$ ط ، م = ١ فان

$$\text{هـ}^{\text{ت ط}} = \text{هـ}^{-\text{ت ط}} = -١ \qquad (١٤)$$

وينتج من هـذا أن

$$\text{ت}^{٢} = \left(\text{هـ}^{\text{ت}\frac{\text{ط}}{٢}}\right)^{٢} = \text{هـ}^{\text{ت ط}} = -١ \qquad (١٥)$$

وأخيرا فان

$$\text{ت ع} = \text{هـ}^{\text{ت}\frac{\text{ط}}{٢}} \cdot \text{م هـ}^{\text{ت}\theta} = \text{م} \times \text{هـ}^{\text{ت}\left(\theta + \frac{\text{ط}}{٢}\right)} \qquad (١٦)$$

أى أن الضرب فى ت بمعنى التحوير بمقدار زاوية قائمة

٧ـ <u>الطـــرح</u> : هو العملية العكسية للجمع . وهنا يلزمنا تعريف تغيير الاشارة :

$$-\text{ع} = -(\text{س} + \text{ت ص}) = (-\text{س}) + \text{ت}(-\text{ص}) \qquad (١٧)$$

∴ باقى طرح العددين $\text{ع}_{١}$ ، $\text{ع}_{٢}$ هو

$$\text{ع} = \text{ع}_{١} - \text{ع}_{٢} = (\text{س}_{١} - \text{س}_{٢}) + \text{ت}(\text{ص}_{١} - \text{ص}_{٢}) \qquad (١٨)$$

٨ـ <u>القســمة</u> : باستخدام الصورة الأسية :

$$\frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}} = \frac{\text{م}_{١}\,\text{هـ}^{\text{ت}\theta_{١}}}{\text{م}_{٢}\,\text{هـ}^{\text{ت}\theta_{٢}}} = \frac{\text{م}_{١}}{\text{م}_{٢}}\,\text{هـ}^{\text{ت}(\theta_{١} - \theta_{٢})} \qquad (١٩)$$

أى أن خارج القسمة تكون قيمته المطلقة هى خارج قسمة القيمتين المطلقتين بينما تحور الزاوية $\theta_{١}$ بمقدار $\theta_{٢}$ فى اتجاه عقارب الساعة ، أى تطرح زاويتا الاتجاه . ونلاحظ أنه عند الضرب تضرب القيمتان المطلقتان وتجمع زاويتا الاتجاه .

وبالتعويض فى (١٩) نلاحظ أن :

$$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{\sqrt{س_1^2 + ص_1^2}}{\sqrt{س_2^2 + ص_2^2}} \left[حتا (\theta_1 - \theta_2) + ت حا (\theta_1 - \theta_2) \right] \quad (٢٠)$$

وبالتعويض عن حتا ، حا الفرق بما يساويانه بدلالة نسب الزوايا الأصلية ثم التعويض عن هذه الأخيرة بما تساويه بدلالة س ، ص نحصل على تعبير لخارج القسمة بدلالة الأحداثيات الكرتيزية . ومن الممكن أن يتأكد القارئ من أن النتيجة سوف تتفق مع مايمكن الحصول عليه بالقسمة المباشرة كالآتى :

$$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{س_1 + ت ص_1}{س_2 + ت ص_2} = \frac{(س_1 + ت ص_1)(س_2 - ت ص_2)}{(س_2 + ت ص_2)(س_2 - ت ص_2)}$$

$$= \frac{1}{س_2^2 + ص_2^2} \left[(س_1 س_2 + ص_1 ص_2) + ت (س_2 ص_1 - س_1 ص_2) \right] \quad (٢١)$$

٩ـ الاعداد المركبة المترافقة : العددان (س + ت ص) ، (س ـ ت ص) يسميان عددان مركبان مترافقان Conjugate . وواضح أن كلا من مجموعهما وحاصل ضربهما يكون عددا حقيقيا لأن

$$(س + ت ص) = م هـ^{ت\theta} = م (حتا \theta + ت حا \theta)$$

$$(س - ت ص) = م هـ^{-ت\theta} = م (حتا \theta - ت حا \theta)$$

∴ بالجمع :

$$المجموع = 2 م حتا \theta = م (هـ^{ت\theta} + هـ^{-ت\theta}) = 2 س \quad (٢٢)$$

كما أنه بالضرب

حاصل الضرب = $م^{٢}$ ($حتا^{٢}\theta$ + $حا^{٢}\theta$) = $م^{٢}$ = $س^{٢}$ + $ص^{٢}$

ولهذه النتائج أهميتها فى دراسة التقلبات الدورية .

تعيين قيمة θ :

وقبل أن نختتم هذا القسم ، نورد بعض القواعد الخاصة بتحديد القيمة العددية للزاوية θ . فمن المعلوم من (٢) أن ظا θ = $\frac{ص}{س}$. وهناك قيمتان للزاوية بين صفر ، ٢ط تحققان هذه العلاقة فأيهما نختار ؟ واضح أن القيمة الصحيحة هى التى تحقق اشارة س أو حتا θ . فالجداول تعطى الظلال للزوايا بين صفر ، $\frac{ط}{٢}$ أى أننا نستطيع تعيين قيمة من الجدول واقعة بين $-\frac{ط}{٢}$ ، $\frac{ط}{٢}$ وفقا لاشارة ظا . أى أنه اذا كان $\frac{ص}{س}$ = ظا θ سالبة فاننا نختار قيمة بين ($-\frac{ط}{٢}$ ، صفر) أما اذا كانت $\frac{ص}{س}$ = ظا θ موجبة فاننا نختار قيمة بين (صفر ، $\frac{ط}{٢}$) . ولكن علينا أن نضيف بعد ذلك اما ط أو ٢ط وفقا لاشارة كل من س ، ص . ومن الممكن أن نلخص هذه القواعد فى الجدول التالى :

بوضع $\frac{ص}{س}$ = ظا ف ∴ ف = ظا$^{-١}$ $\frac{ص}{س}$ (ف تقع بين $-\frac{ط}{٢}$ ، $\frac{ط}{٢}$)

	اشارة س ، ص	اشارة س ، ف	المدى الذى تقع فيه θ	قيمة θ
الربع الأول	س > صفر ، ص > صفر	س > صفر ، ف > صفر	صفر ، $\frac{ط}{٢}$	θ = ف
الربع الثانى	س < صفر ، ص > صفر	س < صفر ، ف < صفر	$\frac{ط}{٢}$ ، ط	θ = ط + ف
الربع الثالث	س < صفر ، ص < صفر	س < صفر ، ف > صفر	ط ، $\frac{٣ط}{٢}$	θ = ط + ف
الربع الرابع	س > صفر ، ص < صفر	س > صفر ، ف < صفر	$\frac{٣ط}{٢}$ ، ط	θ = ٢ط + ف

فالعمود الأول يبين الحالات الأربعة وفقا لاشارة كل من س ، ص . فاذا ترجمنا هاتين الاشارتين الى اشارة لخارج القسمة $\frac{ص}{س}$ فانها تكون نفس اشارة ف أى أن ف تكون موجبة (بين صفر ، $\frac{ط}{٢}$) أو سالبة (بين $\frac{-ط}{٢}$ ، صفر) ؛ ومن اشارات س ، ص نستنتج الربع الذى تقع فيه الزاوية θ ، وبالتالى المدى الذى تقع فيه هذه الزاوية وبذا يسهل استخلاص قيم العمود الرابع .

٢ ـ كثيرات الحدود والمعادلات

٢/١ ـ تعاريف :

كثيرة الحدود polynomial هى مجموع القوى الصحيحة لمتغير س بمعاملات ثابته . وتتحدد درجة degree كثيرة الحدود بأكبر قوة للمتغير س . وهى تأخذ الصورة

$$د(س) = س^{ن} + أ_{١} س^{ن-١} + أ_{٢} س^{ن-٢} + \cdots + أ_{ن-١} س + أ_{ن} \quad (٢٣)$$

المعادلة equation نحصل عليها بوضع د (س) = صفر

الجذور roots هى قيم س التى تحقق المعادلة . ولأى معادلة من الدرجة ن يوجد جذور عددها ن ، بعضها أو كلها حقيقية والباقى مركبة وتظهر كأزواج مترافقة . وقد تكون الجذور مختلفة كما أنه من الممكن أن تتساوى بعضها أو كلها .

٢/٢ ـ المعادلة من الدرجة الثانية : quadratic

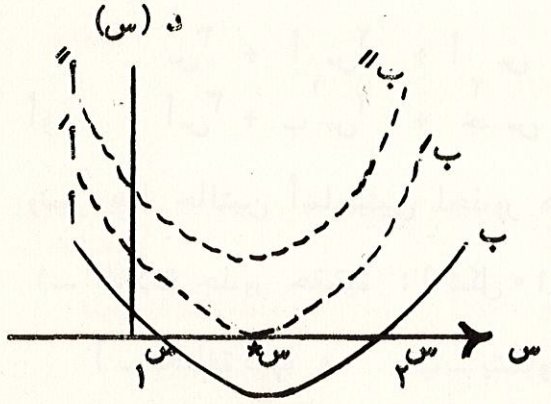
الصورة العامة لهذه المعادلة هى :

$$س^{٢} + أ_{١} س + أ_{٢} = صفر \qquad (٢٤)$$

وهى عادة تكتب بالصورة الآتية :

$$أ س^{٢} + ب س + حـ = صفر \qquad (٢٤')$$

ومن الممكن أن نميز بين ثلاثة حالات كما فى شكل (٧) ٠ فالحالة الأولى أ ب ، توجد قيمتان على المحور الأفقى تحققان تساوى قيمة الدالة د (س) مع الصفر ، وهما $س_{١}$ ، $س_{٢}$ فهما جذران حقيقيان للمعادلة د (س) = صفر أما الحالة الثانية أ ب فهناك قيمة واحدة $س^{*}$ تحقق العلاقة المماثلة أى أن هناك جذران متساويان للمعادلة المناظرة ٠



(شكل ٩)

أما الحالة الثالثة أ″ ب″ فلا توجد قيمة حقيقية ، ويكون الجذران تخيليان مترافقان ٠

وبوجه عام فان الجذريين هما :

$$س_{١} ، س_{٢} = \frac{١}{٢أ} \left(- ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ} \right) \qquad (٢٥)$$

ويسمى المقدار $ب^{٢} - ٤ أ حـ$ (أو $\frac{ب^{٢}}{٤ أ حـ}$) بمميز المعادلة :

اذا كان $ب^{٢} > ٤ أ حـ$ كان الجذران حقيقيين ومختلفين

" " $ب^{٢} = ٤ أ حـ$ كان الجذران حقيقيين ومتساويين ($= \frac{-ب}{٢أ}$)

" " $ب^{٢} < ٤ أ حـ$ كان الجذران تخيليين $= \frac{١}{٢أ} \left(- ب \pm ت \sqrt{٤ أ حـ - ب^{٢}} \right)$

وفى كل من هذه الحـالات فان

مجموع الجذرين $س_1 + س_2 = -\frac{ب}{أ}$ حاصل ضربهما $س_1 س_2 = \frac{حـ}{أ}$ (٢٦)

٣/٢ـ المعادلة من الدرجة الثالثة : Cubic

وتأخذ الصـورة

$$س^3 + أ_1 س^2 + أ_2 س + أ_3 = صفر \quad (٢٧)$$

أو

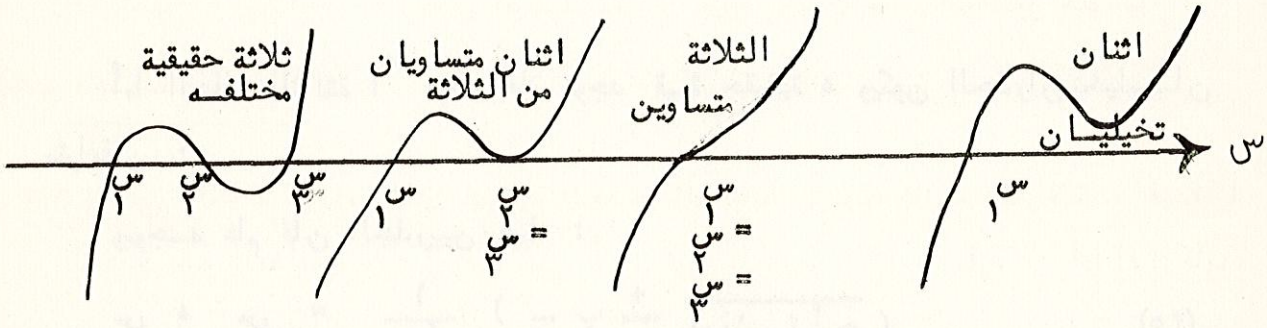
$$أس^3 + ب س^2 + حـ س \times د = صفر \quad (٢٧')$$

ونميز هنا حالتين أساسيتين لجذور هذه المعادلة وعددها ثلاثة :

١ـ الثلاثة جذور حقيقية : (شكل ١٠)

أ ـ مختلفة كلها ٠ ب ـ يتساوى اثنان منهما ٠ حـ ـ الثلاثة تتساوى

٢ـ أحد الجذور حقيقى والآخران تخيليان



(شكل ١٠)

ومعنى هذا أنه يجب أن يكون هناك جذر واحد أو ثلاثة جذور حقيقيـه ٠ لنفرض أننا عرفنا أحد الجذور الحقيقية وليكن $س_1$ ٠ اذن نستطيـع المعادلة (٢٧') كالآتى :

$$(س - س_1)(أ س^2 + ب' س + حـ') = صفر$$

ويصبح علينا أن نحلل العامل الثانى باعتباره معادلة تربيعيه ،ويأخذ التحليل النهائى الشكل الآتى :

$$(س - س_1)(س - س_2)(س - س_3) = صفر$$

ومن الواضح أن

$$\left.\begin{array}{ll} \text{مجموع الجذور} = س_1 + س_2 + س_3 = \frac{-ب}{أ} & \text{أى معامل } س^2 \\ \text{مجموع حواصل ضرب كل اثنين} = س_1 س_2 + س_1 س_3 + س_2 س_3 = \frac{حـ}{أ} & \text{أى معامل } س \\ \text{حاصل ضرب الثلاثة} = س_1 س_2 س_3 = \frac{د}{أ} & \text{أى الحد المطلق} \end{array}\right\} (٢٨)$$

وفيما عدا ذلك لاتوجد صورة صريحة للتعبير عن كل جذر كما فى حالة المعادلة التربيعيه ، ولذا توجد طرق تقريبية تساعد على تعيين موضع الجذور حسابيا .

٤/٢ـ الحالة العامة :

فى الحالة العامة اذا ظهرت الجذور التخيلية ظهرت كأزواج مترافقة . فاذا كانت درجة المعادلة ن زوجية أمكن أن تكون الجذور كلها تخيلية . أما اذا كانت ن فردية كان هناك جذر واحد على الأقل حقيقى .

ويلاحظ أن اشارة د (س) تبقى ثابتة بين أى جذرين حقيقيين متتاليين ، وتتغير عند أى جذر حقيقى ، ولكنها لاتتغير عند الجذور التخيلية .

٣ـ الدوال المثلثية

٣/١ـ صفات الدالة حتا θ :

من المعلوم أن الدالة ص = حتا θ تظهر تقلبات منتظمة طولها ٢ ط بالنسبة الى تغير θ . وتأخذ الدالة ص = حا θ نفس الشكل ولو أنها تتخلف عنها بمقدار $\frac{ط}{٢}$. ولذلك سنكتفى بدراسة حتا θ التى تتميز بتماثلها بالنسبة لقيم θ الموجبة ، وبأنها تبلغ القمة عند θ = صفر . وهى لذلك تعتبر دالة دورية circular or sinusoidal لأنها تأخذ شكل دورات منتظمة . ولهذه الدوال ثلاثة خواص مميزة (شكل ١١) .

١ـ الفترة : period وهذه عبارة عن المدى الذى تتغير فيه θ بما يستكمل دورة واحدة وفى حالة الدورة المنتظمة تكون هذه الدورة ثابتة ، وبالنسبة للدالة حتا θ تكون الفترة = ٢ ط .

٢ـ السعة : amplitude ويقصد بالسعة بعد القمة أو القاع من نقطة متوسطة وفى حالة الدورة المنتظمة تكون السعة ثابتة ، وتساوى ± ١ عندما تكون ص = حتا θ وهى طبعا تساوى ± م عندما ص = م حتا θ

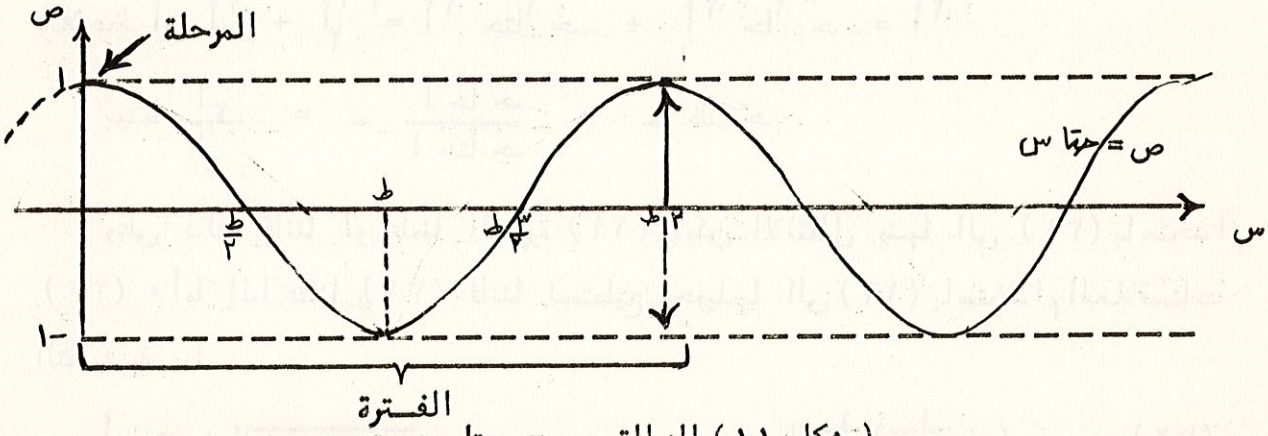
٣ـ المرحلة : phase ويقصد بها المرحلة من الدورة التى تأخذها الدالة عند θ = صفر ونلاحظ أن الدالة حتا θ تبلغ القمة (+ ١) عند θ = صفر والدالة الدورية تبلغ قمة عند نقطة معينة داخل الفترة الخاصة بها . وتكون الدالة المنتظمة متماثلة داخل كل فترة حول نقطة القمة .

٣/٢ـ معالم الدالة المثلثية المنتظمة :

نستنتج من وجود ثلاثة صفات للدالة المثلثية المنتظمة أن الصورة العامة للدالة يجب أن تحتوى على ٣ معالم أ ، ب ، حـ وتكون كالآتى :

ص = أ حتا (ب س + حـ) (٢٩)

وهذه الدالة تكون محصورة بين الخطين + أ ، ـ أ ولذلك تكون السعة = ± أ . أى أن المعلمة أ تحدد السعة . واذا وضعنا θ = (ب س + حـ) فاننا نستطيع حساب طول الدورة أى الفترة بأخذ الفرق بين قيمتى س اللتين عندهما



(شكل ١١) الدالة ص = حتا س

θ = صفر ، θ = ٢ ط وواضح أنهما القيمتان س = -حـ/ب ، س = ٢ط/ب - حـ/ب

والفرق بينهما وهو الفترة = ٢ط/ب . أى أن الفترة تتحدد بالمعلمة ب .

وأخيرا فان المرحلة تتحدد بقيمة الدالة عندما θ = صفر وفى هذه النقطة تكون س = -حـ/ب وعندها تبلغ الدالة قمة . أى أن المعلمة حـ تحدد المرحلة أى أن المعالم الثلاثة هى :

١ـ الفترة تحددها المعلمة ب وهى تساوى ٢ط/ب

٢ـ السعة تحددها المعلمة أ وهى تساوى ± أ

٣ـ المرحلة وتحددها حـ حيث تبلغ الدالة قمة عند س = -حـ/ب

ومن الممكن التعبير عن الدالة المنتظمة بصورة أخرى :

$$ص = أ\ حتا\ (ب س + حـ) = أ\ (حتا\ حـ\ حتا\ ب س - حا\ حـ\ حا\ ب س)$$

وبوضع $أ\ حتا\ حـ = أ_1$ ، $-أ\ حا\ حـ = أ_2$ (٣٠)

فاننا نجد أن

$$ص = أ_1\ حتا\ ب س + أ_2\ حا\ ب س \qquad (٣١)$$

ونلاحظ أن $أ_1^2 + أ_2^2 = أ^2\ حتا^2\ حـ + أ^2\ حا^2\ حـ = أ^2$

بينما $\frac{أ_2}{أ_1} = -\frac{أ\ حا\ حـ}{أ\ حتا\ حـ} = -ظا\ حـ$

وعلى ذلك فاننا لو علمنا الصورة (٢٩) أمكن الانتقال منها الى (٣١) باستخدام (٣٠) . أما اذا علمنا (٣١) فاننا نستطيع تحويلها الى (٢٩) باستخدام العلاقات التالية :

$$أ = +\sqrt{أ_1^2 + أ_2^2} \qquad حـ = ظا^{-1}\left(\frac{-أ_2}{أ_1}\right) \qquad (٣٢)$$

ويمكن تحديد قيمة حـ بين (صفر ، ٢ ط) بنفس طريقة تحديد الزاوية θ فى الجدول الوارد بنهاية القسم الأول من هذا الفصل (ص ١٥).

ونلاحظ أن التحويل من $أ_1$ ، $أ_2$ الى أ ، حـ بمثابة تحويل العدد المركب $أ_1 - ت\ أ_2$ من الاحداثيات الكرتيزية المتعامدة الى أ (حتا حـ + ت حا حـ) بالاحداثيات القطبية .

٣/٣ـ تغيير السعة :

لنفرض الآن أنه مع بقاء الفترة ثابتة والمرحلة على حالها فان السعة تتغير مع تغير س . ولنفرض أن التغير يتم بصورة منتظمة بحيث يزيد باستمرار أو ينقص

باستمرار مع زيادة س . فى الحالة الأولى يقال أن الدورة تباعدية anti-damped or explosive وفى الحالة الثانية يقال أنها تقاربية damped (شكل ١٢) وعلى هذا نجد أن السعة تأخذ قيمة معينة عند نقطة الابتداء ولتكن أ ونسميها السعة الابتدائية initial amplitude ثم تتغير بشكل معين يؤدى الى تقاربها أو تباعدها . ولذلك اذن نحتاج الى قياس هذه الصفة الجديدة للسعة بما يسمى معامل التقارب damping factor فاذا كان هذا المعامل يأخذ صورة نسبية ثابتة من نقطة لأخرى ، أمكننا أن نمثله بمعلمه رابعة م بحيث تأخذ السعة الصورة أ $هـ^{م س}$ حيث هـ هى الدالة الأسية . وطبيعى أن هذه ليست هى الطريقة الوحيدة التى يمكن أن تتغير بها السعة ، ولكنها الصورة التى تهمنا فى التطبيقات التالية . ويلاحظ أننا نستطيع الحصول على نفس النتيجة لو كتبنا السعة = $ل^{س}$ حيث ل = $هـ^{م}$ أى أن م = لول .

وعلى هذا فان الصورة العامة للدالة المثلثية التى تتغير سعتها بانتظام هى :

ص = أ $هـ^{م س}$ حتا (ب س + حـ) (٣٣)

أو ص = أ $ل^{س}$ حتا (ب س + حـ) (٣٣')

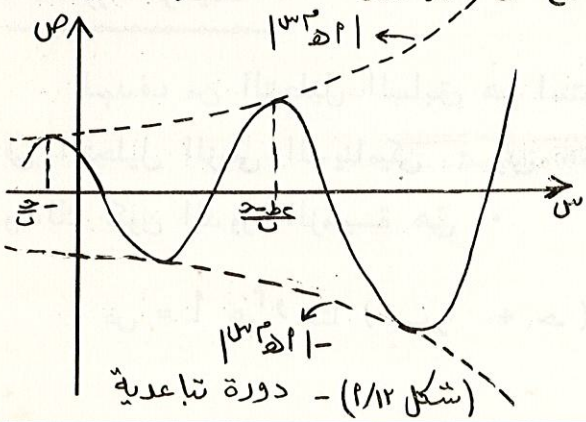
أى أنها تحتوى على أربعة معالم . وتستطيع أن نميز بين ٣ حالات وفقا لقيمة م :

١ـ م > صفر : (أو ل > ١)

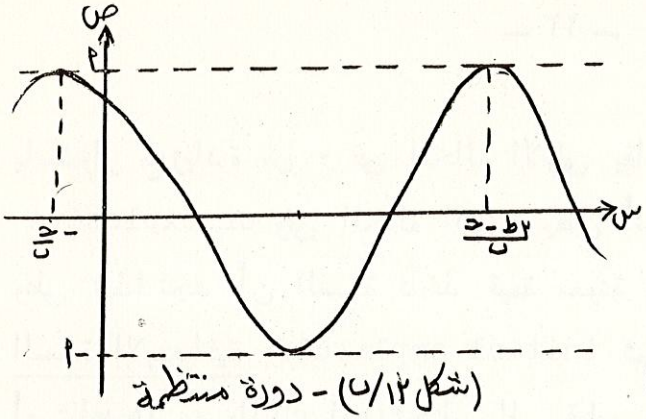
فى هذه الحالة نجد أن الدورة تزداد سعتها التى نجدها واقعة بين | أ $هـ^{م س}$ | ، ـ| أ $هـ^{م س}$ |

أى بين | أ $ل^{س}$ | ، ـ| أ $ل^{س}$ |

وتكون الدورة تباعدية شكل (١٢/أ)



(شكل ١٢/أ) - دورة تباعدية

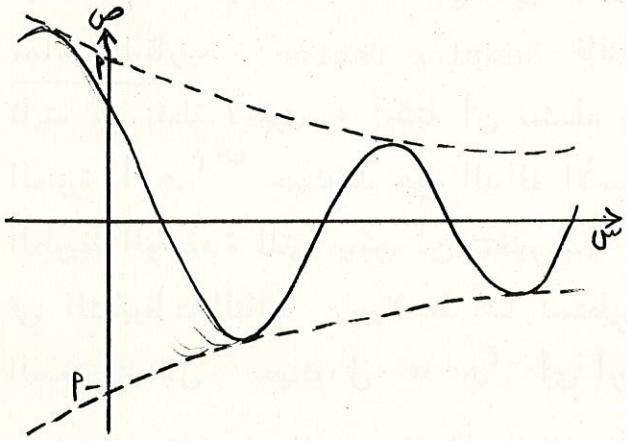


(شكل ١٢/ب) - دورة منتظمة

٢ـ م = صفر : (أو ل = ١)

وهنا تكون السعة ثابتة أى أن الدورة منتظمة ، وسعتها = أ

أى أن الدورة المنتظمة تكون حالة خاصة من (٣٣) شكل (١٢/ب)



٣ـ م < صفر : (أو ل < ١)

وهنا تكون الدورة تقاربية محدودة بين حدين كما فى الحالة الاولى .

وفى كل من هذه الحالات يمكن حساب السعة عند أى نقطة وهى $\pm |أ\ هـ^{م س}|$ أو $\pm |أ\ ل^{س}|$ والحالة الخاصة التى فيها س = صفر تكون السعة هى $\pm$أ وهى السعة الابتدائية .

٣/٤ـ الدورات الزمنية :

الهدف من التحليل السابق هو استعراض خواص بعض الدوال التى ستصادفنا فى التحليل الزمنى الديناميكى . وفى هذه الحالة يكون المتغير س هو الزمن و . وبذلك تكون الدورة الزمنية هى .

ص = أ $هـ^{م و}$ حتا (ب و + حـ) (و = الزمن) (٣٤)

وفيها ٤ معالم : أ ، م ، ب ، حـ ، وتحدد الصفات الأربع التالية :

١ـ الفترة ف = $\frac{٢ط}{ب}$. واذا كانت الفترة قصيرة حسبنا تكرار الدورة خلال وحدة الزمن وهو : ك = $\frac{ب}{٢ط}$. أى أن ك مقلوب ف .

٢ـ السعة الابتدائية = أ .

٣ـ معامل التقارب = م .

٤ـ المرحلة وتتحدد بالقمة عند و = ـ $\frac{حـ}{ب}$.

م . سعيد

الفصل الثانى

معادلات الفروق

١ـ مقدمه

١/١ـ تعريفات :

المعادلة :

$$د\ (ص_و ، ص_{و-١} ، ص_{و-٢} ، \ldots ، ص_{و-ن} ، و) = صفر \qquad (١/٢)$$

حيث و متغير يقاس على فترات متساوية (ويرمز فى الدراسات الاقتصادية الى الزمن) ، تسمى معادلة فروق من المرتبة ن ، لأن أقصى فترة ابطاء فيها هى ن. فمن الممكن أن تنمو ص بمعدل ثابت = ١٠ ٪ كل فترة ، وفى هذه الحالة تكون $ص_و = ١٫١\ ص_{و-١}$ ، ومن الممكن أن يأخذ المتغير ص صورة أعم فتكون

$$ص_و = أ\ ص_{و-١} + ك$$

حيث أ ، ك ثابتان . وهاتان المعادلتان من المرتبة الأولى ، وأولاهما متجانسة بينما الثانية غير متجانسة وكلاهما خطيتان أى من الدرجة الأولى لأن جميع قيم ص من الدرجة الأولى . كذلك تكون المعادلة : $ص_و = أ\ص_{و-١} + ب\ص_{و-٢} + ك$ ، معادلة فروق خطية من المرتبة الثانية ، ومثلها المعادلة $ص_و = أ\ص_{و-٢} + ك$. أما المعادلة : $ص_و = \sqrt{أ\ص_{و-١} + ب\ص_{و-٢} + و}$ فهى من المرتبة الثالثة ولكنها غير خطية . كذلك $ص_و = (أ\ص_{و-١} + ب\ص_{و-٢})^٢ + حـ\ص_{و-٣} - ص_{و-٥} + و^٢$ معادلة غير خطية من المرتبة الخامسة .

ونظرا لأن و تقاس من أى نقطة أصل اعتبارية فانه من الممكن ادخال أى عدد صحيح موجب أو سالب (ر) فى أدلة المعادلة (١) فتصبح :

د (ص و+ر ، ص و+ر ـ ١ ، ..... ، ص و+ر ـ ن ، و) = صفر (٢/٢)

مع تغيير بسيط فى شكل الدالة نظرا لأننا أبقينا الحد الأخير = و وليس و + ر فمن الممكن مثلا وضع ر = ن فنحصل على صورة أخرى للمعادلة (١) تستعمل أحيانا للدلالة على معادلة الفروق :

د (ص و+ن ، ص و+ن ـ ١ ، ..... ، ص و ، و) = صفر (٢/٣)

٢/١ ـ الفروق وعوامل التحويل * :

يمكن تعريف الفرق الأول للمتغير ص عند النقطة و بأنه التغير الذى أوصل القيمة الى ص و أى أن : Δ ص و = ص و ـ ص و ـ ١

فاذا أخذنا الفرق الأول للفرق فأننا نحصل على الفرق الثانى

Δ (Δ ص و) = Δ^2 ص و = Δ ص و ـ Δ ص و ـ ١ = ص و ـ ٢ ص و ـ ١ + ص و ـ ٢

ومن الممكن أن نوالى هذه العملية وكل مرة تزداد درجة العامل operator Δ بوحدة حتى نصل مثلا الى الفرق النونى : $\Delta^{ن}$. ومن الممكن أن نستخدم هذه الفروق المتتالية للدلالة على قيم ص و ـ ر (ر = ١ ، ٢ ، ... ، ن) :

ص و ـ ١ = ص و ـ Δ ص و (باستخدام الفرق الأول)

ص و ـ ٢ = ـ ص و + ٢ ص و ـ ١ + Δ^2 ص و (باستخدام الفرق الثانى)

= ص و ـ ٢ Δ ص و + Δ^2 ص و (بالتعويض)

---

* أنظر أيضا بند (٣/٤) .

بالمثل $ص_{س-٣} = ص_س - ٣ \Delta ص_س + ٣ \Delta^{٢} ص_س - \Delta^{٣} ص_س$

أى أنه من الممكن التعبير عن $ص_{س-ن}$ بدلالة $ص_س$ ، $\Delta ص_س$ ، $\Delta^{٢} ص_س$ ، ..... ، $\Delta^{ن} ص_س$

وبالتعويض عن قيم س فى (١) نجد أنه من الممكن تحويل هذه الدالة الى

$$ف (ص_س ، \Delta ص_س ، ..... ، \Delta^{ن} ص_س ، س) = صفر \qquad (٢/٣)$$

وهذه الصورة تبرر تسمية هذا النوع من المعادلات باسم معادلات الفروق .

ويلاحظ أن Δ رمز يشير الى اجراء عملية تحويل معينة ولذا أسميناه عامل تحويل أو باختصار عامل ، ولكنه مع ذلك يمكن معالجته بالقواعد الجبرية العادية ومن الممكن أيضا تعريف عاملين آخرين أحدهما عامل تعجيل : ل ، والآخر عامل ابطاء : ط ، وذلك كالآتى :

$$ل ص_س = ص_{س+١} \qquad ط ص_س = ص_{س-١} \qquad (٢/٤)$$

وعلى ذلك فان

$$\Delta ص_س = ص_س - ص_{س-١} = (١ - ط) ص_س \qquad (٢/٥)$$

ومعنى هذا أن

$$ط = ل^{-١} \quad ، \quad \Delta = (١ - ط) \quad ، \quad ط = (١ - \Delta) \qquad (٢/٦)$$

وبتطبيق هذه العلاقات على المعادلات السابقة نجد أن :

$$ص_{س-م} = ط^{م} ص_س = (١ - \Delta)^{م} ص_س$$

$$= ص_س - \binom{م}{١} \Delta ص_س + \binom{م}{٢} \Delta^{٢} ص_س + ... + (-١)^{ن} \binom{م}{ن} \Delta^{ن} ص_س + ...$$

$$+ ..... + (-١)^{م} \Delta^{م} ص_س \qquad (٢/٧)$$

ومن الممكن التأكد من هذه النتيجة ، التى توصلنا اليها بتطبيق ذات الحدين على العامل Δ ، بأخذ الفروق المتتالية والتعويض كما فعلنا من قبل . فبوضع

م = ١ ثم ٢ ، ٣ ، ... نستطيع التعبير عن $ص_{و-١}$ ، ... بالشكل السابق .

مثال (١/٢-١) : المعادلة $ص_و = ٢ص_{و-١} - ٢ص_{و-٢} - ٢ و + ٣$

يمكن كتابتها كالآتى : $ص_و = ٢ (ص_و - \Delta ص_و) - ٢ (ص_و - ٢ \Delta ص_و + \Delta^٢ ص_و) - ٢ و + ٣$

$$ص_و = ٢ \Delta ص_و - ٢ \Delta^٢ ص_و - ٢ و + ٣$$

١/٣- معادلات الفروق الخطية بمعاملات ثابتة :

المعادلة الخطية من المرتبة ن بمعاملات ثابتة (وحد مطلق متغير أو ثابت) هى

$$أ_٠ ص_و + أ_١ ص_{و-١} + أ_٢ ص_{و-٢} + ... + أ_ن ص_{و-ن} = د (و) \qquad (٢/٨)$$

حيث $أ_ن \neq$ صفر ، د (و) تشير الى متغير يأخذ شكل دالة فى الزمن بينما المعاملات $أ_ر$ ثابتة ، أى لاتتوقف على و . وتسمى الصورة (٨) معادلة غير متجانسة . فاذا حذفنا د (و) أى ساويناها بالصفر فان المعادلة تصبح :

$$أ_٠ ص_و + أ_١ ص_{و-١} + ... + أ_ن ص_{و-ن} = صفر \qquad (٢/٩)$$

وهى متجانسة .

ولكى نحصل على حل للمعادلة (٨) نفرض أننا نعلم قيم ص فى ن من النقط المتتالية ولتكن هى

$$ص_١ = ق_١ \qquad ص_٢ = ق_٢ \qquad ... \qquad ص_ن = ق_ن$$

هذه القيم تسمى القيم الابتدائية ، بحيث أنه اذا عوضنا بها فى الطرف الأيمن من (٨) أمكن معرفة قيمة $ص_{ن+١}$ وباستخدام هذه الأخيرة والقيم $ق_٢$ الى $ق_ن$ نحصل على $ص_{ن+٢}$ وهكذا . ومعنى هذا أننا بمعلومية ن من القيم الابتدائية

نستطيع استنتاج المجرى الزمنى لقيم ص ٠ غير أن معرفة قيمة معينة ص$_{ن}$ تتطلب معرفة ص$_{ن-١}$ ٠ غير أننا نستطيع أن نعالج المشكلة كالتالى :

المعادلة (٨) تماثل كثيرات الحدود من الدرجة ن فيما عدا أن الأسس مستبدلة هنا بالأدلة الزمنية ، فاذا أمكن تحويل (٨) الى كثيرة حدود وجدنا أنه من الممكن ايجاد ن جذر لها وحساب قيمة ص مباشرة بمجرد معلومية نقطة الزمن التى يراد حساب ص لها ٠

ومن الممكن توضيح هذه الفكرة بمعالجة حالات خاصة ٠

٢ـ معادلات المرتبة الأولى بمعاملات ثابتة

٢/١ـ معنى حل المعادلة :

لنفرض أن لدينا معادلة :

ص$_{و}$ = ٣ص$_{و-١}$ ـ ١٠ (حيث ص = ٨) (٢/١٠)

من الممكن أن نرى أن (١٠) تتحقق اذا كانت

ص$_{و}$ = ٣$^{و+١}$ + ٥ (٢/١١)

ويمكن اعتبارها حلا لتلك المعادلة لأنها تحقق الخاصيتين الآتيتين :

١ـ أنها تحقق القيمة الابتدائية ص$_{٠}$ = ٨ ، اذ بوضع و = صفر

∴ ص$_{٠}$ = ٣$^{٠+١}$ + ٥ = ٨ كما هو مفروض

٢ـ أنها تحقق جميع قيم ص و لأى نقطة و ٠ ولأثبات ذلك نثبت أنها اذا حققت (و ـ ١) فسوف تحقق و ، وبما أنها تحقق النقطة صفر فهى تحقق ١ ، وبالتالى ٢ ثم ٣ وهكذا ٠

واضح أنه بوضع و ـ ١ مكان و فان هذه العلاقة تعنى أن

$$ص_{و-١} = ٣^{و} + ٥$$

وبالتعويض فى الطرف الأيسر من (١٠) نجد أن

$$٣ص_{و-١} - ١٠ = ٣(٣^{و} + ٥) - ١٠ = ٣^{و+١} + ٥ = ص_{و}$$

أى أنها تجعل الطرف الأيسر من (١٠) يساوى الطرف الأيمن • ونستخلص من ذلك القاعدة التالية

قاعدة رقم (١) : أى صيغة تعطى مجموعة من القيم تحقق كلا من معادلة الفروق والقيم الابتدائية تعتبر حلا لمعادلة الفروق •

وللوصول الى الحل نفرض أن لدينا معادلة متجانسة :

$$ص_{و} = أ ص_{و-١} \quad (\text{بمعلومية } ص_{٠} = ق_{٠}) \qquad (١٢/٢)$$

$$\therefore ص_{٠} = ق_{٠} ، \quad ص_{١} = أ ق_{٠} \quad ص_{٢} = أص_{١} = أ^{٢} ق_{٠} ،$$

$$ص_{٣} = أ ص_{٢} = أ ق_{٠} \quad \text{وهكذا} \ .....$$

ومن الممكن أن نستنتج بداهة أن الحل العام هو :

$$ص_{و} = ق_{٠} ا^{و}$$

ولكننا نزيد طريقة عامة للوصول الى هذا الحل (١٣/٢)

٢/٢ ـ طريقة استخلاص الحل فى حالة المعادلة المتجانسة :

لنفرض فرضا تعسفيا هو أن الحل يأخذ الشكل

$$ص_{و} = م^{و} \qquad (١٤/٢)$$

واضح أنه لو وضعت م = أ ، فان هذا الحل يحقق معادلة المفروق (١٢) لأن الطرف الأيمن = $م^{و}$ بينما الأيسر أ $م^{و-١}$ وتساوى الطرفين معناه أن م = أ

$$\therefore \quad ص_{و} = أ^{و} \qquad (١٤/٢')$$

ولكن عندما و = صفر فان $ص_{٠}$ = ١ أى أنها $ق_{٠}$ ، وهذا يعنى أن (١٤') ليست حلا نهائيا . وهذا يتطلب استخدام قاعدة أخرى هى :

قاعدة رقم (٢) : اذا كانت د (و) هى أى صيغة تحقق معادلة فروق متجانسة فان

$$د^{*}(و) = ك \times د(و)$$

تحقق هى الأخرى المعادلة ، حيث ك مقدار ثابت ما .

وتتضح صحة هذه القاعدة بسبب تجانس (١٢) . وعلى ذلك يمكن أن نبدأ بافتراض أن

$$ص_{و} = ك\ م^{و} \qquad (١٤/٢)$$

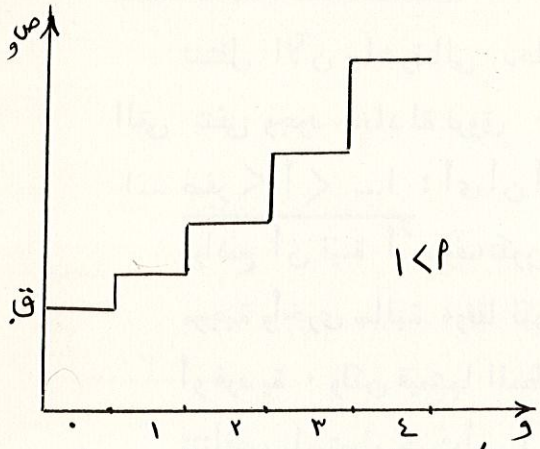
وهذا فرض يحقق (١٢) كما أنه عندما و = صفر فان ك = $ق_{٠}$ ، أى أن الحل هو

$$ص_{و} = ق_{٠}\ أ^{و} \qquad (١٥/٢)$$

٢/٣ـ الاشكال المختلفة التى يعطيها الحل :

واضح أن الحل أى المجرى الزمنى للمتغير ص ، يتوقف على الثابتين $ق_{٠}$ ، أ وسنبدأ بافتراض أن $ق_{٠}$ = مقدار موجب . واضح أنه يمكن تمييز الحالات المختلفة الآتية وفقا لقيمة أ :

أ ـ $ق_{٠}$ = صفر ، أ > صفر : وهذه تشمل الحالات الثلاثة التالية :



شكل (١٣/أ) - حل تباعدى غير دورى

١ـ أ > ١ : من الواضح أن قيمة ص سوف تتزايد باستمرار وبمقادير متزايدة . فمن الواضح أن $أ^{و-١}$ > صفر . وعلى ذلك نستطيع ضرب طرفى المتباينة أ > ١ فى المقادر $أ^{و-١}$ بدون تغير اشارة المتباينة .

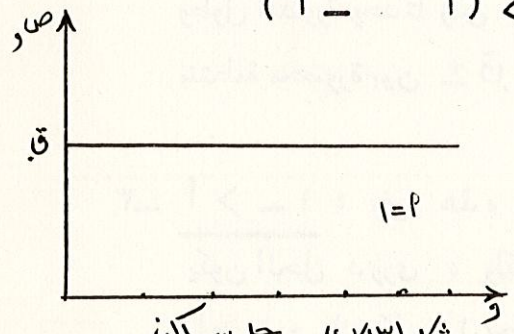
∴ $أ^{و}$ > $أ^{و-١}$

كذلك بما أن أ ـ ١ > صفر ، فان أ > ١ = $\frac{أ - ١}{أ - ١}$

وبضرب الطرفين فى (أ ـ ١) نجد أن ($أ^{٢}$ ـ أ) > (أ ـ ١) . وبضرب الطرفين فى $أ^{و}$

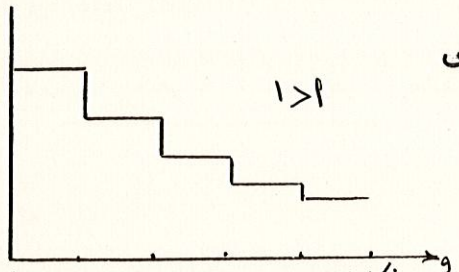
∴ ($أ^{و+٢}$ ـ $أ^{و+١}$) > ($أ^{و+١}$ ـ $أ^{و}$)

أى أن الحل يكون تباعدى وغير دورى .



شكل (١٣/ب) - حل ساكن

٢ـ أ = ١ : فى هذه الحالة يكون $أ^{و}$ = ١ لجميع قيم و . أى أن $ص_{و}$ تكون ثابتة وبذلك نحصل على حل ساكن (غير دورى) ، (شكل ١٣ /ب) .



شكل (١٣/جـ) - حل تقاربى غير دورى

٣ـ صفر < أ < ١ : وهذه عكس الحالة الأولى لانه بنفس الطريقة السابقة نجد أن $أ^{و}$ < $أ^{و-١}$

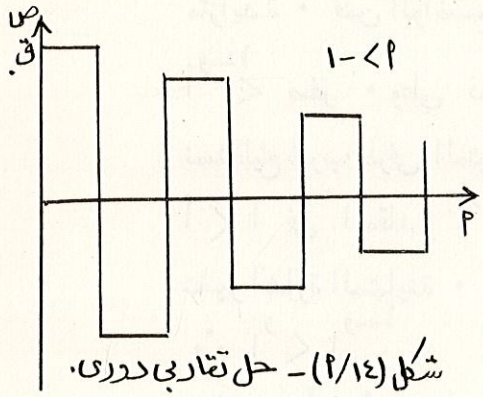
وأن | $أ^{و+٢}$ ـ $أ^{و+١}$ | < | $أ^{و+١}$ ـ $أ^{و}$ |

ومعنى هذا أن قيمة $ص_{و}$ تتناقص بمقادير متناقصة . أى أن الحل يكون تقاربى وغير دورى . شكل (١٣ /حـ) .

ب ـ ق. > صفر ، أ < صفر :

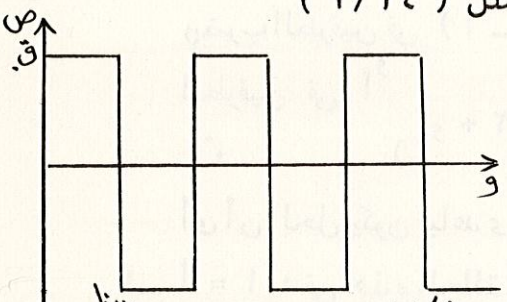
ننتقل الآن مباشرة الى الحالة التى فيها أ سالبة ، أى باهمال حالة أ = صفر التى تنفى وجود معادلة فروق . وهنا أيضا نميز ثلاثة حالات

١ ـ صفر > أ > ـ ١ : أى أن أ كسر سالب وواضح أن قيمة أ^و سوف تكون قيمتها مرة موجبة وأخرى سالبة ، وفقا لكون و زوجية أو فردية . ولكن قيمتها المطلقة تتناقص باستمرار حيث أن |أ| < ١ وبذلك تكون قيمة أ^و محصورة بين ± ١ أ^و ، وهذه ينطبق عليها الحالة (أ / ٣) أى أن الحل دورى تقاربى شكل (١٤ / أ) وطول الدورة وحدتا زمن.



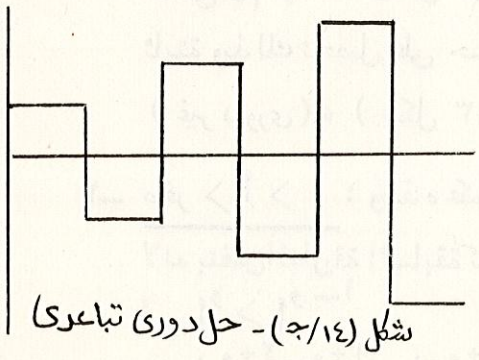
شكل (١٤/أ) ـ حل تقاربى دورى.

٢ ـ أ = ـ ١ : والحل هنا أيضا دورى وطول الدورة وحدتا زمن ، ولكن الدورة منتظمة محصورة بين ± ق. شكل ١٤/ب



شكل (١٤/ب) ـ حل دورى منتظم

٣ ـ أ < ـ ١ : وفى هذه الحالة يكون الحل دورى ، ولكنها دورة تباعدية . (شكل ١٤ /حـ) .


شكل (١٤/جـ) ـ حل دورى تباعدى

حـ ـ ق. < صفر ، أ > صفر :

نستطيع هنا أن نميز بين الحالات الثلاثة المميزة فى (أ) والفارق الوحيد هو أن جميع الحلول تقع أسفل المحور الأفقى آخذة الوضع المنعكس لما هو مبين فى الاشكال (١٣) .

د ـ ق. < صفر ، أ < صفر :

تأخذ الحلول هنا أيضا شكلا دوريا كما هو مبين فى (ب) والأشكال (١٤) .

٢/٤ ـ حل المعادلة غير المتجانسة بحد مطلق ثابت :

لنفرض الآن أن المعادلة أخذت الشكل .

$$ص_و = أ\, ص_{و-١} + ك \qquad (١٦/٢)$$

لايمكن أن نطبق القواعد السابقة مباشرة . ولذلك نبحث عن حل خاص particular solution ولنفرض أنه المقدار الثابت $\hat{ص}$ ، لجميع قيم و وبالتعويض به فى (١٦) نجد أن

$$\hat{ص} = \frac{ك}{١ - أ} \qquad (أ \neq ١) \qquad (١٧/٢)$$

فاذا عرفنا الانحرافات عن هذا الحل بأنها $ض_و$ ، فان

$$ض_و = ص_و - \hat{ص} \qquad (١٨/٢)$$

$$اذن\ ص_و = ض_و + \frac{ك}{١ - أ} \quad ، \quad ص_{و-١} = ض_{و-١} + \frac{ك}{١ - أ}$$

وبالتعويض فى (١٦) نجد أنها تؤول الى

$$ض_و = أ\, ض_{و-١} \qquad (١٩/٢)$$

وهذه معادلة متجانسة ، يمكن الحصول عليها بأن نطرح من (١٦) مباشرة

المعادلة التى نحصل عليها بالتعويض فيها بالقيمة $\hat{ص}$. أى $\hat{ص}$ = أ $\hat{ص}$ + ك
ووفقا للقواعد السابقة نفرض أن الحل هو

$$ض_و = ب م^و$$

فنجد أن : ب = $ض_.$ ، م = أ أى أن $ض_و = ض_. أ^و$. وباستخدام (١٨) نحصل على

$$(ص_و - \hat{ص}) = (ص_. - \hat{ص}) أ^و$$

أى أن

$$ص_و = \frac{ك}{١ - أ} + (ص_. - \frac{ك}{١ - أ}) أ^و \qquad (٢٠/٢)$$

مثال (٢/٤ـ١) لنفرض أننا أردنا حل المعادلة (١٠) بعاليه . واضح أن

$$\hat{ص} = \frac{-١٠}{١ - ٣} = ٥$$

اذن الحل هو

$$ص_و = ٥ + (٨ - ٥) ٣^و = ٥ + ٣ \times ٣^و = ٥ + ٣^{و+١}$$

وهو الحل الوارد فى المعادلة (١١) . ونلاحظ أنه لو كانت $ص_.$ = ٥ أى $ص_. = \hat{ص}$ فان الحل يؤول الى : $ص_و = ٥ + (٥ - ٥) ٣^و = ٥$

أى أن ٥ تحقق الحل بشكل يضمن ثبات قيم $ص_و$ عند $\hat{ص}$ ولهذا أسميناها حلا خاصا .

مثال (٢/٤ـ٢) لنفرض أن السكان يزيدون بمعدل ثابت م .

$$\therefore \frac{ص_{و+١} - ص_و}{ص_و} = م \qquad (\text{بمعلومية } ص_.)$$

$$\therefore ص_{و+١} - ص_و = م ص_و$$

أى أن $ص_و = (١ + م) ص_{و-١}$

فاذا كانت م > صفر ، فان الحل يكون تباعدى وغير دورى .

مثال (٢/٤ـ٣) فى نموذج ديناميكى للمكرر نفرض أن الانفاق $ق_و$ فى الفترة و يكون نسبة مثل حـ من الانفاق $ق_{و-١}$ فى الفترة السابقة . ولنفرض أن الانفاق الابتدائى الذى تقوم به الحكومة = س .

$$\therefore \; ق_و = حـ \, ق_{و-١} \qquad ق_٠ = س$$

فالحل هو : $ق_و = س \, حـ^و$

فاذا كانت حـ موجبة وأقل من الوحدة فان الحل يكون تقاربى غير دورى .

مثال (٢/٤ـ٤) نموذج هارود يفترض أن :

$$س_و = حـ \, (ى_{و+١} - ى_و) \qquad خ_و = ب \, ى_و \qquad خ_و = س_و$$

حيث س = الاستثمار ، خ = الادخار ، ى = الدخل .

$$\therefore \; حـ \, (ى_{و+١} - ى_و) = ب \, ى_و$$

$$\therefore \; ى_و = \left(١ + \frac{ب}{حـ}\right) ى_{و-١}$$

والحل هو

$$ى_و = ى_٠ \left(١ + \frac{ب}{حـ}\right)^و$$

حيث $\frac{ب}{حـ}$ > صفر ، فالحل تباعدى غير دورى .

****

ومن الممكن أن نشير هنا الى قاعدة يمكن استخدامها فى الحالات التالية فباستخدام عامل الابطاء ط نلاحظ أن المعادلة (١٦) يمكن كتابتها كالآتى :

$$(١ - أ \, ط) \, ص_و = ك \qquad (٢/٢١)$$

وللحصول على الحل الخاص ، نضع ط = ١ ، فيكون (١ ـ أ) $\hat{ص}$ = ك

ومنها نحصل على (١٧) بشرط أن أ ≠ ١

٢/٥ـ مغزى الحل الخاص :

من الممكن أن يأخذ الحل الخاص (١٧) عدة أشكال ، وذلك كالآتى :

١ـ الحالة الأولى : $\hat{ص}$ = ثابت . هذه هى الحالة التى افترضناها بالنسبة الى (١٦) وكما رأينا فان هذا يقتضى أن تكون أ ≠ ١ وواضح من هذا أنه لو تحقق ذلك فان من الممكن أن يأخذ المتغير $ص_و$ القيمة $\hat{ص}$ فى فترة ما فيبقى عندها بعد ذلك باستمرار . ومعنى هذا أن $\hat{ص}$ تمثل توازنا ساكنا stationary equilibrium

٢ـ الحالة الثانية : $\hat{ص}$ = دالة زمنية . لنفرض أن المعادلة (١٦) أخذت الشكل :

$$ص_و = ص_{و-١} + ب \qquad (٢١/٢)$$

فى هذه الحالة لايمكن أن نفترض حلا مثل (١٧) لأن أ = ١ . ولكن من الواضح أن (٢١) يمكن كتابتها كالآتى :

$$\Delta ص_و = ب \qquad (٢١/٢)'$$

أى أن الذى يمكن اعتباره ثابتا ليس هو قيمة ص بل الفرق الأول لها (بالنسبة الى و) ومعنى هذا أن الحل الخاص يكون دالة خطية فى الزمن . ولنفرض أن هذا الحل هو :

$$ص^{٨}_و = ك + م \times و \qquad (٢٢/٢)$$

وحسب هذا الفرض يكون : $\Delta ص_و$ = (ك + م و) ـ (ك + م و ـ م) = م

أى أن م = ب . ولتعيين الثابت ك نفترض أن (٢٢) تحقق نقطة الصفر ومنها ك = ص. . أى أن الحل الخاص يكون :

$$\hat{ض}_و = ص_. + ب\,و \qquad (٢/٢٢')$$

أى أن الحل الخاص أخذ شكل دالة زمنية هى عبارة عن خط اتجاه عام مستقيم . وهذا الحل اذا عوضنا به فى (٢١) يستنفذ كل المعلومات التى فيها (لأن ض = صفر) ، أى أن (٢٢/) تعتبر هى الحل العام .

ولذلك يمكن أن نعدل الحل بأن نفترض أن :

$$\hat{ض}_و = ع\,و \qquad (٢/٢٣)$$

وهذا يحقق (٢١') حيث ع = ب

$$\therefore \quad \hat{ض}_و = ب\,و \qquad (٢/٢٣)$$

وبأخذ الانحرافات : $ض_و = ص_و - \hat{ض}_و$

$$\therefore \quad ص_و = ض_و + ب\,و = (ض_{و-١} + ب\,و - ب) + ب$$

ومنها

$$ض_و = ض_{و-١} \qquad (٢/٢٤)$$

وهذه حلها هو $ض_و = ض_.(١)^و = ض_.$

حيث $ض_. = ص_. - \hat{ض}_. = ص_. - صفر = ص_.$

$$\therefore \quad ض_و = (ص_و - \hat{ض}_و) = ض_. = ص_.$$

$$\therefore \quad ص_و = ص_. + ب\,و \qquad (٢/٢٥)$$

كما فى (٢٢') . أى أن (٢٥) أو (٢٢') هى الحل العام .

ومعنى هذا أن التوازن فى هذه الحالة ليس ساكنا ،بل يعتبر أنه توازن متحرك moving equilibrium

٣ـ الحالة الثالثة : الحد المطلق دالة متغير فى الزمن ـ من الممكن أن تأخذ هذه الدالة عدة أشكال ولنفرض أولا أنها دالة كثيرة الحدود :

$$ص_و = أ\, ص_{و-١} + ب_٢ و^٢ + ب_١ و + ب_٠ \qquad (٢٦/٢)$$

واضح أن هذا يعنى أن المقدار ($ص_و - أ\, ص_{و-١}$) يتحرك حول منحنى اتجاه عام من الدرجة الثانية . والحصول على حل فى ص يتطلب دراسة نوع الدالة الزمنية التى تتغير حولها $ص_و$ فقط . لذلك نأخذ فرضا تعسفيا * هو أن :

$$\hat{ص}_و = ح_٠ + ح_١ و + ح_٢ و^٢ \qquad (٢٧/٢)$$

ومعنى هذا أن $\hat{ص}_{و-١} = ح_٠ + ح_١ (و-١) + ح_٢ (و^٢ - ٢و + ١)$

$$= (ح_٠ - ح_١ + ح_٢) + (ح_١ - ٢ح_٢) و + ح_٢ و^٢$$

وبالتعويض فى (٢٦) نجد أن :

$$ح_٠ + ح_١ و + ح_٢ و^٢ - أ\, [(ح_٠ - ح_١ + ح_٢) + (ح_١ - ٢ح_٢) و + ح_٢ و^٢]$$

$$= ب_٠ + ب_١ و + ب_٢ و^٢$$

وبمساواة المعاملات المتناظرة لقوى و نجد أن

$$ح_٠ - أ\, (ح_٠ - ح_١ + ح_٢) = ب_٠$$

$$ح_١ - أ\, (ح_١ - ٢ح_٢) = ب_١$$

$$ح_٢ - أ\, ح_٢ = ب_٢$$

(*) أنظر أيضا بند (٣/٤)

ومنها نجد أن

$$\begin{cases} \text{ح}_{٢} = \dfrac{\text{ب}_{٢}}{\text{١} - \text{أ}} \qquad \text{ح}_{١} = \dfrac{\text{ب}_{٢}}{\text{١} - \text{أ}} - \dfrac{\text{٢ ب}_{٢}\ \text{أ}}{(\text{١} - \text{أ})^{٢}} \\ \text{ح}_{٠} = \dfrac{\text{ب}_{٠}}{\text{١} - \text{أ}} - \dfrac{\text{أ ب}_{١}}{(\text{١} - \text{أ})^{٢}} + \dfrac{\text{أ}^{٢}\ \text{ب}_{٢}\ (\text{أ} + \text{١})}{(\text{١} - \text{أ})^{٣}} \end{cases} \qquad (٢٨/٢)$$

وبالتعويض بهذه القيم فى (٢٧) والطرح من (٢٦) نحصل على معادلة بالشكل (١٩) تحل كالمعتاد .

مثال (٢/٥ـ١) ـ نفرض أن معادلة الفروق كانت

$$\text{ص}_{\text{و}} = \frac{١}{٣}\ \text{ص}_{\text{و}-١} + ٣ + ٢\ \text{و} + \text{و}^{٢}$$

بالتعويض فى العلاقات (٢٨) نجد أن

$$\hat{\text{ص}}_{\text{و}} = \frac{٩}{٢} + \frac{٣}{٢}\ \text{و} + \frac{٣}{٢}\ \text{و}^{٢} \qquad \left(\text{ومنها } \hat{\text{ص}}_{٠} = \frac{٩}{٢}\right)$$

ويكون الحل العام هو

$$\text{ص}_{\text{و}} = \frac{٩}{٢} + \frac{٣}{٢}\ \text{و} + \frac{٣}{٢}\ \text{و}^{٢} + \left(\text{ص}_{٠} - \frac{٩}{٢}\right)\left(\frac{١}{٣}\right)^{\text{و}}$$

نلاحظ من هذا المثال أن الحل الخاص يأخذ شكلا مماثلا (فى الغالب) للدالة د (و) التى تظهر فى معادلة الفروق . وسوف نعطى فيما بعد صورة أعم للحل معتمدة على دالة فى العامل ط أو ل (بند ٤/٣) .

٣ ـ المعادلات الخطية من المرتبة الثانية بمعاملات ثابتة

٣/١ـ المعادلة المتجانسة :

تأخذ هذه المعادلة الشكل العام :

$$\text{أ}\ \text{ض}_{\text{و}} + \text{ب}\ \text{ض}_{\text{و}-1} + \text{حـ}\ \text{ض}_{\text{و}-2} = \text{صفر} \qquad (٢/٢٩)$$

هذه المعادلة يمكن كتابتها باستخدام العامل ط أول :

$$(\text{أ} + \text{ب}\ \text{ط} + \text{حـ}\ \text{ط}^{2})\ \text{ض}_{\text{و}} = \text{صفر}$$
$$(\text{أ}\ \text{ل}^{2} + \text{ب}\ \text{ل} + \text{حـ})\ \text{ط}^{2}\ \text{ض}_{\text{و}} = \text{صفر} \qquad (٢/٣٠)$$

لنفرض أن الحل أخذ الشكل

$$\text{ض}_{\text{و}} = \text{م}^{\text{و}} \qquad (٢/٣١)$$

$$\therefore\ \text{أ}\ \text{م}^{\text{و}} + \text{ب}\ \text{م}^{\text{و}-1} + \text{حـ}\ \text{م}^{\text{و}-2} = \text{صفر}$$

أى أن

$$(\text{أ}\ \text{م}^{2} + \text{ب}\ \text{م} + \text{حـ})\ \text{م}^{\text{و}-2} = \text{صفر} \qquad (٢/٣٢)$$

وبمقارنة هذه الصورة بالمعادلة الثانية فى (٣٠) نلاحظ أن كلا منهما يتطلب جعل

$$(\text{أ}\ \text{ل}^{2} + \text{ب}\ \text{ل} + \text{حـ}) = \text{صفر} \quad \text{أو} \quad (\text{أ}\ \text{م}^{2} + \text{ب}\ \text{م} + \text{حـ}) = \text{صفر} \qquad (٢/٣٣)$$

معنى هذا أننا نستطيع أن نعتبر العامل ل يسلك مسلك العدد م . ومن الممكن اعتبار أياً من هاتين المعادلتين معادلة مميزة لمعادلة الفروق الأصلية أو معادلة مساعدة .

والجذران هما :

$$ل_{١} = \frac{١}{٢م} \left(-ب + \sqrt{٤ - ٤ا حـ} \right) \quad ل_{٢} = \frac{١}{٢م} \left(-ب - \sqrt{٤ - ٤ا حـ} \right)$$

ويكون الحل هو :

$$ض_{و} = ل^{و}_{١} \quad أو \quad ض_{و} = ل^{و}_{٢} \qquad (٢ / ٣٤)$$

(حيث أننا نعامل ل مثل م فى ٣١) . ولكننا نريد حلا عاما ، وهذا يدعو الى القاعدة التالية .

قاعدة رقم (٣) : اذا كان كل من $ض'_{و}$ ، $ض''_{و}$ حلين يحققان معادلة الفروق ، فان ($ك_{١} ض'_{و} + ك_{٢} ض''_{و}$) تحققها هى الأخرى ، حيث $ك_{١}$ ، $ك_{٢}$ ثوابت ما.

هذه القاعدة تعميم للقاعدة رقم (٢) . ونلاحظ أن معنى أن الحلين يحققان المعادلة هو :

$$أ ض'_{و} + ب ض'_{و-١} + حـ ض'_{و-٢} = صفر$$

$$أ ض''_{و} + ب ض''_{و-١} + حـ ض''_{و-٢} = صفر$$

اذن بالضرب فى $ك_{١}$ ، $ك_{٢}$ والجمع :

$$أ (ك_{١} ض'_{و} + ك_{٢} ض''_{و}) + ب (ك_{١} ض'_{و-١} + ك_{٢} ض''_{و-١})$$

$$+ حـ (ك_{١} ض'_{و-٢} + ك_{٢} ض''_{و-٢}) = صفر$$

وواضح أن هذا يحقق الحل ($ك_{١} ض'_{و} + ك_{٢} ض''_{و}$) وهو أعم من أى من الحلين الأصليين اللذين نحصل على كل منهما كحالة خاصة منه (بوضع $ك_{١}$ = صفر أو $ك_{٢}$ = صفر)

اذن الحل العام للمعادلة (٢٩) هو

$$ض_{و} = ك_{١} ل^{و}_{١} + ك_{٢} ل^{و}_{٢} \qquad (٢ / ٣٥)$$

ولتعيين الثابتين $ك_1$ ، $ك_2$ يلزمنا قيمتان ابتدائيتان : $ض_0 = ق_0$ ، $ض_1 = ق_1$ مثلا .

$$\therefore ك_1 + ك_2 = ق_0$$

$$ل_1 ك_1 + ل_2 ك_2 = ق_1$$

ويحل هاتين المعادلتين نحصل على الثابتين .

مثال (٣/١ـ١) : حل المعادلة الآتية بمعلومية $ض_0 = \frac{٣}{٢}$ ، $ض_1 = ١$

$$ض_و = ٢ ض_{و-١} - \frac{٣}{٤} ض_{و-٢}$$

المعادلة المميزة هى

$$ل^2 - ٢ ل + \frac{٣}{٤} = صفر \qquad \therefore ل_1 = \frac{٣}{٢} ، ل_2 = \frac{١}{٢}$$

ويكون الحل العام هو

$$ض_و = ك_1 \left(\frac{٣}{٢}\right)^و + ك_2 \left(\frac{١}{٢}\right)^و$$

$$\therefore ك_1 + ك_2 = \frac{٣}{٢} \qquad \frac{٣}{٢} ك_1 + \frac{١}{٢} ك_2 = ١$$

ومنها $ك_1 = \frac{١}{٤}$ ، $ك_2 = \frac{٥}{٤}$

$$\therefore ض_و = \frac{١}{٤} \left(\frac{٣}{٢}\right)^و + \frac{٥}{٤} \left(\frac{١}{٢}\right)^و$$

مثال (٣/١ـ٢) : حل المعادلة : $ض_و = ٤ ض_{و-١} - ٣ ض_{و-٢}$

بمعلومية $ض_0 = ٢$ $\qquad ض_1 = ٤$

المعادلة المميزة هى :

$$ل^{٢} - ٤ل + ٣ = صفر \qquad \therefore ل_{١} = ٣ \qquad ل_{٢} = ١$$

$$\therefore ض_{و} = ك_{١} (٣)^{و} + ك_{٢} (١)^{و} = ك_{١} (٣)^{و} + ك_{٢}$$

$$ك_{١} + ك_{٢} = ٢ \qquad ٣ك_{١} + ك_{٢} = ٤ \qquad \therefore ك_{١} = ك_{٢} = ١$$

أى أن الحل العام هو

$$ض_{و} = ٣^{و} + ١$$

٢/٣ـ المعادلة غير المتجانسة :

لنفرض أن معادلة الفروق كانت غير متجانسة :

$$أ ص_{و} + ب ص_{و-١} + حـ ص_{و-١} = د \qquad (٣٦/٢)$$

حيث د = د (و) ، دالة فى الزمن : مثلا مقدار أو كثيرة حدود الخ ..

ولنفرض أن $ص^{*}_{و}$ = ع (حيث ع هى الاخرى دالة فى الزمن : مقدار ثابت أو متغير)

هل الحل الخاص المناظر للمعادلة (١٧) . أى أن ع = $ع_{و}$ تحقق المعادلة (٣٦)

فاذا كانت المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة (٣٦) هى

$$أ ض_{و} + ب ض_{و-١} + حـ ض_{و-١} = صفر \qquad (٢٩/٢)$$

وهى نفس المعادلة التى درسناها فى البند السابق ، فاننا نستطيع استخلاص القاعدة التالية :

قاعدة رقم (٤) : اذا كانت $س_{و}$ تحقق المعادلة (٣٦) فى صورتها المتجانسة (٢٩) بينما $ع_{و}$ تحقق المعادلة الأصلية ، فان المقدار ($س_{و} + ع_{و}$) يحقق (٣٦) نفسها . ولاثبات ذلك نعوض فى (٣٦) .

$$\therefore \text{أ}\,(\text{س}_{\text{و}} + \text{ع}_{\text{و}}) + \text{ب}\,(\text{س}_{\text{و}-1} + \text{ع}_{\text{و}-1}) + \text{حـ}\,(\text{س}_{\text{و}-2} + \text{ع}_{\text{و}-2}) =$$

$$(\text{أ}\,\text{س}_{\text{و}} + \text{ب}\,\text{س}_{\text{و}-1} + \text{حـ}\,\text{س}_{\text{و}-2}) + (\text{أ}\,\text{ع}_{\text{و}} + \text{ب}\,\text{ع}_{\text{و}-1} + \text{حـ}\,\text{ع}_{\text{و}-2}) =$$

$$\text{صفر} + \text{د} = \text{د}$$

أى أن ($\text{س}_{\text{و}} + \text{ع}_{\text{و}}$) حققت (٣٦) ٠

وعلى هذا فان حل المعادلة غير المتجانسة يتطلب الحصول على الحل $\text{س}_{\text{و}}$ للمعادلة المتجانسة بالطريقة السابق ذكرها ، والحصول على الحل الخاص $\text{ع}_{\text{و}}$ ، وهنا كما فى بند (٢/٥) يمكن التمييز بين عدة حالات :

١ـ <u>د = ثابت</u> ٠ فى هذه الحالة نفترض أن الحل الخاص هو الثابت ع ، وبالتعويض فى (٣٦) نجد أن : $\text{أ}\,\text{ع} + \text{ب}\,\text{ع} + \text{حـ}\,\text{ع} = \text{د}$

$$\therefore \hat{\text{ص}}_{\text{و}} = \text{ع} = \frac{\text{د}}{\text{أ} + \text{ب} + \text{حـ}} \qquad (\text{أ} + \text{ب} + \text{حـ} \neq \text{صفر}) \qquad (٢/٣٧)$$

فاذا كان أ + ب + حـ = صفر ، فان هذا الفرض لايحقق (٣٦) ولذلك فعلنا من قبل نفترض أن الحل الخاص هو ع × و ٠ وبالتعويض فى (٣٦) نجد أن

$$\text{أ}\,\text{ع}\,\text{و} + \text{ب}\,\text{ع}\,(\text{و}-1) + \text{حـ}\,\text{ع}\,(\text{و}-2) = \text{د}$$

$$(\text{أ} + \text{ب} + \text{حـ})\,\text{ع}\,\text{و} - (\text{ب} + 2\,\text{حـ})\,\text{ع} = \text{د}$$

$$\therefore \text{صفر} - (\text{ب} + 2\,\text{حـ})\,\text{ع} = \text{د}$$

ومنها

$$\hat{ص}_و = ع_و \text{ ، } ع = \frac{-د}{ب + ٢ح} \qquad \left\{ \begin{array}{l} أ + ب + ح = \text{صفر} \\ ب + ٢ح \neq \text{صفر} \end{array} \right\} \qquad (٣٨/٢)$$

وأخيرا اذا كانت كل من (أ + ب + ح) = صفر ، ب + ٢ ح = صفر

(أى أن أ = ح) فان (٣٧) ، (٣٨) لاتصلحان . ولذلك نحاول بداهة فرضا جديدا هو $\hat{ص}_و = ع_و^٢$. وبالتعويض نجد أن

$$(أ + ب + ح) ع_و^٢ - ٢ (ب + ٢ح) ع_و + (ب + ٤ح) ع = د$$

وواضح أن ب + ٤ ح ≠ صفر لأنه لو حدث ذلك لكانت ح = صفر كما يتضح بطرح ب + ٢ ح = صفر منها . وبالتالى فان ب هى الأخرى تكون صفرا . وواضح أن افتراض أن المعادلة من الدرجة الثانية يعنى أن ح ≠ صفر . اذن لابد أن نحصل على حل فى هذه الحالة اذا تعذر استخدام كل من (٣٧) ، (٣٨) . ويكون الحل هو

$$\hat{ص}_و = ع_و^٢ \quad \text{حيث} \quad ع = \frac{د}{ب + ٤ح} \qquad (٣٩/٢)$$

ولو تصورنا أن المعادلة كانت من الدرجة ن فاننا نتوقع أن الحل الخاص يمكن أن يكون هو $ع_و^ن$ حيث ن = أصغر الاعداد (صفر ، ١ ، ٢ ، ٠٠٠٠٠ ، ن) التى تعطى مقاما غير صفرى فى صورة مماثلة للصور الثلاث الاخيرة .

وعلى ذلك يكون الحل العام هو

$$ص_و = ك_١ ل_{١و} + ك_٢ ل_{٢و} + \hat{ص}_و \qquad (٤٠/٢)$$

حيث $\hat{ص}_و$ تتحدد وفقا لاحد التعريفات (٣٧) أو (٣٨) أو (٣٩) .

٢ـ د = دالة زمنية : فى هذه الحالة نعالج الحل الخاص بنفس الطريقة التى ذكرناها فى بند (٥/٢) . وسوف نعطى فيما بعد قواعد عامة لمعالجة بعض الحالات الهامة .

٣/٣ـ حالة الجذور الحقيقية المختلفة :

تختلف معادلات المرتبة الثانية عن معادلات المرتبة الاولى فى أنه من الممكن أن تكون الجذور حقيقية ومختلفة أو حقيقية ومتساوية أو تخيلية مترافقة . وذلك وفقا لمميز المعادلة المميزة . وسوف نعالج هنا الحالة الأولى التى فيها المميز موجب ، أى أن $ب^٢ > ٤ أ حـ$.

وفى هذه الحالة نستطيع التمييز بين الحالات الثلاث التالية :

أ ـ الجذران موجبان ومختلفان : $ل_١ > ل_٢ >$ صفر . ويتوقف الحل على قيمة كل من الجذرين :

١ـ $ل_١$ ، $ل_٢$ أقل من الوحدة : فى هذه الحالة يؤول كل من $ك_١ ل_١^و$ ، $ك_٢ ل_٢^و$ الى الصفر ـ عندما تؤول و الى مالانهاية . أى أن الانحرافات $ض_و$ تؤول الى الصفر ويكون التوازن مستقرا .

٢ـ $ل_١ = ١$ ، $ل_٢ < ١$: وهنا تؤول $ك_٢ ل_٢^و$ الى الصفر ، بينما $ك_١ ل_١ = ك_١$ أى أن الحل العام يؤول الى $ض_و + ك_١$ وهذه حالة التوازن المحايد .

٣ـ $ل_١ > ١$ ، $ل_٢ \geqslant ١$: وهنا يكون الحل تباعدى ويتأثر بالجذر الأكبر أى أن $ض_و$ تؤول فى النهاية الى $ك_١ ل_١^و$ وتتوقف أشارتها على اشارة $ك_١$

ب ـ الجذران سالبان ومختلفان : $ل_١ < ل_٢ <$ صفر ، أى أن $ل_١$ هو الأكبر عدديا .

١ـ $ل_١$ ، $ل_٢ > ـ ١$: أى أن الجذران يقعان بين صفر ، ـ ١ . وهنا تتذبذب $ض_و$ حول $ض_و$ بصورة تقاربية . أى أن التوازن يكون مستقرا .

٢ـ $ل_١ = ـ ١$ ، $ل_٢ > ـ ١$: يؤول الانحراف $ض_و$ الى $ك_١ ل_١^و = ك_١ (ـ ١)^و$ أى أنه يأخذ شكل دورة منتظمة سعتها = $٢ ك_١$. أى أن $ض_و$ تتغير

فى النهاية بين $\hat{ص}_و + ك_1$ ، $\hat{ص}_و - ك_1$

٣ـ $ل_1 < -1$ ، $ل_2 \leqslant -1$: ويكون الحل دوريا تباعديا والجزء الأكبر منه يتحدد وفقا للجذر الاكبر عدديا أى $ك_1 ل_1^و$

حـ ـ جذر موجب والاخر سالب :

١ـ الجذر ذو القيمة الاكبر عدديا موجبا : $ل_1 >$ صفر ، $ل_2 <$ صفر

اذن يتوقف الحل فى النهاية على قيمة $ل_1$:

اذا كانت $ل_1 < 1$ فان $ص_و$ تؤول الى $\hat{ص}_و$

اذا كانت $ل_1 = 1$ فان $ص_و$ تؤول الى $\hat{ص}_و + ك_1$

اذا كانت $ل_1 > 1$ فان $ص_و$ تأخذ شكلا تباعديا

٢ـ الجذر الاكبر عدديا هو السالب : $ل_1 <$ صفر ، $ل_2 >$ صفر

اذا كانت $ل_1 > -1$ فالحل دورى تقاربى

اذا كانت $ل_1 = -1$ فى النهاية تتقلب $ص_و$ بين $ص_و + ك_1$ ، $ص_و - ك_1$

اذا كانت $ل_1 < -1$ يكون الحل دورى تباعدى

٣ـ الجذران متساويان عدديا : $ل_1 = -ل_2 =$ مقدار موجب ل .

وهذا يحدث عندما تكون ب = صفر . ونظرا لتساوى الجذرين فلا يمكن أن نعرف مقدما الصورة النهائية للحل ، اذ أن الأمر يتوقف على الثابتين $ك_1$ ، $ك_2$. فلقيم و الزوجية يكون الحل هو $ض_و = (ك_1 + ك_2) ل^و$ ، بينما لقيم والفردية يكون الحل هو $ض_و = (ك_1 - ك_2) ل^و$. وعلى ذلك فاذا كانت قيم $ك_1$ ، $ك_2$ تجعل المقدارين $ك_1 + ك_2$ ، $ك_1 - ك_2$ موجبين

فان $ض_و$ تتقلب بدون أن تتغير اشارتها أى أن $ص_و$ لن تتقلب بصورة دورية ٠ أما فى الحالة العكسية فان من الممكن أن تحدث تغيرات دورية عنيفة ٠

٤/٣ـ حالة تساوى الجذرين :

عندما يكون $ب^٢ = ٤ أ حـ$ يكون الجذران متساويين ويساويان ل مثلا ٠ اذن لو سلمنا بالحل (٣٥) لكان معنى ذلك أن

$$ض_و = (ك_١ + ك_٢) ل^و = ك ل^و$$

أى أنه يتعذر ايجاد كل من الثابتين $ك_١$ ، $ك_٢$ ٠ وهنا نلجأ الى القاعدة التالية :

قاعدة رقم (٥) : اذا كان لمعادلة الفروق من المرتبة الثانية جذر مزدوج ل فان $ل^و$ وكذلك $و ل^و$ يحققانها ٠

لنفرض أن المعادلة المميزة هى $أ ل^٢ + ب ل + حـ = صفر$ ، حيث $ب^٢ = ٤ أ حـ$ والجذران $ل_١$ ، $ل_٢$ يساويان $ل = \frac{-ب}{٢أ}$ ٠ بينما $حـ = \frac{ب^٢}{٤أ}$

$$\therefore \quad أ ل^٢ + ب ل + \frac{ب^٢}{٤أ} = صفر$$

وبالتعويض فى معادلة الفروق بالمقدار ($و ل^و$) نجد أن

$$أ و ل^و + ب (و-١) ل^{و-١} + حـ (و-٢) ل^{و-٢} =$$

$$ل^{و-٢} [و (أ ل^٢ + ب ل + حـ) - (ب ل + ٢ حـ)] =$$

$$ل^{و-٢} [و \times صفر - (ب \times \frac{-ب}{٢أ} + ٢ \frac{ب^٢}{٤أ})] = صفر$$

أى أن المعادلة (المتجانسة) قد تحققت وهو المطلوب ٠ ويكون الحل العام هو

$$ض_و = ك_١ ل^و + ك_٢ و ل^و \qquad (٤١/٢)$$

ومن الممكن تعميم هذه الحالة الى حالة وجود ن من الجذور المتساوية فى معادلة من المرتبة ن ، اذ أننا نستطيع الاستعاضة بعدد مساو من الحلول هو:

$$ل^{و} ، و ل^{و} ، و^{٢} ل^{و} ، \ldots ، و^{ن-١} ل^{و}$$

وواضح أن الحل العام فى حالة تساوى جذرين وهو

$$ض_{و} = (ك_{١} + ك_{٢} و) ل^{و}$$

يتأثر بالزمن و مرتين الاولى فى المقدار $ك_{٢}$ و ، والثانية فى المقدار $ل^{و}$:

١ـ فاذا كانت ل > ١ فان الحل يكون تباعديا ومتأثرا بالمقدار $ل^{و}$ الذى يتزايد بشكل أسرع من $ك_{٢}$ و فى النهاية .

٢ـ واذا كانت ل = ١ ، فان الحل يصبح $ك_{١} + ك_{٢}$ و ، أى أن الانحراف عن التوازن يأخذ شكل اتجاه عام مستقيم .

٣ـ صفر < ل < ١ : فى هذه الحالة يؤول العامل $ل^{و}$ الى الصفر ولكن المقدار ك و يتجه الى التزايد (عدديا) بحيث يعوض جانبا من التناقص ولو أن $ل^{و}$ يؤول الى الصفر بدرجة أسرع ـ الامر الذى يجعل $ض_{و}$ تؤول فى النهاية الى الصفر .

ومثل هذه الحالات يمكن بسهولة تمييزها عندما تكون ل سالبة مع ملاحظة أن الحل يكون فى هذه الحالات دوريا .

<u>مثال (٣/٤ـ١)</u> : أوجد حل المعادلة : $ض_{و} = ٤ ض_{و-١} - ٤ ض_{و-٢}$

بمعلومية $ض_{٠} = ٥$ ، $ض_{١} = ٦$

الجذران متساويان : ل = ٢ . فيكون الحل

$$ض_{و} = ك_{١} (٢)^{و} + ك_{٢} و (٢)^{و}$$

بوضع و = صفر ∴ ٥ = $ك_1$

، و = ١ ∴ ٦ = ٢ $ك_1$ + ٢ $ك_2$ ومنها $ك_2$ = ـ ٢

∴ $ض_و$ = (٥ ـ ٢ و) $(٢)^و$

<u>مثال (٣/٤ـ٢)</u> : أوجد حل المعادلة : $ص_و$ = ٢ $ص_{و-١}$ ـ $ص_{و-٢}$ + ١٢

حيث $ص_0$ = ٥ ، $ص_1$ = ٩

المعادلة المتجانسة هى $ض_و$ = ٢ $ض_{و-١}$ ـ $ض_{و-٢}$

والمعادلة المميزة هى $ل^2$ ـ ٢ ل + ١ = صفر ∴ الجذران هما ١

ويكون حل المعادلة المتجانسة هو

$ض_و$ = $ك_1$ $(١)^و$ + $ك_2$ و $(١)^و$ = $ك_1$ + $ك_2$ و

ولايجاد الحل الخاص نلاحظ أن أ + ب + حـ = صفر اذن لانستطيع افتراض أنه يساوى ثابت ع ٠ فنحاول فرضا آخر هو ع و ٠ فنجد أن هذا هو الآخر لايصلح لأن ب + ٢ حـ = ـ ٢ + ٢ × ١ = صفر ٠ ولذلك نحاول الحل ع و٢ ونحسب ع = $\frac{١٢}{ـ٢ + ٤ \times ١}$ = ٦ ٠ فيكون الحل العام هو :

$ص_و$ = $ض_و$ + $ع_و$ = $ك_1$ + $ك_2$ و + ٦ $و^2$

بوضع و = صفر ∴ ٥ = $ك_1$

" و = ١ ٩ = ٥ + $ك_2$ + ٦ ∴ $ك_2$ = ـ ٢

أى أن : $ص_و$ = ٥ ـ ٢ و + ٦ $و^2$

وهى معادلة خط اتجاه عام من الدرجة الثانية ٠

٣/٥ـ الجذور التخيلية :

اذا كان المميز سالبا أى $٤ أ حـ < ب^٢$ كان الجذرين تخيليان :

$$ل_١ = ف + ت ق \qquad ل_٢ = ف - ت ق$$

حيث $ف = \frac{-ب}{٢ أ}$ ، $ق = \frac{\sqrt{٤ أ حـ - ب^٢}}{٢ أ}$

ومن الممكن تحويل هذين الجذرين الى الصورة القطبية باستخدام م ، θ المحسوبين وفقا للمعادلة (٢/١) ، فيصبحان :

$$ل_١ = م (حتا θ + ت حا θ) ، ل_٢ = م (حتا θ - ت حا θ)$$

ويكون المعادلة المتجانسة هو (بافتراض أن الثابتين هما $حـ_١$ ، $حـ_٢$)

$$ض_و = حـ_١ ل_١^و + حـ_٢ ل_٢^و = حـ_١ (م^و \{ حتا θ + ت حا θ \})^و + حـ_٢ (م^و \{ حتا θ - ت حا θ \})^و$$

$$= م^و (حـ_١ \{ حتا و θ + ت حا و θ \} + حـ_٢ \{ حتا و θ - ت حا و θ \})$$

$$\therefore ض_و = م^و (ك_١ حتا و θ + ك_٢ حا و θ) \qquad (٢/٤٢)$$

حيث $ك_١ = حـ_١ + حـ_٢$ ، $ك_٢ = ت (حـ_١ - حـ_٢)$. ولابد أن تكون $ك_١$ ، $ك_٢$ حقيقيتين لأن $ض_و$ حقيقيه . أى أن $حـ_١$ ، $حـ_٢$ كانا أصلا مقدارين مركبين :

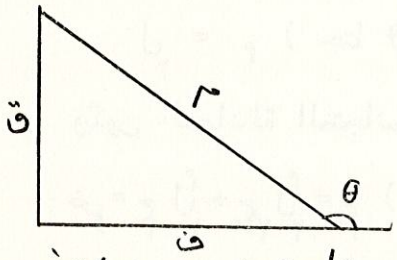
$$حـ_١ = \frac{١}{٢} (ك_١ - ت ك_٢) ، حـ_٢ = \frac{١}{٢} (ك_١ + ت ك_٢)$$

وبمعلومية الحل الخاص $\hat{ض}_و$ ، يكون الحل العام للمعادلة غير المتجانسة هو :

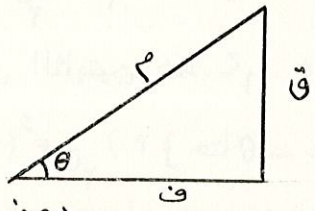
$$ض_و = \hat{ض}_و + م^و (ك_١ حتا و θ + ك_٢ حا و θ) \qquad (٢/٤٣)$$

ويلاحظ أن $\hat{ض}_و$ تحسب بالطرق السابق ذكرها من قبل ، بينما يتوقف الثابتان $ك_١$ ، $ك_٢$ على القيم الابتدائية . أما المعلمتين م ، θ فتتوقفان على المعالم الهيكلية أ ، ب ، حـ وذلك كالآتى :

من الممكن أن نعتبر أن أ > صفر (وذلك بتغيير الاشارة فى طرفى المعادلة اذا لزم) وبذلك فان اشارة ف تتوقف على اشارة ب (وتكون عكسها) . ونظرا لأن ٤ أ حـ > $ب^2$ > صفر ، فان حـ > صفر هى الاخرى . وتكون ق > صفر لأنها = + $\sqrt{\frac{٤ أ حـ - ب^2}{٢ أ}}$ أى أن التمثيل البيانى يقع فى الربعين الأول أو الثانى ، وبذلك تقع الزاوية θ بين صفر ، ط فاذا كانت ب < صفر فان ف > صفر تقع الزاوية θ بين صفر ، $\frac{ط}{٢}$. أما اذا كانت ب > صفر فان ف < صفر تقع الزاوية θ بين $\frac{ط}{٢}$ ، ط



شكل (١٥/ب) - ب > صفر



شكل (١٥/أ) - ب < صفر

ونلاحظ أن ف = $\frac{ل_1 + ل_2}{٢}$ = نصف مجموع الجذرين (أى وسطهما الحسابى) ولايجاد المعلمتين م ، θ

م = $\sqrt{ف^2 + ق^2}$ = $\sqrt{ل_1 ل_2}$ = $\sqrt{\frac{حـ}{أ}}$ = جذر حاصل ضرب الجذرين أى وسطهما الهندسى

حتا θ = $\frac{ف}{م}$ = $\frac{-ب}{٢\sqrt{أ حـ}}$ = $\frac{\text{نصف مجموع الجذرين}}{\text{جذر حاصل ضرب الجذرين}}$ = $\frac{\text{وسطهما الحسابى}}{\text{وسطهما الهندسى}}$ (٤٤/٧)

مثال (٣/٥ـ١) : أوجد حل : $ص_و$ = ـ ٦ $ص_{و-1}$ ـ ٢٥ $ص_{و-2}$ + ٦٤

بمعلومية $ص_0$ = ٧ $ص_1$ = ـ ٢١

لايجاد $\hat{ص}_و$ ، نضع $\hat{ص}_و$ = ع

$$\therefore ع = \frac{٦٤}{١ + ٦ + ٢٥} = ٢$$

ونوجد جذرى المعادلة المميزة :

$$ل^٢ + ٦ ل + ٢٥ = صفر$$

فنلاحظ أن مميزها = ٣٦ ـ ٤ × ١ × ٢٥ = ـ ٦٤ أى أن الجذرين تخيليان .

$$\therefore م = \sqrt{\frac{٢٥}{١}} = ٥ \qquad حتا\ \theta = \frac{-٦}{٢\sqrt{٢٥}} = \frac{-٣}{٥} = -٠ر٦$$

ومعنى هذا أن θ تقع فى الربع الثانى . ولذلك نحسب من الجـــــداول (١٨٠ ـ θ) باستخدام

$$حتا(١٨٠ - \theta) = - حتا\ \theta = ٠ر٦$$

$$\therefore ١٨٠ - \theta = ٥٣ر١ \qquad ومنها\ \theta = ١٢٦ر٩$$

ويكون الحل العام هو

$$ص_و = ٢ + ٥^{و} (ك_١ حتا ١٢٦ر٩ و + ك_٢ حا ١٢٦ر٩ و)$$

وبوضع و = صفر

$$\therefore ٧ = ٢ + (ك_١ × ١ + ك_٢ × صفر) = ٢ + ك_١ \qquad ومنها\ ك_١ = ٥$$

وبوضع ك = ١

$$\therefore -٢١ = ٢ + ٥ (٥ حتا\ \theta + ك_٢ حا\ \theta)$$

$$حيث\ حا\ \theta = \sqrt{١ - ٠ر٣٦} = ٠ر٨$$

$$\therefore -٢١ = ٢ + ٥ (٥ × -٠ر٦ + ك_٢ × ٠ر٨) \qquad ومنها\ ك_٢ = -٢$$

فيكون الحل العام هو

$$ص_و = ٢ + ٥^{و} (٥ \text{ حتا } ١٢٦٫٩ و - ٢ \text{ حا } ١٢٦٫٩ و)$$

مثال (٣/٥ـ٢) : أوجد حل المعادلة $٨ ص_و - ٢١ ص_{و-١} + ٢٦ ص_{و-٢} - ١٠ ص_{و-٣} = صفر$

بمعلومية $ص_٠ = ٩$ ، $ص_١ = ٤$ ، $ص_٢ = -\frac{٧}{٨}$

وبمعلومية أحد الجذور $ل = \frac{٥}{٨}$

باستخدام الجذر $\frac{٥}{٨}$ نستطيع كتابة أحد عوامل المعادلة المميزة بالشكل $(ل - \frac{٥}{٨}) = صفر$

أى $(٨ ل - ٥) = صفر$ ، وبقسمة المعادلة المميزة وهى :

$$٨ ل^٣ - ٢١ ل^٢ + ٢٦ ل - ١٠ = صفر$$

على هذا العامل نجد أنها يمكن كتابتها كالآتى :

$$(٨ ل - ٥) (ل^٢ - ٢ ل + ٢) = صفر$$

وبتحليل العامل الاخر $(ل^٢ - ٢ ل + ٢) = صفر$

والمميز هو $(٤ - ٨) = سالب$ ، فيكون الجذران تخيليين ، ولذلك نحسب

$$م = \sqrt{\frac{٢}{١}} = \sqrt{٢} \text{ ، حتا } \theta = \frac{-(-٢)}{٢\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \quad \therefore \theta = \frac{ط}{٤}$$

$$\therefore ص_و = (٢)^{\frac{و}{٢}} (ك_١ \text{ حتا } \frac{و ط}{٤} + ك_٢ \text{ حا } \frac{و ط}{٤}) + ك_٣ (\frac{٥}{٨})^و$$

وبوضع و = صفر $\quad \therefore ٩ = ك_١ + ك_٣$

وبوضع و = ١ $\quad \therefore ٤ = \sqrt{٢} (ك_١ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + ك_٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}}) + ك_٣ \times \frac{٥}{٨}$

$$\therefore ٣٢ = ٨ ك_١ + ٨ ك_٢ + ٥ ك_٣$$

وبوضع و = ٢ ∴ $-\frac{٧}{٨}$ = ٢ ($ك_١$ × صفر + $ك_٢$ × ١) + $ك_٣$ × $(-\frac{٥}{٨})^٢$

∴ ـ٥٦ = ١٢٨ $ك_٢$ + ٢٥ $ك_٣$

وبحل هذه المعادلات الثلاث معا نجد أن

$ك_١$ = ١ ، $ك_٢$ = ـ٢ ، $ك_٣$ = ٨

ومنها $ص_و$ = ٢ $^{\frac{و}{٢}}$ (حتا $\frac{وط}{٤}$ ـ٢ حا $\frac{وط}{٤}$) + ٨ $(\frac{٥}{٨})^و$

صورة أخرى للحل :

رأينا فى الفصل الأول أن الدوال المثلثية (١/٣١) يمكن كتابتها بالصورة (١/٢٩) باستخدام العلاقات (٣٢) . وعلى ذلك يمكننا أن نكتب

ك = + $\sqrt{ك_١^٢ + ك_٢^٢}$ ، حـ = ظا$^{-١}$ $(\frac{ك_٢}{ك_١})$ (٢/٤٥)

وبذلك يكون الحل هو $ص_و$ = $ك_م$ ^{و} حتا (و θ ـ حـ) (٢/٤٦)

مع ملاحظة اشارة حـ وفقا لاشارة كل من $ك_١$ ، $ك_٢$ فاذا كانت $ك_٢$ موجبة كانت حـ فى أحد الربعين الأول أو الثانى واذا كانت سالبة كانت حـ فى الثالث أو الرابع . وفى نفس الوقت اذا كانت $ك_١$ موجبة كانت حـ فى الربع الأول أو الرابع أما اذا كانت $ك_١$ سالبة كانت حـ فى الثانى أو الثالث .

وفى أى الصورتين نجد أن م ، θ معلمتين هيكليتين . أما $ك_١$ ، $ك_٢$ أو ك ، حـ فتتوقف على القيم الابتدائية .

وعلى هذا فان صفات الحل الدورى تتلخص فى الآتى :

١ـ فترة الدورة تتحدد حسب θ وتساوى $\frac{٢ ط}{\theta}$

٢ـ المرحلة وتتحدد بواسطة حـ لأنها تحدد قيمة ص عندما و = صفر ٠

٣ـ السعة متغيرة وتتحدد السعة الابتدائية وفقا للثابت ك = $\sqrt{ك_١^٢ + ك_٢^٢}$

٤ـ معامل التقارب هو م

مثال (٣/٥ـ٣) : فى المثال (٣/٥ـ١) يمكن تحويل الحل الى الصورة (٤٦)

ك = $\sqrt{٢٥ + ٤}$ = ٣٩ر٥ ونظرا لأن $ك_١$ موجبة ، $ك_٢$ سالبة فان حـ تقع فى الربع الرابع ويكون ظا حـ = $\frac{-٢}{٥}$ = ـ ٤ر٠ ومنها حـ = ـ ٨ر٢١ ٠ أى أن الحل

$ص_و$ = ٢ + $٥^{و}$ (٥ حتا ٩ر١٢٦و ـ ٢ حا ٩ر١٢٦و)

يتحول الى

$ص_و$ = ٢ + ٣٩ر٥ × $(٥)^{و}$ حتا (٩ر١٢٦و + ٨ر٢١)

وتتلخص صفات الدورة فى الآتى :

١ـ الفترة هى $\frac{٣٦٠}{٩ر١٢٦}$ = ٨٤ر٢ وحدة زمنية

٢ـ السعة الابتدائية هى ك = ٣٩ر٥

٣ـ معامل التقارب هو م = ٥ وهو أكبر من الوحدة أى أن الدورة تباعدية ٠

٤ـ المرحلة وتتحدد بقيمة الدالة عند نقطة الصفر وهى $ص_و$ = ٢ + ٣٩ر٥ حتا (ـ حـ)

أى ٢ + ٣٩ر٥ حتا ٨ر٢١ = ٧

أو تتحدد بموقع أول قمة وهى عندما ٩ر١٢٦و + ٨ر٢١ = ٣٦٠ أى و =

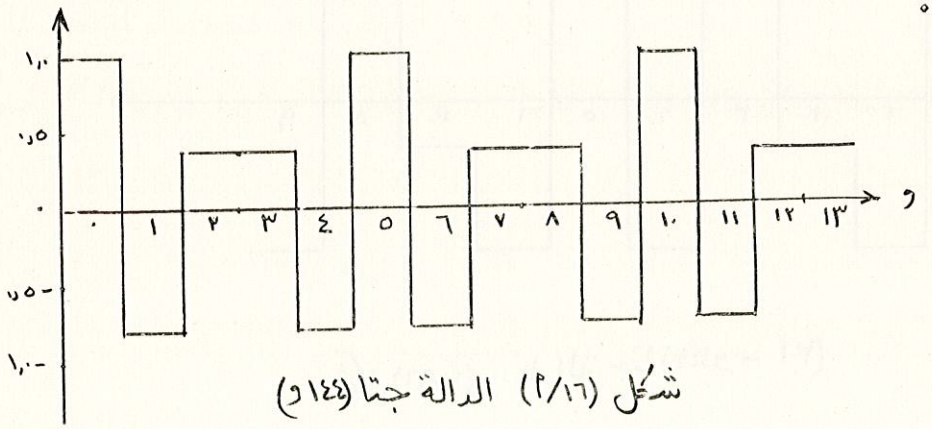
$\frac{٣٦٠ ـ ٨ر٢١}{٩ر١٢٦}$ أى عند و = ٦٧ر٢

عدم انتظام الدورة :

نلاحظ أن منحنى الدالة جتا (و θ ـ حـ) لايلزم أن يكون منتظما بالضبط لكل فترة دورة ، وذلك لأن الفترة لايلزم أن تكون عددا صحيحا ، بينما أن الزمن يقاس فى معادلات الفروق لقيم و الصحيحة فقط . ولذلك فان الانتظام لايظهر الاعند أصغر مضاعف للدورة يكون عددا صحيحا . مثلا اذا كانت θ = ١٤٤ فان طول الدورة يكون ٢٫٥ . ولذلك لايظهر الانتظام الا كل خمس وحدات . ولنفرض أن حـ = صفر . اذن تكون قيمة الدالة كالآتى :

و	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	...
جتا و	جتا صفر	جتا ١٤٤	جتا ٢٨٨	جتا ٧٢	جتا ٢١٦	جتا ٣٦٠	جتا ١٤٤	جتا ٢٨٨	...
=جتا ١٤٤و	١٫٠٠٠	ـ٫٨٠٩	٫٣٠٩	٫٣٠٩	ـ٫٨٠٩	١٫٠٠٠	ـ٫٨٠٩	٫٣٠٩	...

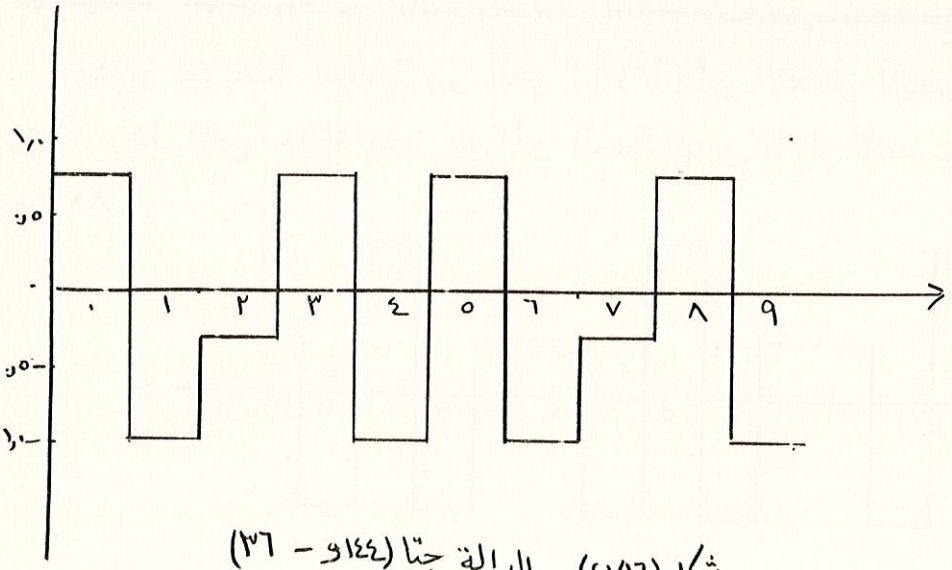
ويتضح من هذا الجدول ومن شكل (١٦/أ) أن الانتظام لايظهر الا كل ٥ وحدات زمنية . كما تتضح حقيقة هامة هى أن السعة تبدو كما لو كانت تقع بين + ١٫٠٠٠ ، ـ ٠٫٨٠٩ .



شكل (١٦/٢) الدالة جتا (١٤٤و)

ومن جهة أخرى فان دخول حـ يغير من الصورة . لنفرض أولا أن حـ = ٣٦ . فى هذه الحالة تكون الدورة طولها ٢٫٥ وحدة وتنتظم كل خمس وحدات ، ولكن يتغير شكلها لأن حـ تنقلها بمقدار $\frac{٣٦}{١٤٤} = \frac{١}{٤}$ وحدة زمن ، ولكن عدم ظهور كسور فى الزمن يغير المجرى الزمنى شكلا وموضعا كما يظهر من شكل (١٦/ب) ومن الجدول الآتى :

و	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٠٠٠
حتا (و θ ـ حـ)	حتا ـ٣٦	حتا ١٠٨	حتا ٢٥٢	حتا ٣٦	حتا ١٨٠	حتا ٣٢٤	حتا ١٠٨	٠٠٠
حتا (١٤٤و ـ ٣٦)	٠٫٨٠٩	ـ٠٫٩٩٠	ـ٠٫٣٠٩	٠٫٨٠٩	ـ١٫٠٠٠	٠٫٨٠٩	ـ٠٫٩٩٠	٠٠٠

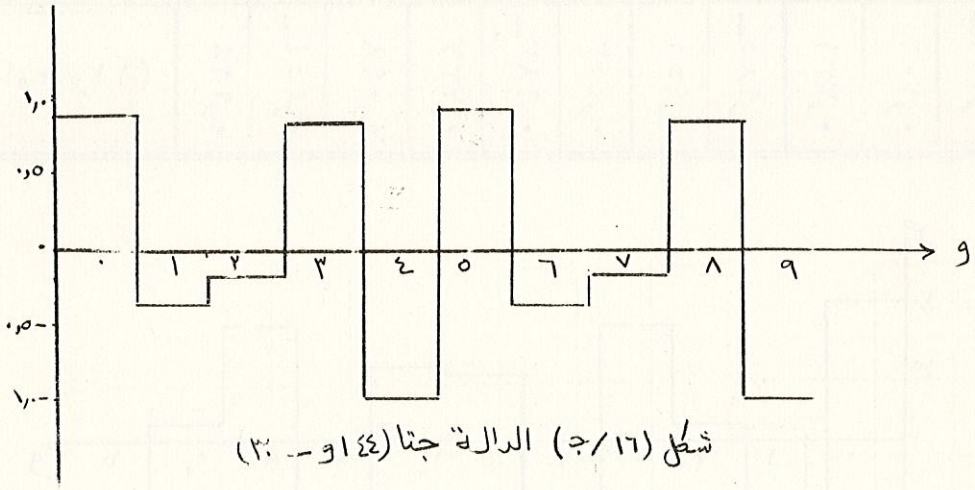


شكل (١٦/ب) - الدالة جتا (١٤٤و - ٣٦)

وأخيرا فان تغير حـ يؤدى الى أحداث تغيرات أخرى مماثلة . فلو فـــرض أن حـ = ٣٠ فان الدالة جتا (١٤٤و ـ ٢٠) تأخذ القيم التالية :

و	صفـر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	....
جتا (وθ ـ حـ)	جتا ـ ٣٠	جتا ١١٤	جتا ٢٥٨	جتا ٤٢	جتا ١٨٦	جتا ٣٠	جتا ١١٤	جتا ٢٥٨	....
جتا (١٤٤و ـ ٣٠)	٠ر٨٦٦	ـ ٠ر٤٠٧	ـ ٠ر٢٠٨	٠ر٧٤٣	ـ ٠ر٩٩٥	٠ر٨٦٦	ـ ٠ر٤٠٧	ـ ٠ر٢٠٨	....

ونلاحظ فى هذه الحالة أن السعة تقع بين ٠ر٨٦٦ ـ ٠ر٩٩٥ أى أنها لاتصل + ١ أو ـ ١



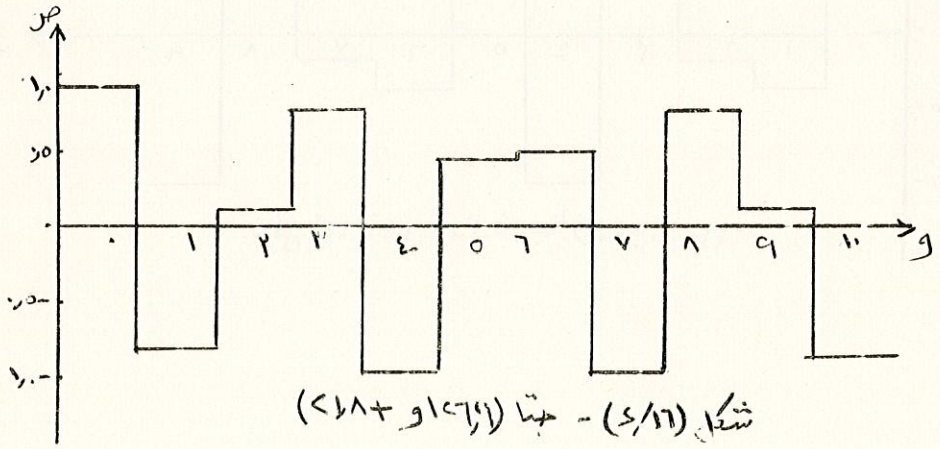
شكل (١٦/ج) الدالة جتا (١٤٤و ـ ٣٠)

ونلاحظ بمقارنة هذه الحالة بالحالة السابقة التى تختلف عنها بستة درجات فقط أن الشكل قريب نوعا ما فى الحالتين ولكن القيم تختلف بصورة واضحة .

وأخيرا فانه فى الحالات التى يكون أصغر مضاعف صحيح لطول الدورة كبيرا فان الدورة تبدو بصورة أقل انتظاما من حيث القيم ومثال ذلك الدالة :

حتا (٩ر١٢٦و + ٨ر٢١) التى ظهرت فى المثال (٣/٥ـ٣) ، كما يتضح من الجدول التالى ومن شكل (١٦/د) :

و	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	....
(و θ ـ حـ)	٨ر٢١	٧ر١٤٨	٦ر٢٧٥	٥ر٤٢	٤ر١٦٩	٣ر٢٩٦	٢ر٦٣	١ر١٩٠	٠ر٣١٧	٩ر٨٣	٨ر٢١٠	....
حتا(٩ر١٢٦و+٨ر٢١)	٠ر٩٢٨	ـ٠ر٨٥٤	٠ر٠٩٨	٠ر٧٣٧	ـ٠ر٩٨٣	٠ر٤٤٣	٠ر٤٥١	ـ٠ر٩٨٥	٠ر٧٣١	٠ر١٠٦	ـ٠ر٨٥٩	....



شكل (١٦/د) - حتا (٩ر١٢٦و +٨ر٢١)

وواضح من هذا الرسم أن الدورة تبدو للعشرة وحدات الاولى بحيث تكون قيمتها موجبة لوحدتين متتالية ثم سالبة فى الثالثة ولكن الصورة تتغير ابتداء من الوحدة الحادية عشر حيث تكون موجبة مرة ثم سالبة مرتين • وبجانب هذا فان القيم لاتبدو متماثلة من دورة لأخرى لأن طول الدورة ليس ٣ وحدات زمنية وانما ٢٫٨٤ كما ذكرنا من قبل •

وعلى ذلك فانه بالرغم من انتظام الدورة بالنسبة للدالة الأصلية التى تفترض أن "و" متغير متصل فان عدم الانتظام يمكن أن يظهر عند تطبيق هذه الدالة بافتراض و متغير منفصل الدورات الفعلية مما يدعو البعض الى رفض تمثيل الدورات الفعلية بمثل هذه الدالة المنتظمة •

٤ ـ المعادلات من المرتبة ن

٤ / ١ ـ الحل الخاص

المعادلة الخطية من المرتبه ن بمعاملات ثابته هـى :

$$\text{أ}_{\text{٠}}\,\text{ص}_{\text{و}} + \text{أ}_{\text{١}}\,\text{ص}_{\text{و}-\text{١}} + \cdots + \text{أ}_{\text{ن}}\,\text{ص}_{\text{و}-\text{ن}} = \text{د}(\text{و}) \qquad (٤٧/٢)$$

أى

$$\sum_{\text{ر}=\text{٠}}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ر}}\,\text{ص}_{\text{و}-\text{ر}} = \text{د}(\text{و})$$

أو

$$\sum_{\text{ر}=\text{٠}}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ر}}\,\text{ط}^{\text{ر}}\,\text{ص}_{\text{و}} = \text{د}(\text{و})$$

حيث ط هى عامل الأبطاء ٠ ويمكننا الحصول على الحل الخاص وحساب الانحرافات عنه :

$$\text{ص}_{\text{و}} = \text{ص}^{\text{٨}}_{\text{و}} + \text{ض}_{\text{و}} \quad ، \quad \text{ص}^{\text{٨}}_{\text{و}} = \text{ع} \times \text{و}^{\text{هـ}} \qquad (٤٨/٢)$$

حيث هـ هى أصغر الأعداد (صفر ، ١ ، ٠٠٠ ، ن) التى تجعل الدوال الآتيه فى المعاملات ≠ صفر

$$\sum_{\text{ر}=\text{٠}}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ر}}\,(\text{ط}^{\text{ر}}\,\text{و}^{\text{هـ}}) \neq \text{صفر} \qquad (\text{هـ} = \text{صفر} ، \text{١} ، \text{٠٠٢}) \qquad (٤٩/٢)$$

أى

$$\sum_{\text{ر}=\text{٠}}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ر}}\,(\text{و}-\text{ر})^{\text{هـ}} \neq \text{صفر}$$

والطرف الأيمن هو : $\sum_{\text{س}=\text{٠}}^{\text{هـ}} \binom{\text{هـ}}{\text{س}}\,\text{و}^{\text{هـ}-\text{س}} \left[\sum_{\text{ر}=\text{٠}}^{\text{ن}} (-\text{١})^{\text{س}}\,\text{ر}^{\text{س}}\,\text{أ}_{\text{ر}}\right]$

ونظرا لأن س تتغير بين صفر ، هـ ، ولأن المقادير $\binom{\text{هـ}}{\text{س}}$ و$^{\text{هـ}-\text{س}}$ لا تساوى الصفر فأن الشرط السابق يعنى أن المقدار بين قوسين مربعين لايساوى الصفر ٠

وهذا يتطلب أن أحد حدوده على الأقل لايساوى الصفر (بشرط إن المجموع $\neq$ صفر)
ولكن عندما تتغير س من صفر الى هـ فان جميع الحدود ماعدا الأخير تكون ظهرت،
للمقدار السابق أى بأخذ هـ ـ ١ ٠ وعلى ذلك نكتفى بحساب الحد الأخير لجميع قيم
هـ (= ٠ ، ١ ، ٢ ، ٠٠٠٠) وهو

$$(\text{هـ}) \; \text{و}^{\text{هـ}-\text{هـ}} \left[\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} (-1)^{\text{هـ}-\text{ر}} \, \text{هـ}_{\text{ر}} \, \text{أ}_{\text{ر}} \right] = \left[\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} (-1)^{\text{هـ}-\text{ر}} \, \text{هـ}_{\text{ر}} \, \text{أ}_{\text{ر}} \right]$$

ونأخذ أصغر قيمة تجعل هذا المقدار $\neq$ صفر ٠ أى أن الشرط هو :

أخذ أصغر قيمة هـ تجعل $\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} (-1)^{\text{هـ}-\text{ر}} \, \text{هـ}_{\text{ر}} \, \text{أ}_{\text{ر}} \neq$ صفر (هـ $\leq$ ن) (٢/٥٠)

ويكون الحل الخاص هو :

$$\text{ص}_{\text{و}}^{\text{هـ}} = \text{ع} \times \text{و}^{\text{هـ}} \quad \text{، حيث ع} = \frac{\text{د(و)}}{\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} (-1)^{\text{هـ}-\text{ر}} \, \text{هـ}_{\text{ر}} \, \text{أ}_{\text{ر}}} \qquad (٢/٥١)$$

وعلى ذلك نحسب المقادير المتتالية

$$(\text{أ}_0 + \text{أ}_1 + \text{أ}_2 + \cdots + \text{أ}_{\text{و}} + \cdots\cdots + \text{أ}_{\text{ن}})$$

$$، \; -(\text{أ}_1 + 2\text{أ}_2 + \cdots\cdots + \text{و}\,\text{أ}_{\text{و}} + \cdots\cdots + \text{ن}\,\text{أ}_{\text{ن}})$$

$$، \; +(\text{أ}_1 + 2^2\text{أ}_2 + \cdots + \text{و}^2\text{أ}_{\text{و}} + \cdots + \text{ن}^2\text{أ}_{\text{ن}})$$

$$، \; (-1)^{\text{هـ}}(\text{أ}_1 + 2^{\text{هـ}}\text{أ}_2 + \cdots + \text{و}^{\text{هـ}}\text{أ}_{\text{و}} + \cdots\cdots + \text{ن}^{\text{هـ}}\text{أ}_{\text{ن}})$$

$$، \; (-1)^{\text{ن}}(\text{أ}_1 + 2^{\text{ن}}\text{أ}_2 + \cdots\cdots + \text{و}^{\text{ن}}\text{أ}_{\text{و}} + \cdots\cdots + \text{ن}^{\text{ن}}\text{أ}_{\text{ن}})$$

ونقف عند أول مقدار $\neq$ صفر فنقسم عليه د(و) مع الاحتفاظ بالأشارة المبينة وبذلك نحصل على قيمة ع مع ملاحظة أن الحل الخاص هو ع × $\text{و}^{\text{هـ}}$ حيث هـ هى ترتيب المقدار الذى استخدمناه فى الحساب ٠

٤ / ٢ — الحل العام :

باستخدام الأنحرافات عن الحل الخاص تتحول المعادلة (٤٧) الى الصورة المتجانسة

$$\text{أ}_{٠}\text{ض}_{٠} + \text{أ}_{١}\text{ض}_{١} + \cdots + \text{أ}_{\text{ن}}\text{ض}_{\text{ن}} = \text{صفر} \qquad (٢ / ٥٢)$$

أى

$$\left(\sum_{\text{ر}=٠}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ر}}\, \text{ط}^{\text{ن}-\text{ر}}\right) \text{ط}^{\text{ن}}\, \text{ض}_{\text{ن}} = \text{صفر}$$

وتكون المعادلة المميزة هى

$$\sum_{\text{ر}=٠}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ر}}\, \text{ل}^{\text{ن}-\text{ر}} = \text{صفر} \qquad (٢ / ٥٣)$$

وهذه المعادلة لها ن جذور بعضها حقيقى وعدده ح $\leq$ ن والباقى يكون خ من أزواج الجذور التخيلية المترافقة ومعنى هذا أن ن = ح + ٢خ . وبذا يكون الحل العام للانحرافات هو

$$\text{ض}_{\text{و}} = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ك}_{\text{ر}}\, \text{ل}_{\text{ر}}^{\text{و}} \qquad (٢ / ٥٤)$$

ومنها يكون الحل العام هو :

$$\text{ض}_{\text{و}} = \text{ض}_{\text{و}}^{٨} + \sum_{١}^{\text{ن}} \text{ك}_{\text{ر}}\, \text{ل}_{\text{ر}}^{\text{و}}$$

ويتوقف المسار الزمنى للانحرافات على الجذر الطاغى أى ذى أكبر قيمة . فاذا كان $|\text{ل}_{١}|$ هو الأكبر فان الحل يكون تباعدى إذا كان $|\text{ل}_{١}| > ١$ ويتوقف مسار ض على المقدار $\text{ك}_{١}\text{ل}_{١}^{\text{و}}$ ، الذى يكون غير دورى اذا كان $\text{ل}_{١}$ موجبا ، ودورى اذا كان سالبا . أما بالنسبة للجذور المركبة فان الحد الطاغى هو زوج الجذور الذى قيمته المطلقة م أكبر ما يمكن فاذا كانت م أكبر من الوحدة كان الحل الدورى تباعديا ، والعكس بالعكس .

وبالرغم من أن نتائج الحالة النونية تعتبر تعميما مباشرا لحالتى ن = ١ ، ن = ٢ ، فان ارتفاع الدرجة عن ٢ يجعل من المتعذر ايجاد الجذور بالطرق

الجبرية ولابد من الالتجاء الى الوسائل الحسابية المعروفة لايجاد القيم العددية للجذور . ولكن نلاحظ أنه اذا كان :

$$(أ_{٠} + أ_{١} + أ_{٢} + \cdots + أ_{ن}) = صفر$$

فان أحد الجذور يساوى الوحدة وبذلك يكون الحد المناظر خلوا من و (أى حد مطلق) ومن القسم السابق نجد أن الحل الخاص يأخذ الشكل $ع_{و}$. أى أن الحل العام يحتوى على دالة خطية فى الزمن (ب + $ع_{و}$) . وبالمثل اذا كانت :

$$(أ_{١} + ٢ أ_{٢} + ٣ أ_{٣} + \cdots + ن أ_{ن}) = صفر هى الأخرى$$

كان الجذر ل = ١ متكررا مرتين . ولذلك فان كل من ١ ، و ويكونان جذريين فاذا أضفنا الى ذلك أن الحل الخاص هو $ع_{و}^{٢}$ فى هذه الحالة فان الحل النهائى يحتوى على معادلة من الدرجة الثانية فى و : (ب + $ب_{١}$ و + $ع_{و}^{٢}$) حيث الثابتين ب ، $ب_{١}$ يحسبان من القيم الابتدائية بينما ع تحسب من (١ ، ٥) .

وعلى العموم عندما تتوفر الشروط التى تجعل الحل الخاص من الدرجة هـ فى و فان الجذر ١ يظهر هـ من المرات ويحتوى الحل العام على معادلة من الدرجة هـ فى الزمن . بالشكل

$$(ب + ب_{١} و + \cdots + ب_{هـ-١} و^{هـ-١} + ع_{و}^{هـ})$$

أما بقية الجذور فتختلف عن الوحدة و يكون عددها (ن ـ هـ) وتأخذ الشكل المعتاد .

ومن جهة أخرى فانه اذا كان

$$أ_{٠} - أ_{١} + أ_{٢} - أ_{٣} + \cdots + (-١)^{ن} أ_{ن} = صفر$$

فان أحد الجذور = ـ١ ، ويحتوى الحل العام على مقدار ثابت تتغير اشارته بصورة تبادلية بالمثل اذا كانت المقادير :

$$-أ_1 + (٢)^{ر} أ_2 - (٣)^{ر} أ_3 + \cdots + (-١)^{ن} (ن)^{ر} أ_ن = صفر$$

لجميع قيم ر = ١ ، ٢ ، ٠٠٠٠ م فان الجذر (ـ١) يكون متكررا (م + ١) من المرات .

٣/٤ـ استخدام عوامل التحويل لايجاد الحل الخاص :

عرفنا فى البند (٢/١) عوامل التحويل ك ، ل ، ط ، ورأينا أن هذه العوامل يمكن معالجتها بنفس طرق معالجة المقادير الجبرية العادية من حيث الجمع والطرح والضرب والقسمة والرفع الى أسس . وسوف نضيف هنا بعض القواعد التى تسهل ايجاد الحل الخاص لأشكال معينة للدالة د (و) . ونلاحظ أولا أن معادلة الفروق يمكن كتابتها بالصورة :

$$ح(ط)\, ص_و = د(و) \quad \text{حيث } ح(ط) = \sum_{ر=0}^{ن} أ_ر\, ط^ر \qquad (٥٦/٢)$$

أى أن ح (ط) كثيرة حدود من الدرجة ن فى ط . فاذا عوضنا عن $ص_و$ بالحل الخاص $ص^*_و$ فان

$$ح(ط)\, ص^*_و = د(و) \quad \therefore \; ص^*_و = \frac{د(و)}{ح(ط)} \qquad (٥٧/٢)$$

هذه الصورة الرمزية للحل الخاص تقتضى منا أن نعرف عمليات ضرب دالة مثل د (و) فى دالة رمزية مثل ح (ط) أو قسمتها عليها .

لنفرض أن لدينا دالة ف (ط) فى المحول ط هى عبارة عن كثيرة حدود ح (ط) فى ط أو النسبة بين كثيرتى حدود $ف(ط) = \frac{ح_1(ط)}{ح_2(ط)}$. فى هذه الحالة يمكن أن نكتب $\frac{١}{ح_2(ط)}$ فى شكل متسلسلة لانهائية فى ط تضرب فى $ح_1(ط)$ وبذا تكون ف (ط) نفسها متسلسلة لانهائية فى ط . فاذا كانت

$ح_1(ط) = (ب_0 + ب_1 ط + \cdots + ب_ن ط^ن)$ بينما $ح_2(ط) =$

$(حـ_0 + حـ_1 ط + \cdots + حـ_م ط^م)$ فان $\frac{١}{ح_2} = \frac{١}{حـ_0} - \frac{أ_1}{أ_0^2} ط + \frac{(أ_1^2 - أ_0 أ_2)}{أ_0^3} ط^2 + \cdots$

وبالضرب نجد أن :

$$ف(ط) = ح_1(ط) \times \frac{1}{ح_2(ط)} = أ_0 + أ_1 ط + أ_2 ط^2 + \cdots \text{ الى } \infty \qquad (٢/٥٨)$$

ومن الممكن جعل ف (ط) محدودة بأخذ قيمة افتراضية للمقدار ط أقل من الوحدة . ويلاحظ أن المعاملات $أ_0$ ، $أ_1$ ، $أ_2$ .... دوال فى المعاملات $ب_ر$ ، $حـ_ر$ فاذا عوضنا عن ط فى الدالة ف بمقدار جبرى مثل م فان :

$$ف(م) = أ_0 + أ_1 م + أ_2 م^2 + \cdots\cdots = \frac{ح_1(م)}{ح_2(م)} \qquad (٢/٥٨)$$

ومن الممكن أيضا أن نستغل العلاقة (٦) بين ط ، ∆ لتحويل ف (ط) الى دالة أخرى ق (∆) بالتعويض فى (٥٨) بالمقدار (١ — ∆) عن ط بعد تحويل $ح_1$ ، $ح_2$ الى كثيرتى حدود فى ∆ :

$$ف(ط) = \frac{\sum_{ر=0}^{\infty} ب'_ر ∆^ر}{\sum_{هـ=0}^{\infty} حـ'_هـ ∆^هـ} = أ'_0 + أ'_1 ∆ + أ'_2 ∆^2 + \cdots \qquad (٢/٥٩)$$

مثال (٤/٣ — ١) : لنفرض أن $ح_1 = ٢ + ط - ٢ط^2$ ، $ح_2 = ١ - ٢ط$

$$\therefore \frac{1}{ح_2} = ١ + ٢ط + ٤ط^2 + ٨ط^3 + \cdots$$

$$\text{ومنها } ف(ط) = \frac{ح_1}{ح_2} = \frac{٢ + ط - ٢ط^2}{١ - ٢ط} = (٢ + ط - ٢ط^2)(١ + ٢ط + ٤ط^2 + \cdots)$$

$$= ٢ + ٥ط + ٢ \sum_{ر=2}^{\infty} (٢ط)^ر$$

فاذا عوضنا عن ط بدلالة ∆

$$\therefore ف(ط) = ق(∆) = \frac{١ + ٣∆ - ٢∆^2}{-(١ - ٢∆)} = \frac{٢∆^2 - ٣∆ - ١}{١ - ٢∆}$$

$$= -(١ + ٥∆ + ٢ \sum_{ر=2}^{\infty} (٢∆)^ر)$$

وعلى هذا فاننا نستطيع أن نعتبر ف متسلسلة بقوى تصاعدية فى ط ٠ وبالمثل فان ق هى الأخرى متسلسلة بقوى تصاعدية فى ط ٠ وسنعالج الآن بعض صور حاصل الضرب ف (ط) × د (و) :

١ـ د (و) = $م^{و}$ حيث م ثابت ٠

ف (ط) $م^{و}$ = ف ($م^{-١}$) $م^{و}$ (٢/٦٠)

أى أننا نكتب ف بدلالة $\frac{١}{م}$ عوضا عن ط ٠ لاثبات ذلك نلاحظ أن $ط^{ن}$ تعنى ابطاء الزمن و بمقدار ن وحدات زمنية ٠

∴ ف (ط) $م^{و}$ = ($أ_{٠}$ + $أ_{١}$ ط + $أ_{٢}$ $ط^{٢}$ + ٠٠٠٠) $م^{و}$

= $أ_{٠}$ $م^{و}$ + $أ_{١}$ $م^{و-١}$ + $أ_{٢}$ $م^{و-٢}$ + ٠٠٠٠

= ($أ_{٠}$ + $أ_{١}$ $م^{-١}$ + $أ_{٢}$ $م^{-٢}$ + ٠٠٠٠) $م^{و}$

= ف ($م^{-١}$) $م^{و}$

بالمثل اذا كانت د (و) = ح $م^{و}$ حيث ح هى الأخرى ثابت

∴ ف (ط) ح $م^{و}$ = ح $م^{و}$ ف ($م^{-١}$) (٢/٦٠)

٢ـ د (و) = $س_{و}$ $م^{و}$ حيث س متغير بينما م ثابت

ف (ط) $س_{و}$ $م^{و}$ = $م^{و}$ ف ($\frac{ط}{م}$) $س_{و}$ (٢/٦١)

وعلى هذا فان الطرف الأيسر مايزال يحتوى على ط ولذا يعنى ادخال فترات ابطاء على المتغير $س_{و}$ بينما $م^{و}$ تكون عاملا مشترك ، ولذلك كتبناها سابقة على ف التى يستعاض فيها بخارج القسمة $\frac{ط}{م}$ عن ط ٠ ولاثبات ذلك نلاحظ أن

$$ف(ط)\, س_و\, م^و = (أ_٠ + أ_١ ط + أ_٢ ط^٢ + \cdots)\, س_و\, م^و$$

$$= أ_٠ س_و م^و + أ_١ س_{و-١} م^{و-١} + أ_٢ س_{و-٢} م^{و-٢} + \cdots$$

$$= م^و (أ_٠ س_و + أ_١ س_{و-١} م^{-١} + أ_٢ س_{و-٢} م^{-٢} + \cdots)$$

$$= م^و (أ_٠ + أ_١ ط م^{-١} + أ_٢ ط^٢ م^{-٢} + \cdots)\, س_و$$

$$= م^و \times ف\left(\frac{ط}{م}\right) س_و$$

٣ـ <u>د (و) = $و^{هـ}$</u> : حيث هـ ثابت صحيح . أى أن د (و) دالة من الدرجة هـ فى و ومن المعلوم أن الفرق رقم هـ لمثل هذه الدالة يكون مقدار ثابت أى أن الفرق رقم (هـ +١) والفروق التى من درجات أعلى كلها أصفار . لذلك فمن الأفضل تحويل ف (ط) الى ق (ك) أى الى كثيرة حدود فى ك بحيث نكتفى منها بالحدود التى فيها أس ك يساوى أو يقل عن هـ .

$$\therefore ف(ط)\, و^{هـ} = ق(ك)\, و^{هـ} = ب_٠ + ب_١ و + \cdots + ب_{هـ} و^{هـ} \qquad (٦٢/٢)$$

ومن الممكن تعميم هذه القاعدة بسهولة الى الحالة التى فيها د (و) = $\sum_{ر=٠}^{هـ} و^ر$

٤ـ <u>اذا كانت ف (ط) = $\frac{١}{ح(ط)}$</u> فان من السهل تحويل العلاقات السابقة بدلالة ح :

$$\frac{١}{ح(ط)} م^و = \frac{١}{ح\left(\frac{ط}{م}\right)} م^و \qquad (٦٠/٢)$$

$$\frac{١}{ح(ط)} س_و م^و = م^و \times \frac{١}{ح\left(\frac{ط}{م}\right)} س_و \qquad (٦١/٢)$$

$$\frac{١}{ح(ط)} و^{هـ} = ق(ك)\, و^{هـ} \qquad (٦٢/٢)$$

وفى هذه الحالة الأخيرة نحول ح (ط) الى كثيرة حدود فى ك ثم نوجد

المقلوب يقوى تصاعديه فى Δ حتى القوة هـ ونهمل الباقى . كذلك يمكن أن نستنتج أنه اذا كانت ك ثابت فان :

$$\frac{1}{ح(ط)}\, ك\, م^{و} = \frac{ك}{ح(\frac{1}{م})}\, م^{و}$$

$$\therefore \frac{1}{ح(ط)}\, ك = \frac{ك}{ح(1)} = \frac{ك}{ح\, م^{و}} \qquad (٦٣/٢)$$

وهذه الصورة الأخيرة هى فى الواقع طريقة حساب الحل الخاص عندما تكون د (و) = ثابت ويمكن استخدام القواعد السابقة فى ايجاد الحل الخاص باعتبار أن ف(ط) هى $\frac{1}{ح(ط)}$ حيث ح (ط) هى كثيرة الحدود فى ط المعرفة فى (٥٦) ، أى أن (٥٧) تنطبق فعلا (بشرط أن يكون المقام $\neq$ صفر) .

مثال (٤/٣ـ٢) : فى المثال (٢/٥ـ١) يمكن كتابة المعادلة كالآتى :

$$(1 - \frac{1}{3}ط)\, ص_{و} = 3 + 2و + و^{2}$$

$$\therefore ح(ط) = (1 - \frac{1}{3}ط) = \frac{1}{3}(2 + \Delta)$$

$$\therefore \frac{1}{ح(ط)} = 3(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{8}\Delta^{2} - \frac{1}{16}\Delta^{3} + \cdots\cdots)$$

$$\text{ويكون } ص_{و} = \frac{3 + 2و + و^{2}}{\frac{1}{3}(2 + \Delta)} = 3(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{8}\Delta^{2} - \cdots\cdots)(3 + 2و + و^{2})$$

ونلاحظ أن Δ ٣ = صفر ، Δو = ١ ، Δ^{2}و = صفر ، Δ $و^{2}$ = ٢ و ـ ١

، Δ^{2} $و^{2}$ = ٢ ، Δ^{3} $و^{2}$ = صفر

$$\therefore ص_{و}^{8} = 3\left[(\frac{3}{2}) + (و - \frac{1}{4} \times 2 \times 1) + (\frac{1}{2}و^{2} - \frac{1}{4} \times 2و + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{8} \times 2)\right]$$

$$= ٣ \left[\left(\frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤}\right) + \left(و - \frac{١}{٢} و\right) + \frac{١}{٢} و^{٢} \right]$$

$$= \frac{٩}{٢} + \frac{٣}{٢} و + \frac{٣}{٢} و^{٢}$$ كما وجدنا من قبل

مثال (٤/٣ـ٣) : أوجد الحل الخاص للمعادلة : $ص_{و} + أ ص_{و-١} + ب ص_{و-٢} = حـ_{و}$

$$ح(ط) = (١ + أ ط + ب ط^{٢})$$

$$\therefore ح\left(\frac{١}{حـ}\right) = \left(١ + أ \times \frac{١}{حـ} + ب \times \frac{١}{حـ^{٢}}\right) = \frac{١}{حـ^{٢}} (حـ^{٢} + أ حـ + ب)$$

ويكون الحل الخاص هو

$$ص^{٨}_{و} = \frac{حـ_{و}}{ح(ط)} = \frac{حـ_{و}}{ح\left(\frac{١}{حـ}\right)} = \frac{حـ_{و+٢}}{حـ^{٢} + أ حـ + ب}$$

ويمكن التأكد من صحة هذا الحل بالتعويض فى الطرف الأيمن من المعادلة الأصلية فنحصل على

$$\frac{١}{حـ^{٢} + أ حـ + ب} (حـ_{و+٢} + أ حـ_{و+١} + ب حـ_{و}) = حـ_{و}$$

مثال (٤/٣ـ٤) :أوجد الحل الخاص للمعادلة :

$$١٠ ص_{و} - ١٨ ص_{و-١} + ١٣ ص_{و-٢} - ٤ ص_{و-٣} = و^{٢} + ١٠ و + ٥$$

$$\therefore ص^{٨}_{و} = \frac{و^{٢} + ١٠ و + ٥}{١٠ - ١٨ ط + ١٣ ط^{٢} - ٤ ط^{٣}} = \frac{و^{٢} + ١٠ و + ٥}{١ + ٤ \Delta + \Delta^{٢} + ٤ \Delta^{٣}}$$

$$= (١ - ٤ \Delta + ١٥ \Delta^{٢} - ٦٠ \Delta^{٣} + \cdots)(و^{٢} + ١٠ و + ٥)$$

$$= (و^{٢} - ٨ و + ٤ + ٣٠) + (١٠ و - ٤٠) + ٥$$

$$= و^{٢} + ٢ و - ١$$

ومن الممكن الحصول على هذه النتيجة بافتراض أن هذا الحل هو $ص^{٨}_{و} = أ + ب و + حـ و^{٢}$ ثم التعويض فى الطرف الأيمن لمعادلة الفروق ثم مساواة المعاملات المتساوية فنحصل على ثلاثة معادلات فى أ ، ب ، حـ نحلها كما فعلنا فى بند (٢/٥) .

ملحوظة : من الممكن أن نصوغ العلاقات السابقة بدلالة المحول ل الخاص بالتعجيل لأنه اذا كانت ح (ط) من الدرجة ن فانه من الممكن كتابتها بدلالة ل كالآتى :

$$ح(ط) = \text{مجـ}^{ن}\, أ_{ر}\, ط^{ر} = \text{مجـ}^{ن}\, أ_{ر}\, ل^{-ر} = \frac{\text{مجـ}^{ن}\, أ_{ر}\, ل^{ن-ر}}{ل^{ن}} = \frac{ح'(ل)}{ل^{ن}} \qquad (٢/٦٤)$$

$$\therefore \quad ص^{٨}_{و} = \frac{د(و)}{ح(ط)} = \frac{ل^{ن}}{ح'(ل)}\, د(و) \qquad (٢/٦٥)$$

وحيث أن ط = $ل^{-١}$:

$$\therefore \quad \frac{ل}{ح'(ل)}\, م_{و} = \frac{م_{و+ن}}{ح'(م)} \qquad (٢/٦٦)$$

وبالمثل بالنسبة لباقى العلاقات

م . سعيد