# الجمهورية العربية المتحدة

## معهد التخطيط القومي

مذكـرة رقـم ٩١٣،

(٣) محاضرات فى التحليـل الكمـى

اعـداد

د. يوسف نصر الديـن محمـد

يوليـة سنة ١٩٦٩


القاهرة

٣ شارع محمد مظهر - الزمالك

الآراء التي وردت في هذه المذكـــــــــــــــرة
تمثل رأي الكاتب ولاتمثل رأي المعهد ذاتـــــــــــه

# الباب الأول

## نبذة نظرية الاحتمالات :

عند رمى قطعة من النقود فانه يقال أن ٥٠٪ نرى وجه الشعار ومعنى ذلك أنه عند رمى قطعة النقود (١٠٠) مرة فان عدد مرات ظهور الشعار يكون ٥٠ مرة وقد يحدث أن يكون عدد ظهور الشعار أقل أو أكثر من هذا العدد ولكن عند تكرار الرمى مئات المرات عند نفس الظروف فان العدد يكون فى المتوسط (٥٠) مرة .

وتسمى نسبة عدد ظهور الشعار الى العدد الكلى من المحاولات (الرمى) بالتكرار النسبى فمثلا اذا كانت عدد مرات الرمى ن وعدد الظهور هو م فان

$$\text{التكرار النسبى} = \frac{\text{عدد مرات الظهور}}{\text{عدد المحاولات}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$$

ونعرف الاحتمال بأنه العلاقة بين عدد المرات الظهور الى عدد المحاولات عندما يكون عدد المحاولات كبيرا .

وتكتب

$$\text{الاحتمال} = \text{نهاية } \frac{\text{م}}{\text{ن}}$$ ( عندما ن تؤول الى مالا نهاية )

أى أن

$$\text{ح} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{\text{م}}{\text{ن}}$$

ونلاحظ أن ح تنحصر ما بين صفر والواحد الصحيح

**التوزيعات والمنحنيات التكرارية :**

تنقسم الظواهر التى تكون محل البحث الى قسمين :

(أ) ظواهر كمية بمعنى أنها تقاس بكميات عددية مثل الطول والوزن والدخل والانفاق ٠٠٠٠ الخ

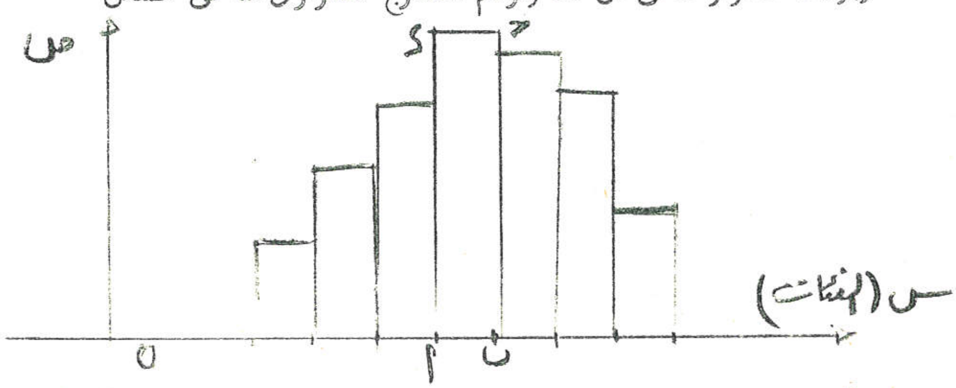
(ب) ظواهر نوعية : مثل الحالات الاجتماعية والتعليمية والصحية ٠

والظاهرة محل البحث والدراسة أيا كانت كمية أو نوعية تسمى بالمتغير العشوائى أذ لا يمكن تحديد لها قيمة مسبقا وذلك لانها يعتمد على كثير من الظروف المحيطة بها والتى ليس فى وسعنا معرفتها ٠

فمثلا فى مستشفى الولادة فى يوم واحد يولد ١٠٠ طفل فان عدد الذكور أو عدد الاناث يأخذ قيم عشوائية بين ( ١ ، ١٠٠ ) أى ١ ، ٢ ، ٣ ، ٠٠٠ كما أن عدد الاطفال كمية عشوائية أيضا ٠

ومثال آخر فان عدد المكالمات الواردة على لوحة التليفونات متغير عشوائى لا يمكن تحديد قيمته فى أى لحظة ٠

نفرض أن المتغير س تأخذ عدة قيم مختلفة فى حالات مختلفة فمثلا ( فى حالة أعمار مجموعة معينة من الاشخاص ) فان س تمثل عمر الشخص بالسنوات ونرى أن قيمة س تتغير من شخص لآخر ولكن اختلاف قيم س لا يمنع أن يكون بعض الاشخاص متقاربين فى العمر تقسم المدى بين الاعمار الى فئات ويوجد التكرارات فى كل فئة ونرسم المدرج التكرارى كما فى الشكل



ونلاحظ أن

(١) ارتفاع المستطيل يتوقف على بعده عن المحور السيني أي أن الارتفاع يتغير مع تغير قيمة س

(٢) مساحة كل مستطيل يمثل عدد القيم الواقعة بين مبدأ ونهاية الفترة المقام عليها المستطيل ٠

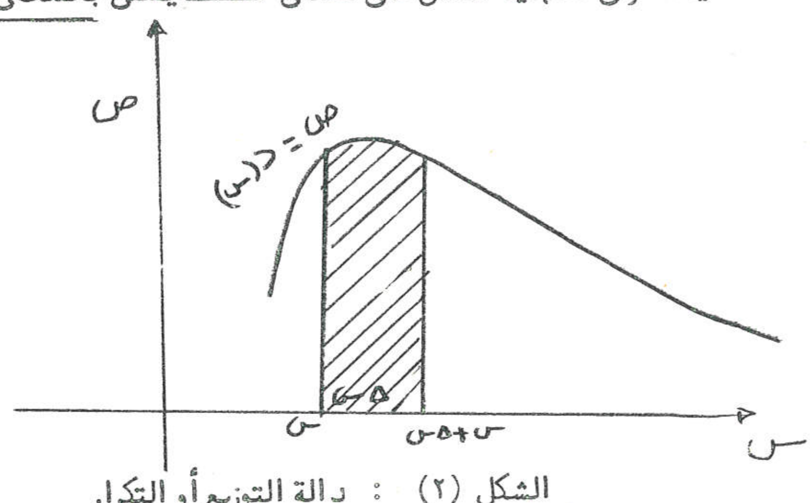
(٣) مجموع مساحة المستطيلات كلها تمثل عدد القيم كلها ن

$$ح = \frac{\text{مساحة المستطيل أ ب حـ د}}{\text{مساحة المستطيلات كلها}} = \text{احتمال أن قيمة س تقع بين داخل الفترة أ ب}$$

## المنحنى التكراري :

نفرض أن مبدأ الفترة هو س ونهايتها س + $\Delta$ س أي أن طول الفترة $\Delta$ س ونفرض أنها صغيرة وموجبة وهي تمثل عرض المستطيل ٠

نفرض أن $\Delta$ س تصغر فنجد أن المستطيلات المتجاورة تضيق وبذلك تتلاشى أركان المستطيلات وفي النهاية نحصل على منحنى ما يسمى بالمنحنى التكراري كما في الرسم ٠




الشكل (٢) : دالة التوزيع أو التكرار

ونلاحظ أن القيم المحصورة بين ( س ، س + $\Delta$ س) ممثلة بمساحة الشريط الضيق الذي عرضه $\Delta$ س وارتفاعه ص ويبعد عن المحور الصادي بمقدار س وتكون المساحة التي تحت المنحنى تمثل عدد القيم كلها ولتكن ن ٠

نفرض أن $ص = د(س)$ دالة التوزيع أو التكرار وعلى ذلك فان المساحة التى تحت المنحنى تمثل $ن$ وهى تساوى

$$ن = \int ص \cdot ءس$$

وعلى ذلك فان

$$ح = \frac{\text{مساحة الشريط}}{\text{المساحة التى تحت المنحنى}} = \frac{ص \; \Delta س}{\int ص \cdot ءس} = \frac{ص \; \Delta س}{ن} = \text{احتمال وقوع}$$

المتغير $س$ من $(س ، س + \Delta س)$

ونلاحظ أن $ح$ تنحصر من الصفر والواحد حيث أن

$$\int \frac{ص \, ءس}{ن} = 1$$

وتسمى الدالة $\frac{ص}{ن}$ بدالة الاحتمال

ونلاحظ أن الفرق بين دالتى التكرار والاحتمال هو وجود المقدار $ن$ فى المقام ٠

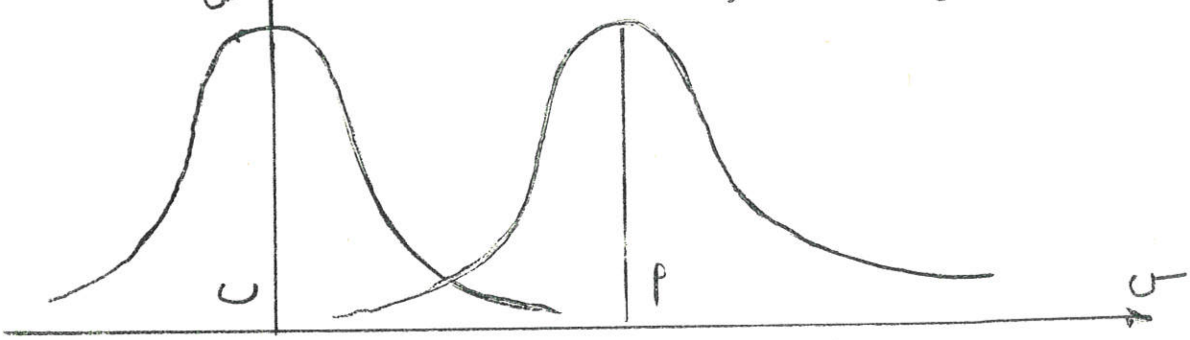
وقد عرفنا أن $ن$ — هى مجموع التكرارات أو المساحة التى تحت المنحنى التكرارى ونلاحظ أن صورة الدالة $ص = د(س)$ تتوقف على ظروف تغير المتغير $س$ ويوجد عديد من الصور لهذه الدالة منها

$$ص = \frac{1}{ع\sqrt{٢ط}} \; هـ^{\frac{-(س - أ)^٢}{٢ع^٢}}$$

وهذه الصورة أكثر الصور وأهمها استخداما ٠

ويمكن اثبات أن $أ$ = الوسط الحسابى ، $ع$ = الانحراف المعيارى

والشكل الذى يمثل هذه الحالة هو




والمنحنى البيانى لهذه الدالة متماثل بالنسبة الى الوسط الحسابـــى أ

ونوضع $\text{ع} = \dfrac{\text{س} - \text{أ}}{\text{ع}}$ فان

$$\text{ص} = \frac{1}{\sqrt{2\text{ط}}}\ \text{هـ}^{-\frac{\text{ع}^{2}}{2}}$$

فالمنحنى البيانى لهذه الدالة متماثل بالنسبة الى المحور الصادى كما فى الشكل ويسمـــى المنحنى الاحتمالى بالمنحنى المعتاد أو منحنى جاوس .

ونرى أن من أهم التطبيقات بل من أولى المسائل التى استخدم فيها هذا المنحنى لتمثـــل التوزيع التكرارى للاخطاء فى قياس الظواهر . فمن المعلوم عند قياس الظاهرة فان الجهاز يقدرها بأقـــل من الحقيقة أو أكثر منها . أى أن الخطأ يكون أحيانا موجبا وأحيانا سالبا ومن الطبيعى أنه اذا لـم يكن هناك تحيز من ناحية خاصة فان الأخطاء السالبة تكون فى عددها تساوى الأخطاء الموجبة وتكون كلها موزعة توزيعا تكراريا متماثلا حول الوسط الحسابى لها .

ودالة التكرار الاحتمالى فى هذه الحالـة هى

$$\text{ص} = \frac{\text{ن}}{\text{ع}\sqrt{2\text{ط}}}\ \text{هـ}^{-\frac{\text{س}^{2}}{2\text{ع}^{2}}}$$

حيث ن تمثل عدد الأخطاء كلها ، س مقدار الخطأ ، ع — الانحراف المعيارى ، فاذا مثلنا هذا المنحنى بيانيا فاننا نحصل على منحنى متماثلا حول المحور الصادى والوسط الحسابى للأخطاء يساوى صفرا ٠

وقد عرفنا أن عدد الأخطاء التى تقع بين ( س ، س + $\Delta$ س ) هى

ص ٠ $\Delta$ س بشرط أن تكون $\Delta$ س صغيرة وعلى ذلك فان عدد الأخطاء التى تقع بين $س_١$ ، $س_٢$ هى

$$\int_{س_١}^{س_٢} ص \; د س$$

فاذا كانت $س_١$ = —ف ، $س_٢$ = ف

فمن التماثل نجد أن

$$\int_{س_١}^{س_٢} ص \; د س = \int_{-ف}^{ف} ص \; د س = ٢ \int_{٠}^{ف} ص \; د س$$

فاذا أخذنا وحدة قياس الخطأ س تساوى القيمة المعيارية ع ثم قسمنا على عدد الأخطاء ن حصلنا على صورة بسيطة

$$ص = \frac{١}{\sqrt{٢ ط}} هـ^{-\frac{س^٢}{٢}}$$

حيث س تدل على مقدار الخطأ مقاسا بوحدات الانحراف المعيارى ، ص تدل على احتمال حدوث هذا الخطأ سواء كان سالبا أو موجبا ٠

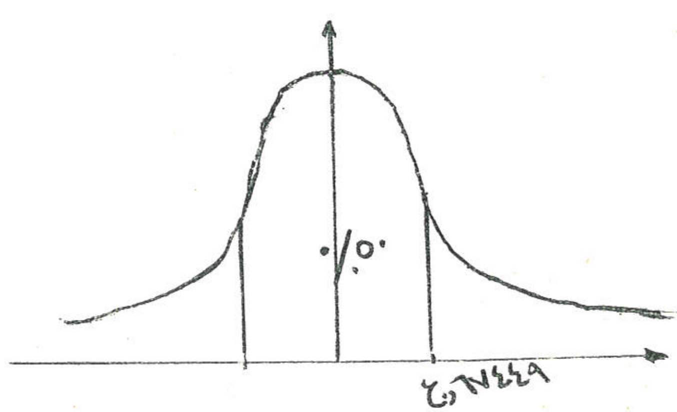
∴ احتمال حصول خطأ لا يزيد مقداره على المقدار ف بصرف النظر عن اشارة ف هو

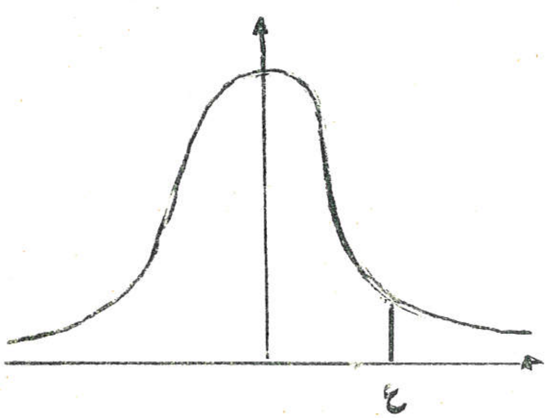
$$٢ \int^{ف} \frac{١}{\sqrt{٢ط}} \; هـ^{-\frac{س^٢}{٢}} \; د\,س$$

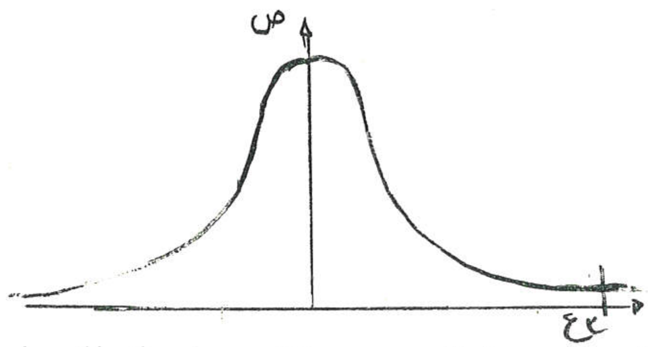
وقد أجتهد كثيرون فى عمل جدول لقيم ف المختلفة وسنذكر هنا بعض القيم المهمة لهذا الاحتمال

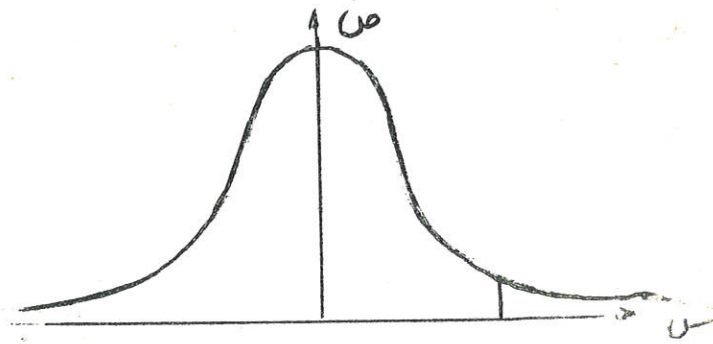
| ف قيم معيارية | ص = دالة الاحتمال |
|---|---|
| ١ر | ٠٧٩٦٦ر |
| ٥ر | ٣٨٢٩٢ر |
| ٦٧٤٤٩ر | ٥٠٠٠٠ر |
| ١ر٠ | ٦٨٢٦٨ر |
| ٢ر٠ | ٩٥٤٥٠ر |
| ٣ر٠ | ٩٩٧٣٠ر |
| ٤ر٠ | ٩٩٩٩٤ر |

معنى ذلك أن ٥٠٪ من الاخطاء لا يزيد مقدارها العددى عن ٦٧٤٤٩ر٠ من الانحراف المعيارى وأن ٦٨ر٢٦٨٪ منها لا يزيد عن نفس الانحراف المعيارى ، ٩٥ر٤٥٪ لا يزيد عن ضعف الانحراف المعيارى ، ٩٩ر٧٣٪ لا يزيد عن ثلاثة أضعاف الانحراف المعيارى وأخيرا ٩٩ر٩٩٤٪ لا يزيد عن أربعة أمثال الانحراف المعيارى .



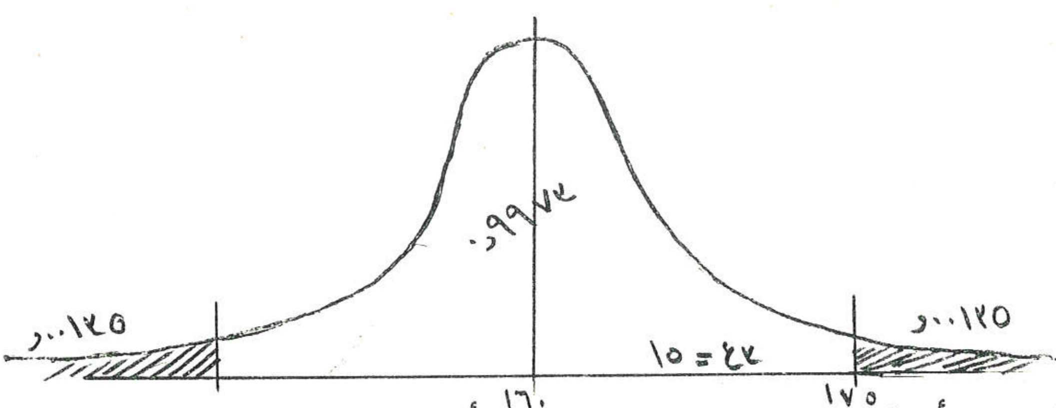



مثال (١) : اذا كان معروفا أن متوسط أطوال مجموع من الطلبه هو ١٦٠ سم وانحرافها المعياري
٥ سم ، فأوجد احتمال الحصول على طالب طوله أطول من ١٧٥ سم علما بأن أطوال
هذه المجموع توزع توزيعا معتادا ٠

الحـــل : ع = ٥ سم

الطول المطلوب أكثر من ١٧٥ سم




من الرسم نرى أن الاحتمال الحصول على طالب طوله أطول من ١٧٥ سم هو

$$ح = \frac{١٣}{١٠٠٠٠٠} = \frac{١}{٧٦٩}$$

أي أنه في كل ٧٦٩ طالب نختارون اختيارا عشوائيا نتوقع أن نجد بينهم طالب واحد طوله ١٧٥ سم
فأكثـــر ٠

مثال (٢) : فى المثال السابق ما هو احتمال الحصول على طالب ينحصر طوله بين ١٦٠ سم ، ١٥٧ سم وما هو احتمال الحصول على طالب يقع طوله بين ١٥٧ سم ، ١٦٧٫٥

الحل : القيمة المعيارية

$$ذ = \frac{س - أ}{ع} = \frac{١٥٧ - ١٦٠}{٥} = \frac{-٣}{٥} = -٠٫٦$$

قيمة ٦ر (بدون النظر الى الاشارة القيمة المقابلة لها فى الجدول ٢٢٥٧٥ر٠

أى أن احتمال وجود طالب ينحصر طوله بين ١٦٠ ، ١٥٧ هو $\frac{٢٢٥٧٥}{١٠٠٠٠٠} = ٢٢٥٧٥$ر

والقيمة المعيارية الأخرى

$$ذ = \frac{١٦٧٫٥ - ١٦٠}{٥} = \frac{٧٫٥}{٥} = ١٫٥$$

والقيمة التى يقابلها فى الجدول ٤٣٣١٩ر أى أن احتمال وجود طالب ينحصر طوله بين ١٦٠ ، ١٦٧٫٥ هو $\frac{٤٣٣١٩}{١٠٠٠٠٠} = ٤٣٣١٩$ر

وعلى ذلك فان احتمال وجود طالب طوله ينحصر بين ١٥٧ ، ١٦٧٫٥ هو

٢٢٥٧٥ر + ٤٣٣١٩ر = ٦٥٨٩٤ر

مثال (٣) : فى المثال السابق اذا كان لدينا ٢٠٠٠ طالب فاوجد عدد الطلبه الذين يزيد اطوالهم عن ١٦٨

الحل : القيمة المعيارية

$$ذ = \frac{س - أ}{ع} = \frac{١٦٨ - ١٦٠}{٥} = \frac{٨}{٥} = ١٫٦$$

القيمة المعيارية المقابلة لـ ف ( ١٫٦ ) من الجدول ٩٤٥٢٠ر٠

∴ عدد الطلبه الذين يكون أطوالهم ١٦٨ سم أو أقل = ٢٠٠٠ × ٩٤٥٢ر = ١٨٩٠٫٤

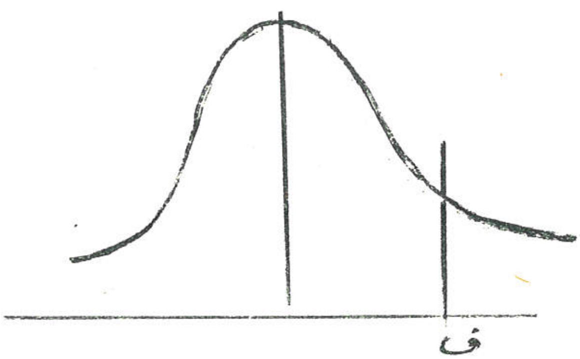
أى أن عدد الطلبه الذين طولهم أكبر من ١٦٨ هو

٢٠٠٠ ــ ١٨٩٠ = ١١٠ طالب

**مثال (٤)** : اذا كان احتمال الحصول على طالب طوله أكثر من ١٦٠ سم وأقل من قيمة معينة هو ٠ر١٩١٤٦ ما هى القيمة المجهولة ٠

**الحل** :

$$ف = \frac{س - ١٦٠}{٥}$$




القيمة المعيارية التى تقابل ٠ر١٩١٤٦ هى

ف = ٠ر٥

$$\therefore ٠ر٥ = \frac{س - ١٦٠}{٥}$$

س ــ ١٦٠ = ٢ر٥

$\therefore$ س = ١٦٢ر٥

**مسائلة** : اذا كان عدد مفردات توزيع الدرجات بالنسبة الى امتحان ما يتبع التوزيع المعتاد متوسطه ٥١ وانحرافه المعيارى ٨

اوجد عدد الطلبه الذين ينحصر درجاتهم ما بين ٤٥ ، ٧٠ من بين ١٠٠٠ طالب

( الجواب ــ ٧٦٥ طالب)

# الباب الثاني

## نظرية العينات

في دراستنا التمهيدية لعلم الاحصاء بحثنا القواعد والطرق الاحصائية التي نستخدمها عند دراسة مجموعة من المفردات لنتعرف على خواصها لنميزها من غيرها من المفردات المجموعات الأخرى تلك الخواص الاحصائية مثل الوسط الحسابي الذي يمثل مفردات المجموعة كنموذج لها ـ أو الانحراف المعياري الذي يقيس تشتتها حول الوسط الحسابي أو تقاربها منه أو معامل الارتباط الذي يقيس العلاقة بين ظاهرتين لاحظنا أن المجهود الفعلي يزداد كلما زادت عدد المفردات التي تدخل في الظاهرة فضلا عن التكاليف المادية التي ترهق الباحث وتحول بينه وبين اجراء البحث واستخراج النتائج التي يريدها . ولكن هناك طريقة نلجأ اليها الا وهي أننا نأخذ من المجموعة الكبيرة من المفردات المطلوب بحثها والتي تسمى بالمجتمع الأصلي أو المجتمع الاحصائي* ومجموعة صغيرة نسميها العينة ثم ندرس هذه العينة الصغيرة بدل المجتمع الكبير ـ ونقول أن الخواص الاحصائية للمجتمع الأصلي هي نفس الخواص الاحصائية للعينة تقريبا ـ ويعتمد هذا التقريب على نوع العينة وطريقة أخذها والشروط التي تتوافر فيها .

ومن أنواع العينة ما يلي :

---

* المجتمع الاحصائي : اما أن يكون محدودا أو غير محدود أو حقيقيا أو افتراضيا المجتمع المحدود هو أن يكون معلوم حجم مفرداته بينما المجتمع الغير محدود يكون حجمه لا نهائيا والمجتمع الحقيقي هو ذلك المجتمع الموجود فعلا وأمثلته كثيرة بينما المجتمع الافتراضي هو المجتمع الذي نتصور وجوده .

١ ـ العينة البسيطة ( العشوائيـة )

هى العينة التى يتم سحبها من المجتمع بطريقة ما بشرط أن كل عنصر من عناصر المجتمع تتـاح له فرصة الظهور فى العينة ومثال ذلك نفرض أننا نبحث فى أجور مجموعة كبيرة من العمال بقصد معرفـة المتوسط العام للأجور بين هؤلاء العمال ، فاننا نأخذ مجموعة صغيرة من المجموعة الكبيرة بشـرط اعطاء كل عامل يتاح له الفرصة الظهور فى المجموعة الصغيرة أى أخُذ مجموعة صغيرة من العمال بـدون تحيز ( سحب العمال بطريقة عشوائية ) ـ من هذه العينة العشوائية نحسب متوسط الأجور فى هـذه العينة ونعتبره المتوسط العام للأجور تقريبا .

من صفاتها أنها سهلة وأكثر أصالة فى العشوائية ـ ولكن يصح لنا أن نتساءل كيف لنا أن نعمم صفات عينة جزئية على مجتمع كبير ـ ومتى يكون حكمنا من العينة على المجتمع صحيحا أو قريبا من الصحة ـ والاجابة على ذلك فانه يجب عند أخذ العينة الا نتحيز الى العمال ذو الأجور العالية أو العكس بل يأخذ بعض العمال بطريقة عشوائية حيثما اتفق ونكون منها العينة . وقد يحدث عند تكوين هـذه العينة بهذه الطـريقة فان المصادفة تلعب دورها فى أخذ عامل ذو أجر مرتفع جدا كما أنه قـد يحدث أخذ عامل أجره منخفض جدا فتبادل هذين الأجرين لا تؤثر على متوسط الأجر للعينة الا أنه قد يحدث أن يكون العامل الثانى أجره مرتفع جدا وكذلك الثالث والرابع وهكذا ، فلذا فاننا نتوقـع الشك فى أن خواص هذه العينة هى نفسها خواص المجتمع الأصلى ، ولذا نرى أنها من الصعـب استخدام هذه الطريقة اذا كان المجتمع محل الدراسة سيكون من ظواهر مختلفة وغير متجانس .

٢ ـ العينـة الطبقيـة :

فى المجتمعات المكونة من أكثر من ظاهرة فانه يمكن تقسيم هذا المجتمع الى طبقات أو مجموعات من كل منها تؤخذ عينة عشوائية بسيطة تكون من هذه العينات العينة الطبقية ، فمثلا لمعرفة متوسـط الأجور تقسم الأجور الى مرتفعة وأجور متوسطة وأجور منخفضة ونختار عينة عشوائية من كل مجموعة فالعينة المكونة من جميع العينات يكون عينة طبقية ومن مزاياها أن تمثل المجتمع محل الدراسة .

٣ - **العينة التمثيليـــة :**

هى العينة التى يمكن تكوينها بنفس نسب مكونات المجتمع محل الدراسة . فمثلا اذا أريد تكوين عينة من عشرة عمال من مجموعة مكونة من مائه عامل منهم ستون من العمال وأربعون من العاملات فتكون العينة التمثيلية مكونة من عشرة عمال ستة عمال وأربعة عاملات . ويمكن تكوين عينة حسب مكونات المجتمع الاقتصادية . ونلاحظ أن لهذه العينة فائدة كبيرة عند استخدامها وتعتبر من الطرق المفيدة من طرق تكوين العينات .

**الوسط الحسابـــى للعينـــة :**

سنبحث الوسط الحسابى الذى نحصل عليه من دراسة مفردات العينة قربه أو بعده عن الوسط الحسابى للمجتمع الأصلى المأخوذه منه العينة . والطريقة هى أن نأخذ عدة عينات ونحسب الوسط الحسابى لكل عينة ثم نوجد الانحراف المعيارى لهذه الأوساط الحسابية فتعطينا مقياسا لدرجة اختلافها . ومن ثم نعرف مقدار بعد أى واحد منها عن الوسط الحسابى للمجتمع الذى هو نفسه المتوسط الحسابى لهذه المتوسطات العينية .

نفترض أن العينة التى تمثل المجتمع الأصلى تمثيلا صحيحا تحتوى على مفردات عددها م فى جدول تكرارى ينقسم الى فئات تكرارية مراكزها هى

$$س_١ ، س_٢ ، \ldots\ldots ، س_م$$

والتكرارات $ك_١ ، ك_٢ ، \ldots ، ك_م$

∴ الوسط الحسابى لقيم س من العينة النموذجية هو

$$\bar{س} = \frac{مجـ ك س}{مجـ ك} \quad ، \quad مجـ ك = ن$$

$$\therefore \bar{س} = \frac{مجـ ك س}{ن} \quad \ldots\ldots \quad (١)$$

نأخذ عينة ثانية من نفس المجتمع ونقسم مفرداتها فى جدول تكرارى بنفس الفئات وستكون تكرارات هذه العينة فى الغالب مخالفة لتكرارات العينة الأولى ، ونفرض أن التكرارات هى

$$ك_١ + ف_١ ، ك_٢ + ف_٢ ، \cdots\cdots ، ك_ر + ف_ر$$

حيث $مح ف = صفر$ ( لأن مجموع التكرارات واحد فى العينتين $مح ك = ن$ )

الوسط الحسابى لهذه العينة تختلف عن الوسط الحسابى للأولى ونفرض أنه

$\bar{س} + د$ حيث $د$ كمية صغيرة

$$\bar{س} + د = \frac{مح\ س\ (ك + ف)}{ن} \quad \cdots\cdots \quad (٢)$$

بطرح (١) من (٢) نحصل على

$$د = \frac{مح\ س\ ف}{ن} = \text{انحراف الوسط الحسابى للعينة الثانية}$$

عن الوسط الحسابى $\bar{س}$

<u>الانحراف المعيارى للأوساط الحسابية للعينات</u> :

لايجاد الانحراف المعيارى للأوساط الحسابية للعينات نحسب لكل عينة انحراف وسطها الحسابى عن الوسط النموذجى للعينة النموذجية ( المثالية ) $\bar{س}$ أى $س - \bar{س}$ ونربع هذه الانحرافات وتقسم مجموع مربعاتها على عدد العينات وليكن $م$ فنحصل على مربع الانحراف المعيارى لهذه الأوساط الحسابية والذى يقيس تشتتها حول الوسط الحسابى $\bar{س}$ أى الوسط الذى يتذبذب حوله متوسطات العينات ويساوى الوسط الحسابى للمجتمع الأصلى .

والانحراف المعيارى للأوساط الحسابية $ع_و$ يساوى .

$$ع_و = \frac{ع}{\sqrt{ن}}$$

حيث ع هو الانحراف المعيارى لقيم س من العينة الأولى المأخوذه لنموذج للمجتمع الأصلـــــى ، ن عدد مفردات العينة ٠

<u>مثـال</u> : فى الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لدخل ١٢١٢ شخصا بالجنيه المصرى فمـاذا يكون الوسط الحسابى للدخل فى السنة والانحراف المعيارى للأوساط الحسابية ٠

| فئـــات | تكرارات | فئات | تكرارات |
|---|---|---|---|
| ١٠٠ـ١١٠ | ١ | ١٨٠ ـ | ١٢٥ |
| ١١٠ـ١٢٠ | ٨ | ١٩٠ ـ | ٦٧ |
| ١٢٠ـ | ٢٢ | ٢٠٠ ـ | ٢٤ |
| ١٣٠ـ | ٦٣ | ٢١٠ ـ | ١٤ |
| ١٤٠ـ | ١٧٣ | ٢٢٠ ـ | ٧ |
| ١٥٠ـ | ٢٢٥ | ٢٣٠ ـ | ٤ |
| ١٦٠ـ | ٢٧٥ | ٢٤٠ ـ | ٢ |
| ١٧٠ـ | ١٦٨ | ٢٥٠ ـ | ٤ |
| | | الجملـــة | ١٢١٢ |

<u>الحـل</u> : من السهل اثبات أن

الوسط الحسابى للعينة هو

$$\bar{س} = ١٦٤ر٦٨$$

والانحراف المعيارى للعينة هو

$$ع = ٢٠ر٣٢٥$$

∴ الانحراف المعيارى للأوساط الحسابية هو

$$ع_{و} = \frac{ع}{\sqrt{ن}} = \frac{٢٠ر٣٣٥}{\sqrt{١٢١٢}} = ٠ر٥٨٦$$

حـــدى الثقـــة :

عند سحب كل العينات الممكنة المتساوية الحجم من مجتمع ما فان أوساطها الحسابية تتــوزع حول الوسط الحسابى للمجتمع وبتطبق خواص التوزيع المعتاد فانه نرى أن ٩٥ ٪ من هذه الأوســاط تقع بين متوسط المجتمع مضافا اليه أو مطروحا منه ١ر٩٦ مرة الانحراف المعيارى ( الخطأ المعيارى ) للوسط الحسابى ـ وأن ٩٩ ٪ من هذه الأوساط تقع بين متوسط المجتمع مضافا اليه أو مطروحــا منه ٢ر٥٧٦ مرة الخطأ المعيارى ٠

وعند سحب عينة مختارة اختيارا عشوائيا من مجتمع فان احتمال أن متوسط العينة يختلف عــن متوسط المجتمع بأقل من ١ر٩٦ مرة الخطأ المعيارى هو ٩٥ ٪ بمعنى أننا نتوقع أن متوسط العينــة تختلف بمقدار ١ر٩٦ مرة خطأ معياريا عن متوسط المجتمع ٥ مرات من كل مائه مرة ٠

أى باحتمال ٩٥ ٪ فان متوسط المجتمع يقع بين

$\bar{س}$ ( متوسط العينة) $\pm$ ١ر٩٦ $\times$ الخطأ المعيارى

أى $\bar{س} + ١ر٩٦ \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$ ...... (١)

أ، $\bar{س} - ١ر٩٦ \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$ (٢)

وباحتمال ٩٩ ٪ فان متوسط المجتمع يقع بين

$\bar{س} + ٢ر٥٧٦ \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$ ....... (١')

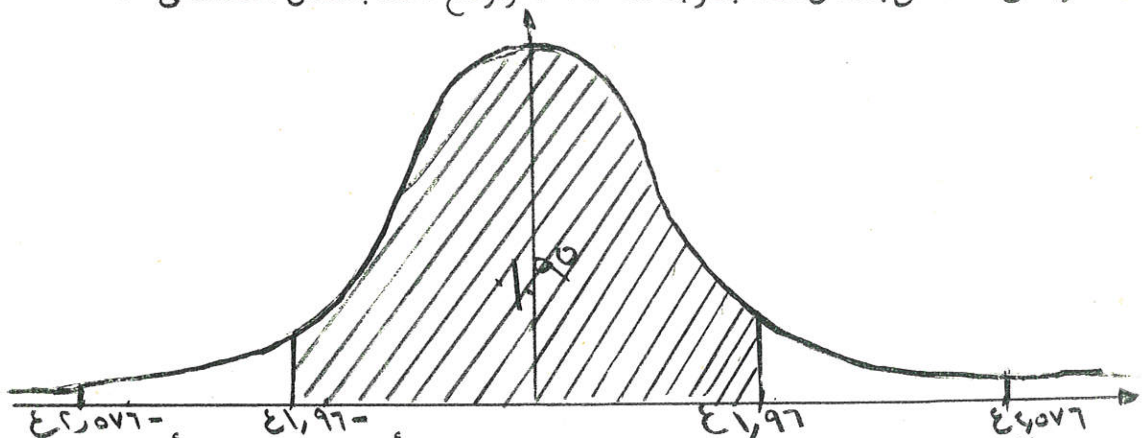
$\bar{س} - ٢ر٥٧٦ \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$ ....... (٢')

ويسمى المقدار (١) بالحد الأعلى للثقة بدرجة ثقة ٩٥ ٪ والثانى (٢) بالحد الأدنى للثقة بدرجة ثقة ٩٥ ٪

ويسمى الحدان بحدى الثقة بدرجة ثقة ٩٥ ٪

كما أن المقدار (١') بالحد الأعلى للثقة بدرجة ثقة ٩٩ ٪ والثانى (٢') بالحد الأدنى للثقة بدرجة ثقة ٩٩ ٪ ٠

ويسمى الحدان بحدى الثقة بدرجة ثقة ٩٩٪ ونوضح ذلك بالشكل التالـــى :




**مثـال** : سحبت عينة حجمها ١٠ من مجتمع الطلبه وأريد تقدير متوسط أطوال الطلبه وكـــان معروفا لدينا الانحراف المعيارى للمجتمع ع وقيمته ٦ وكان متوسط العينة هـــو ١٧٠ سم والمطلوب تقدير متوسط أطوال الطلبه المجتمع بدرجة ثقة ٩٥٪

**الحـل** : وسط الحسابى للعينة $\bar{س}$ = ١٧٠

∴ الوسط الحسابى للمجتمع بدرجة ثقة ٩٥٪ = ١٧٠ ± ١٫٩٦ × $\frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}}$

= ١٧٠ ± ١٫٩٦ × $\frac{\text{٦}}{\sqrt{\text{١٠}}}$ =

= ١٧٠ ± ٣٫٦٨

∴ متوسط المجتمع ينحصر بين ١٦٦٫٣٢ ، ١٧٣٫٦٨ بدرجة ثقة ٩٥٪

## اختبـارات الفروض Test of hypothesis

### (١) اختبار متوسط عينة :

#### (أ) بفرض معرفة الانحراف المعيارى للمجتمع

فيما سبق أمكنا تحديد فترة يوجد بها الوسط الحسابى للمجتمع وتسمى نهايتى هذه الفـــترة بحدود الثقة ، فاذا كان الوسط الحسابى للعينة عدد مفردات ٩ هو ١٧٠ ونفرض أننا نريد معرفة ما اذا كان متوسط المجتمع الذى سحبت منه العينة هو ١٦٩ مثلا . مع العلم بأن ع معـروف ومقداره ٥ فالمشكلة هى

(١) متوسط العينة معروف وقدره ١٧٠

(٢) قيمة فرضية لمتوسط المجتمع وقدره ١٦٩ وتسمى هذه القيمة الفرضية (بالفرض العدمى) أى أننا نفترض عدم وجود فرق حقيقى بين متوسط المجتمع الحقيقى والعينة المطلوبة (ويعرف باختبار القيمة المطلوبة (Test of hypothesis)

فاذا كان فرض العدم صحيحا فاننا نحصل على ٥ مرات من كل ١٠٠ مرة نجد فيها أن متوسط العينة يبعد عن القيمة المفروضة لمتوسط المجتمع بمسافة أكبر من ١,٩٦ مرة خطأ معيارى ونحصل على مـرة واحدة من كل مائه مرة يكون فيها متوسط العينة يبعد عن القيمة المفروضة لمتوسط المجتمع بمسافة أكـبر من ٢,٥٧٦ مرة خطأ معياريا .

فاذا كان الفرق الحقيقى يزيد عن هذه القيم فاننا نقول أن هذه الفرق معنويا بمستوى ٥٪ أو ١٪ على الترتيب . ونقول أننا حصلنا على قيم نادرة الحدوث اذا ماصح الفرض ونستنتج أن فرض العـدم غير صحيح . فاذا كان الفرق يزيد عن ١,٩٦ خطأ معياريا ولكنه ينقص عنه ٢,٥٧٦ مرة خطـأ معياريا ويكون الفرق معنويا بمستوى ٥٪ وغير معنوى بمستوى ١٪ وكلما زادت نسبة الفرق فى الخطـأ المعيارى كلما قوى الشك فى فرض العدم وكلما اقتربت معنوية الفرق .

ففى المثال السابق نرى أن

$$\text{ع} = \frac{\bar{\text{س}} - \text{أ}}{\sqrt{\text{ن}}} = \frac{١٧٠ - ١٦٩}{\frac{٥}{\sqrt{٩}}} = \frac{٣}{٥} = ٦ر$$

أى أن الفرق غير معنويا بمستوى ٥ ٪ يقبل الفرض القائل بأن متوسط المجتمع هو ١٦٩ وهو أن من كل مائه مرة تحدث هذه الحالة ٩٥ مرة ، وأن البيانات التى لدينا تتفق مع فرض العدم ٠

__مثـال (٢) :__

نفرض أن الفرض العدمى هو أن العينة مسحوبة من مجتمع متوسطه ١٧٤

$$\therefore \text{ع} = \frac{\bar{\text{س}} - \text{أ}}{\frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}}} = \frac{١٧٠ - ١٧٤}{\frac{٥}{\sqrt{٩}}} = -\frac{٤}{\frac{٥}{٣}} = -٢ر٤$$

$\therefore$ ع = ٢ر٤ ( باهمال الاشارة )

أى أن الفرق معنويا بمستوى ٥ ٪ وهذا يعنى أننا لو سحبنا عدد كبير جدا من العينات من هـــذا المجتمع فاننا نحصل على متوسط العينة ٥ مرات كل مائه مرة وهذه الحادثة نادرة الوقوع ولا ينفـق مع فرض العدم القائل بأنه لا يوجد فرق بين متوسط العينة ومتوسط المجتمع بمعنى أن $\bar{\text{س}}$ للمجتمع الذى سحبت منه لا يساوى ١٧٤ وبذلك نرفض هذا الفرض ويكون الرفض بدرجة ٥ ٪ ونقـــول بمستوى معنوية ٥ ٪ ٠

__مثـال (٣) :__

سحبت عينة عشوائية حجمها ٢٩٠ ووسطها الحسابى ١٦ من مجتمع ما انحرافه المعيـارى ٥ر٢ والمطلوب معرفة عند مستوى معنوية ٥ ٪ ( درجة ثقـة ٩٥ ٪ ) ان العينة مسحوبة من مجتمـع متوسطه ٨ر١٦ ٠

__الحـل__ : نجد أن

$$\text{ع} = \frac{\bar{\text{س}} - \text{أ}}{\frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}}} = \frac{16 - 16.8}{\frac{2.5}{\sqrt{290}}} = \frac{-0.8}{0.3} = -2.67$$

ونجد أن القيمة المسحوبة ٢ر٦٧ أكبر منها فى الجدول وهى ١ر٩٦

ومعنى ذلك يرفض الفرض القائل بأن العينة مسحوبة من مجتمع متوسطه ١٦ر٨ بمستوى معنويـــة ٥٪ أو فى حدود ثقـة ٩٥٪

وبمعنى آخر أن فى كل مائه مرة يرفض الفرض القائل بأن العينة مسحوبة من مجتمع متوسطه ١٦ر٨ بنسبة ٩٥ مرة ونحصل فقط بنسبة ٥ مرات.

مثـال (٤) :

سحبت عينة حجمها ٢٨٩ وسطها الحسابى ٢٥ من مجتمع انحرافه المعيارى ٦ر٣ والمطلوب معرفة عند مستوى معنوية ١٪ ( درجة ثقة ٩٩٪ ) ان العينة مسحوبة من مجتمع متوسطه ٢٦ .

الحـل : نجد أن

$$\text{ع} = \frac{\bar{\text{س}} - \text{أ}}{\frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}}} = \frac{25 - 26}{\frac{6.3}{\sqrt{289}}} = \frac{-1 \times 170}{63} = -2.7$$

بمستوى معنوية ١٪ قيمة ع من الجدول ٢ر٥٧٦

وبما أن القيمة المسحوبة ع أكبر منها فى الجدول بمستوى معنوية ١٪ فلذلك يرفض الفرض القائـــل بأن العينة مسحوبة من مجتمع متوسطه ٢٦ (أى يفرض ٩٩ مرة ويقبل مرة واحدة من كل مائه مرة ) .

(ب) فى حالة عدم معرفة الانحراف المعيارى للمجتمع

نظرية : (بدون برهان ) اذا سحبت عينة عشوائية كبيرة حجمها ن من مجتمع وكانـــت مفرداته هى $\text{س}_1$ ، $\text{س}_2$ ، ... ، $\text{س}_\text{ن}$ ووسطها الحسابى هو $\bar{\text{س}}$ والوسط الحسابى للمجتمع

هو أ وانحراف العينة ع وللمجتمع $ع_١$ فان

$\overline{س}$ عبارة عن أحسن تقدير للوسط الحسابى للمجتمع أ

$ع_١ = \sqrt{\frac{١}{ن - ١} \text{ مجـ } (س - \overline{س})^٢}$ أحسن تقدير للانحراف المعيارى للمجتمع ع

فى حالة عدم معرفة الانحراف المعيارى للمجتمع فانه باستخدام النظرية السابقة فانه نستطيع أن نوجد ع للمجتمع ونكون

القيمة المقدرة للانحراف المعيارى من العينة للمجتمع ع

$$ع_١ = \sqrt{\frac{١}{ن - ١} \text{ مجـ } (س - \overline{س})^٢}$$

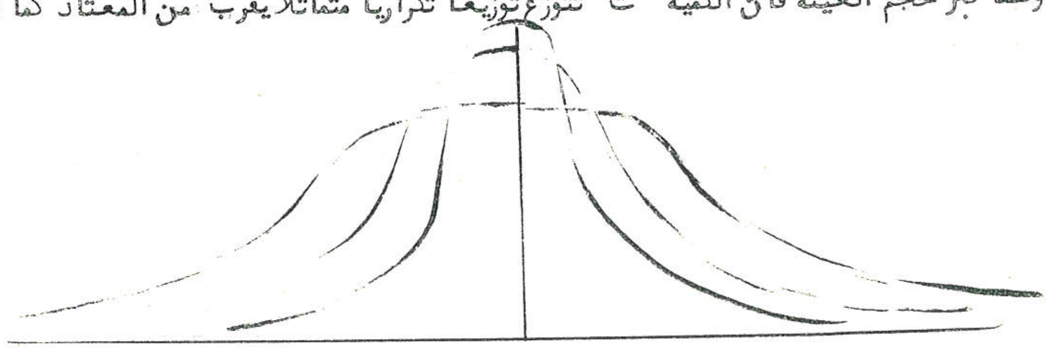
وذلك فان

$$ع_{\overline{س}} \text{ ( الانحراف المعيارى للمتوسطات الحسابية ) } = \frac{ع \text{ ( الانحراف المعيارى المقدر للمجتمع) }}{\sqrt{ن}}$$

$$، \quad ت = \frac{\overline{س} - أ}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}} = \frac{\overline{س} - أ}{ع} \sqrt{ن}$$

وهذه تساوى الفرق بين وسط العينة والمتوسط العام للمجتمع الأصلى مقسوما على الخطأ المعيارى للوسط الحسابى للعينة . وهذه الكمية ت تتوزع توزيعا تكراريا يسمى توزيع ستودنت.

وكلما كبر حجم العينة فان الكمية ت تتوزع توزيعا تكراريا متماثلا يقرب من المعتاد كما فى الشكل التالى



## The degrees of freedom- درجات الحريـــــة

اذا تأملنا العلاقة

$$\sum_{1}^{ن} ( س - \bar{س} ) = صفر$$

نجد أنها تسمح لنا بحرية اختيار مقادير عددها ( ن ـ ١ ) من هذه الانحرافات فقط لتحديـــــد الانحراف الأخير تحديدا كاملا بموجب العلاقة السابقة . وهذا العدد ( ن ـ ١ ) يسمى بدرجات الحرية المتروكة لنا فى تحديد مقادير الانحرافات اختياريا ، ويمكن تعريف درجات الحرية بأنها عـــدد الأشياء التى نبحث فى تغيرها مطروحا منه عدد القيود التى تربط هذه الاشياء بعضها ببعـــض فالعلاقة $\sum ( س - \bar{س} )^{2} = صفر$

عبارة عن مجموع مربعات الانحرافات عن وسطها الحسابى وعدد هذه الانحرافات هنـــا ن وبينهما قيد واحد الا وهو أن مجموعهما يساوى صفر ، ولذلك فان عدد درجات الحرية يساوى ن ـ ١ وفى الجداول التكرارية اذا كان عدد التكرارات للفئات هو ل فانه يمكننا اختيار مقادير تكراريـــــة ( ل ـ ١ ) ليحدد التكرار الأخير وذلك لأن مجموع التكرارات ن وعلى ذلك فان عدد درجــــات الحرية هو ( ل ـ ١ ) .

وفى الجداول التكرارية المزدوجة : نرى أن المجاميع الأفقية ثابتة وكذلك المجاميع الرأسية للأعمـــدة ثابتة وتتغير تكرارات الخانات فى حدود هذه الشروط ، فاذا كان عدد الأعمدة ل وعدد الصفوف م فتكون عن الخانات كلها ل × م وتكون عدد درجات الحرية فتكرارات هذه الخانـــــات هـــى ( ل ـ ١ ) ( م ـ ١ ) لأن عدد الخانات التى يمكن ملئها اختياريا فى أى سطر هو ل ـ ١ لكـى يكون مجموع التكرارات الصف مساويا المجموع فى الهامش وكذلك عدد الخانات الممكن ملئها اختياريا فـى أى عمود هو ( م ـ ١ ) وعلى ذلك فان عدد الخانات الممكن ملئها اختياريا فى الجدول كله هـــى ( ل ـ ١ ) ( م ـ ١ ) .

فمثلا فى الجدول التكرارى المزدوج المكون من ٤ خانات ٢ × ٢ درجات الحرية له ١ × ١ وهذا واضح أن أنه يكفى تحديد تكرار خانة واحدة لمعرفة تكرارات الخانات الثلاثة الباقية وذلك باستخـــدام المجاميع الهامشيـــــة .

معنويــة الوسط الحسابـــى :

عند اختيار معنوية متوسط العينة أو الحصول على حدود ثقة لمتوسط المجتمع نتبع الطرق السابقة (فى حالة معرفة الانحراف المعيارى للمجتمع) مع اجراء تعديل بسيط حتى نتخلص من الخطأ الناتــج من استخدام الانحراف المعيارى المقدر من العينة بدلا من الانحراف المعيارى الحقيقى للمجتمع.

وهذا التعديل تتلخص فى استخدام جدول ت بدلا من جدول المنحنى المعتاد.
والطريقة كما موضحة فى المثال التالى :

مثـــال : نفرض أن سحبنا عينة من مجتمع حجمها ١٠ وكانت قيمة مفرداتها هى

٦٣ ـ ٦٣ ـ ٦٥ ـ ٦٨ ـ ٦٩ ـ ٧٠ ـ ٧٣ ـ ٧٤ ـ ٧٦ ـ ٧٩

والمطلوب :

(١) اختبار ما اذا كان العينة مسحوبة من مجتمع متوسطه ٦٥

(٢) حساب حدود الثقة لمتوسط المجتمع بمستوى معنوية ٥٪ (بدرجة ثقة ٩٥٪)

الحــل : نأخذ وسطا فرضيا من المفردات وليكن ٦٠

$\therefore$ ص = س ـ ٦٠ هى

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٣ | ٣ | ٥ | ٨ | ٩ | ١٠ | ١٣ | ١٤ | ١٦ | ٩٠ |

$$\therefore \quad \bar{ص} = \frac{١٠٠}{١٠} = ١٠ \qquad \therefore \quad \bar{س} = ٦٠ + ١٠ = ٧٠$$

ولذلــك

$$ع^٢ = \frac{مج \ (ص - \bar{ص})^٢}{ن - ١} = \frac{مج \ (س - \bar{س})^٢}{ن - ١}$$

$$أو \quad ع^٢ = \frac{مج \ ص^٢}{ن - ١} - \frac{ن \ \bar{ص}^٢}{ن - ١}$$

$$مج \ ص^٢ = ١٢٧٠$$

$$\therefore\ ع^2 = \frac{1270}{9} - \frac{10 \times (10)^2}{9} = \frac{270}{9} = 30$$

ومنها فان $ع = \sqrt{30} = 5{,}48$

$$ت = \frac{\bar{س} - أ}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}} = \frac{70 - 65}{\frac{5{,}48}{\sqrt{10}}} = \frac{5}{1{,}71} = 2{,}924$$

ثم نقارن هذه القيمة فى جدول ت أمام درجات حرية عددها ٩ ( ن ــ ١ = ١٠ ــ ١ )
وتحت مستوى معنوية ٥ ٪

من الجدول نجد أن هذه القيمة $ت_{(0{,}05 ، 9)} = 2{,}262$

حيث العدد الأول الذى أسفل ت يمثل مستوى المعنوية والعدد الثانى يمثل درجات الحريـــ
ولما كانت القيمة المسحوبة أكبر من هذه القيمة فاننا نرفض الفرض القائل بأن هذه العينة مسحوبة مـ
مجتمع متوسطه ٦٥ بدرجة ثقة مقدارها ٩٥ ٪ أو بمستوى معنوية قدره ٥ ٪ .

وذلك نرى أن حدود الثقة يمكن التوصل اليها بالطريقة التاليـــة

$$\pm\ ت_{(0{,}05 ، 9)} = \frac{\bar{س} - أ}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}}$$

$$\therefore\ \bar{س} - أ = \pm\ ت_{(0{,}05 ، 9)} \frac{ع}{\sqrt{ن}}$$

$$\therefore\ أ \text{ (الوسط الحسابى للمجتمع) } = \bar{س} \text{ (للعينة) } \pm\ ت_{(0{,}05 ، 9)} \frac{ع}{\sqrt{ن}}$$

$$\therefore\ أ = 70 + 2{,}262 \times 1{,}71 = 73{,}87$$

$$أ = 70 - 2{,}262 \times 1{,}71 = 66{,}13$$

أى أن الوسط الحسابى للمجتمع لمستوى معنوية ٥ ٪ يقع داخل الفترة ١٣ر٦٦ ، ٨٧ر٧٣ وان من كل ١٠٠ مرة يحدث ٥ مرات يقع الوسط الحسابى للمجتمع خارج هذه الحدود ، ٩٥ مرة يقع داخلها ٠

## مقارنـــة مجموعتـــين :

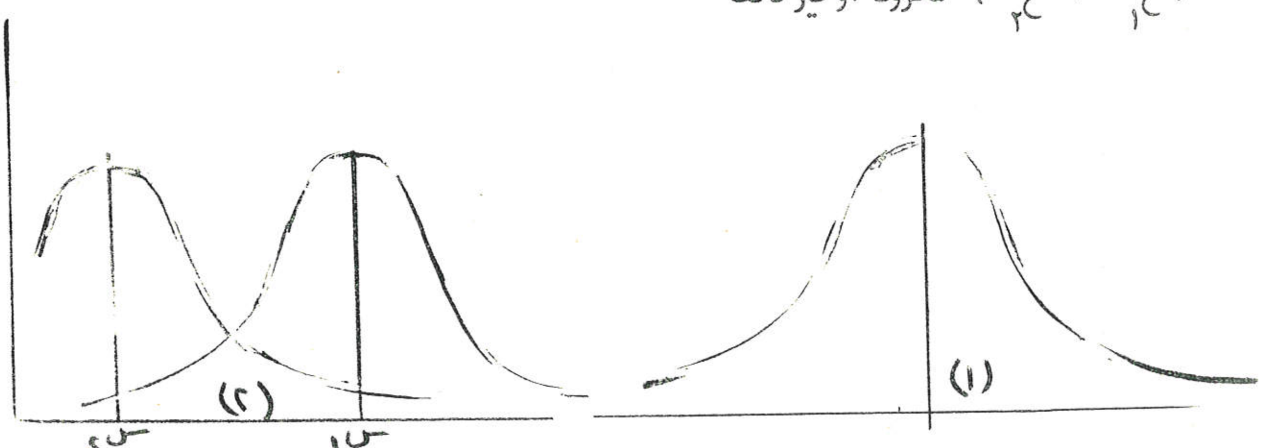
عند دراسة مجموعتين كثيرا ما يستدعى معرفة تأثير مؤثرين على ظاهرة ما وذلك لمعرفة مـا اذا كان هناك تأثير أو فرق فى التأثير ، ولذا فاننا نأخذ عينة عشوائية وأخرى مثلها متشابهان فى كافـة الوجوه حجم الأول $\text{ن}_{١}$ وحجم الثانية $\text{ن}_{٢}$ فاذا رسمنا توزيعات مفرداتها فاننا نكون أمـام احتمالين

(١) توزيع المجموعة الأولى يشبه تماما توزيع المجموعة الثانية ويطبق عليه $\bar{\text{س}} = \bar{\text{ص}}$ ٠

(٢) توزيع احدى المجموعتين متوسطها أقل من متوسط المجموعة الثانية والعكس

أى أن $\bar{\text{س}} \neq \bar{\text{ص}}$

وفى الحالات السابقة يفترض أن الاختلاف واحد فى كل المجموعتين أو العينتين أى أن الانحـراف المعيارى متساوى ( $\text{ع}_{١} = \text{ع}_{٢}$ ) معروفا أو غير ذلك أو أن الانحراف المعيارى غير متسـاوى ( $\text{ع}_{١} \neq \text{ع}_{٢}$ ) معروفا أو غير ذلك




وطريقة معالجة الفروض هى أن نفترض الوسط الحسابى للعينة الأولى ( المجتمع الاول ) يسـاوى

الوسط الحسابى للعينة الثانية ( المجتمع الثانى ) بفرض تساوى الانحراف المعيارى للمجموعتين أى أن

$$\bar{س} = \bar{ص} \qquad \text{بفرض أن} \qquad ع_{1} = ع_{2}$$

مثال ذلك عند قياس مدى تأثير مصلين فى علاج مرض ما وتعين أيهما أفضل من حيث تأثيره فى القضاء على هذا المرض ، فاننا نقوم باجراء تجربة باختيار مجموعتين متشابهتين تماما ثم نحقن المجموعة الأولى بالمصل الاول والمجموعة الثانية بالمصل الثانى ونوجد عدد المرضى الذين شفوا من هذا المرض بتأثير الامصال والفرق بين العددين يمثل أفضلية الامصال حيث أننا أخذنا مجموعتين متشابهتين تماما فى كافة الوجوه .

ومثال آخر فى الزراعة يمكن المقارنة من سمادين مختلفين أو نوعين مختلفين من البذور ومعرفة أفضلية أحدهما عن الآخر .

ومثال آخر فى مجال التربية والتعليم يمكن معرفة تأثير طريقتين مختلفتين للتعليم واختيار الطريقة الصالحة وذلك بأخذ مجموعتين من الطلبه متشابهتين فى كافة الوجوه ، ويستخدم الطريقة الأولى للمجموعة الأولى والطريقة الثانية للمجموعة الثانية ، ثم نعقد اختبارا بعد مدة معينة وندون نتائج كل مجموعة ونختبر الفرق بين متوسطى المجموعتين والأمثلة كثيرة على هذا النمط .

(أ) <u>الانحراف المعيارى للمجموعتين معروف ومتساوى</u>

اذا أخذت عينين حجمهما $ن_{1}$ ، $ن_{2}$ ومتوسطاتهما هى $\bar{س}_{1}$ ، $\bar{س}_{2}$ والتباين لكل منهما مساويا $ع^{2}$ فان

$$ع = \frac{\bar{س}_{1} - \bar{س}_{2}}{ع}$$

حيث $$ع^{2} = \frac{ع_{1}^{2}}{ن_{1}} + \frac{ع_{2}^{2}}{ن_{2}} = \frac{ع^{2}}{ن_{1}} + \frac{ع^{2}}{ن_{2}}$$

$$\therefore \quad ع_{\circ} = ع \sqrt{\frac{١}{ن_١} + \frac{١}{ن_٢}}$$

حيث ع اختبار قياسى معنوية الفرق بين المتوسطين ويكون توزيع المقدار ع توزيعـــا معتادا . اذا كانت $ن_١$ ، $ن_٢$ كبيرة بصرف النظر عن التوزيع الأصلى للمجتمع فاذا ما حسبت قيمة ع ومقارنتها بقيم المنحنى المعتاد وبمستوى معنوية معين ممثلا بالقيم

١٫٩٦ بمستوى معنوية ٥٪

٢٫٥٧٦ بمستوى معنوية ١٪

مثال (١) اختيرت مجموعتين حجم الأولى (٦) ومفرداتها ٦٣ ـ ٦٥ ـ ٦٨ ـ ٦٩ ـ ٧١ ٧٢ وحجم الثانية ١٠ ومفرداتها ٦١ ـ ٦٢ ـ ٦٥ ـ ٦٦ ـ ٦٩ ـ ٦٩ ـ ٧٠ ـ ٧١ ـ ٧٢ ـ ٧٣

المطلوب : نفرض أن ع معروفة هل من هذه المفردات تحكم بها على أن المجتمع الاول أحسن من المجتمع الثانى ؟

الحل :

(١) نفرض أنه ليس هناك فرق بين المجموعتين فان $أ_١ = أ_٢$

(٢) نفرض أن ع = ٥٫٦ ( الانحراف المعيارى لمتوسطى المجموعتين )

(٣) $$ع_{\circ} = \sqrt{\frac{ع^٢_١}{ن_١} + \frac{ع^٢}{ن_٢}} = ع \sqrt{\frac{١}{ن_١} + \frac{١}{ن_٢}}$$

$$= ٥٫٦ \sqrt{\frac{١}{٦} + \frac{١}{١٠}} = ٥٫٦ \sqrt{\frac{١٦}{٦٠}}$$

الوسط الحسابى للمجموعة الأولى $\bar{س}_١ = \frac{٦٣ + ٦٥ + ٦٨ + ٦٩ + ٧١ + ٧٢}{٦} = \frac{٤٠٨}{٦} = ٦٨$

الوسط الحسابى للمجموعة الثانية $\bar{س}_٢ = \frac{٦١ + ٦٢ + ٦٥ + ٦٦ + ٦٩ + ٦٩ + ٧٠ + ٧١ + ٧٢ + ٧٣}{١٠}$

$$\therefore \quad \bar{س}_٢ = \frac{٦٧٨}{١٠} = ٦٧{,}٨$$

$$\frac{\bar{س}_١ - \bar{س}_٢}{ع\sqrt{\frac{١}{ن_١} + \frac{١}{ن_٢}}} = \frac{٦٨ - ٦٧{,}٢}{١٥\sqrt{\frac{١٦}{٦٠}}} = \frac{٣٨}{٥٦} = \frac{١٩}{٥٨} = ٦{,}٠$$

نرى أن القيمة المقدرة أقل من ١٫٩٦ بمستوى معنوية ٥ ٪ ، وبدرجة ثقة مقدارها ٩٥ ٪ يقبـــل الفرض القائل بأنه ليس هناك فرق بين المجموعتين

∴ لا يوجد فرق معنوى بين المتوسطات أى أن العينة الأولى تشبه العينة الثانية .

(ب) عندما يكون الانحراف المعيارى متساوى وغير معروفا

يستخدم العلاقة

$$ت = \frac{\bar{س}_١ - \bar{س}_٢}{ع\sqrt{\frac{١}{ن_١} + \frac{١}{ن_٢}}}$$

حيث $ع^٢$ هو تقدير تباين المجتمع من العينتين وتساوى

$$ع^٢ = \frac{ن_١ ع_١^٢ + ن_٢ ع_٢^٢}{ن_١ + ن_٢ - ١}$$

$$\frac{\underset{١}{\overset{ن_١}{مجـ}} (س - \bar{س}_١)^٢ + \underset{١}{\overset{ن_٢}{مجـ}} (س - \bar{س}_٢)^٢}{ن_١ + ن_٢ - ٢}$$

وتستخدم فى هذه الحالة جدول ت بدرجات حرية عددها $ن_١ + ن_٢ - ٢$ وبمستـــوى معنوية معلـــوم .

**مثال** : فحصت عينة من العمال والموظفين لدراسة الدخل فكان الدخل بالنسبة الى العينة الاولى هو ١٢٣ – ١٢٥٫٥ – ١٢٥٫٥ – ١٢٦ – ١٢٧٫٥ – ١٢٨

والعينة الثانية ١٢٣٫٨ – ١٢٥٫٣ – ١٢٢٫٥ – ١٢٣٫٧ – ١٢٤٫٨ – ١٢٤٫٣

١٢٣ – ١٢٤٫٦ – ١٢٥ – ١٢٢

**والمطلوب** : اختيار ان المجتمعين لهما نفس المتوسط بمستوى معنوية ٥ ٪

**الحل** : قيمة $\text{ع}$ للمجتمع ومعروفة وللتقدير :

$$\hat{\text{ع}}^{٢} = \frac{\sum_{١}^{\text{ن}_١} (\text{س} - \bar{\text{س}}_١)^{٢} + \sum_{١}^{\text{ن}} (\text{س} - \bar{\text{س}}_٢)^{٢}}{\text{ن}_١ + \text{ن}_٢ - ٢}$$

بطرح الرقم ١٢١ من جميع مفردات العينتين لتسهيل الحل نحصل على

الأولى ٢ ، ٤٫٥ ، ٥ ، ٦٫٥ ، ٧

الثانية ٢٫٨ ، ٤٫٣ ، ١٫٥ ، ٢٫٧ ، ٣٫٨ ، ٣٫٣ ، ٢ ، ٣٫٦ ، ٤ ، ١

$$\therefore \quad \bar{\text{س}}_١ = \frac{٢٩٫٥}{٦} = ٤٫٩$$

$$\bar{\text{س}}_٢ = \frac{٢٩}{١٠} = ٢٫٩$$

$$\sum (\text{س} - \bar{\text{س}}_١)^{٢} = (٢٫٩)^{٢} + (٢٫١)^{٢} + (٠٫١)^{٢} + (٠٫٤)^{٢} + (١٫٦)^{٢} + (٠٫٤)^{٢} =$$

$$= ١٥٫٧١$$

$$\sum (\text{س} - \bar{\text{س}}_٢)^{٢} = (٠٫١)^{٢} + (١٫٤)^{٢} + (١٫٤)^{٢} + (٠٫٢)^{٢} + (٠٫٩)^{٢} + (٠٫٤)^{٢}$$

$$+ (٠٫٩)^{٢} + (٠٫٧)^{٢} + (١٫١)^{٢} + (١٫٩)^{٢} = ١١٫٠٦$$

$$\therefore \quad \hat{\text{ع}} = \sqrt{\frac{\sum_{١}^{\text{ن}_١} (\text{س} - \bar{\text{س}}_١)^{٢} + \sum (\text{س} - \bar{\text{س}}_٢)^{٢}}{\text{ن}_١ + \text{ن}_٢ - ٢}} =$$

$$= \sqrt{\frac{١٥٫٧١ + ١١٫٠٦}{١٤}} = ١٫٤$$

$$\therefore \quad ت = \frac{٤٫٩ - ٢٫٩}{١٫٤ \sqrt{\frac{١}{٦} + \frac{١}{٦}}} = \frac{٢}{١٫٤ \sqrt{\frac{١٦}{٦٠}}} = \frac{٥}{٧} \; ١٥ = ٢٫٨$$

من جدول ت بدرجات حرية ١٤ ومستوى معنوية ٫٠٥ تساوى ٢٫١٤ وبما أن قيمة ت المحسوبة أكبر من القيم بالجدول ، فلذلك يرفض الفرض القائل بأنه لا يوجد فروق معنوية بين المتوسطات .

مثال (٢) : فى اختبار لمستوى الطلبه فى اجابة مادة ما فى مجموعتين أ ، ب كانت درجات المجموعة الأولى أ هى

٧١ ـ ٧٧ ـ ٨٤ ـ ٧٥ ـ ٧٧ ـ ٧٩ ـ ٧٧ ـ ٧٣ ـ ٧٣

والمجموعة الثانية ب هى

٦٦ ـ ٦٦ ـ ٧٠ ـ ٦٦ ـ ٦٧ ـ ٦٥ ـ ٧١

المطلوب اثبات هل هناك فرق حقيقى بين مستويات الاجابة فى المجموعتين بمستوى

الحل : بطرح ٦٥ من جميع المفردات والتعامل مع المفردات الناتجة وذلك لتسهيل الحل

(أ) ٦ ـ ١٢ ـ ١٩ ـ ١٠ ـ ١٢ ـ ١٤ ـ ١٢ ـ ٨ ـ ٨

(ب) ١ ـ ١ ـ ٥ ـ ١ ـ ٢ ـ صفر ـ ٦

$$\therefore \quad \bar{س}_{١} = \frac{١٠١}{٩} = ١١٫٢$$

$$\bar{س}_{٢} = \frac{٢١}{٨} = ٢٫٦٢٥$$

$$مجـ (س - \bar{س}_{١})^{٢} = (٥٫٢)^{٢} + (٠٫٨)^{٢} + (٧٫٨)^{٢} + (١٫٢)^{٢} + (٠٫٨)^{٢} + (٢٫٨)^{٢}$$

$$+ (٠٫٨)^{٢} + (٣٫٢)^{٢} + (٣٫٢)^{٢} = ١٢٩٫٥٦$$

$$مجـ (س - \bar{س}_{٢})^{٢} = (١٫٦)^{٢} + (١٫٦)^{٢} + (٢٫٤)^{٢} + (١٫٦)^{٢} + (٢٫٤)^{٢} + (٠٫٦)^{٢}$$

$$+ (٢٫٦)^{٢} + (٢٫٦)^{٢} + (٣٫٤)^{٢} = ٣٧٫٨٨$$

$$\therefore\ \text{ع}_{\text{و}} = \sqrt{\frac{\text{مح}\,(\text{س} - \bar{\text{س}}_{١})^{٢} + \text{مح}\,(\text{س} - \bar{\text{س}}_{٢})^{٢}}{\text{ن}_{١} + \text{ن}_{٢} - ٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{١٢٩٫٥٦ + ٣٧٫٨٨}{٥}} = \sqrt{\frac{١٦٧٫٤٤}{١٥}} = ٣٫٦$$

$$\text{ت} = \frac{\bar{\text{س}}_{١} - \bar{\text{س}}_{٢}}{\text{ع}\sqrt{\frac{١}{\text{ن}_{١}} + \frac{١}{\text{ن}_{٢}}}} = \frac{١١٫٢٠٠ - ٢٫٦٢٥}{٣٫٦\sqrt{\frac{١}{٩} + \frac{١}{٨}}} = \frac{٧٣٢٫٧٣}{١٤٥} = ٤٫٩٩$$

وحيث أن $\text{ت}_{(٠٫٠٥ ،\ ١٥)}$ من الجدول هي ٢٫١٣١

ولما كانت القيمة المحسوبة أكبر من قيمة ت من الجدول ، فانه لرفض الفرض القائل بأن هناك لا يوجد فرق بين مستويات الاجابة من المجموعتين ٠

<u>اختيار الفرق بين متوسطين اذا كان تبايني المجتمعين مختلفين</u> :

نفرض أن لدينا مجتمعان تباينهما $\text{ع}_{١}^{٢}$ ، $\text{ع}_{٢}^{٢}$ أخذت عينان حجمهما $\text{ن}_{١}$ ، $\text{ن}_{٢}$ فان

$$\text{ع} = \frac{\bar{\text{س}}_{١} - \bar{\text{س}}_{٢}}{\sqrt{\frac{\text{ع}_{١}^{٢}}{\text{ن}_{١}} + \frac{\text{ع}_{٢}^{٢}}{\text{ن}_{٢}}}}$$

اذا كانت $\text{ع}_{١}$ ، $\text{ع}_{٢}$ معروفتين لدينا ،

$$\text{ت} = \frac{\bar{\text{س}}_{١} - \bar{\text{س}}_{٢}}{\sqrt{\frac{\text{ع}_{١}^{٢}}{\text{ن}_{١}-١} + \frac{\text{ع}_{٢}^{٢}}{\text{ن}_{٢}-١}}}$$

اذا كانت $\text{ع}_{١}$ ، $\text{ع}_{٢}$ غير معروفين لدينـــــا

توزيع ع توزيعا معتادا : فاذا كانت قيمة ع المحسوبة أكبر من قيمة ع فى الجدول بمستوى معنوية معين فيرفض الفرض القائل بأنه لا يوجد فرق معنوى بين المجمعين أما اذا كانت قيمة ع المحسوبة أقل من قيمتها من الجدول بمستوى معنوية معين فاننا يقبل الفرض القائل بأنه يوجد فرق معنوى بين المتوسطين

<u>مثال</u> : أخذت عينتين الأولى من العمال والثانية من الموظفين من مجتمعين وحسب متوسط الدخل سنويا لكل مجموعة وكانت القيمة هى

| | | | |
|---|---|---|---|
| العمال | $ن_1 = ٢٠١$ | $\bar{س}_1 = ١٧٠$ | $ع_1$ للعينة $= ٣$ |
| الموظفين | $ن_2 = ١٠١$ | $\bar{س}_2 = ١٧٥$ | $ع_2$ للعينة $= ٢$ |

فهل هناك فرق معنوى فى الدخل بالنسبة الى المجتمعين ؟

<u>الحل</u> : الانحراف المعيارى للمجتمعين غير معروف وتقديره هو

$$ع = \sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1 - ١} + \frac{ع_2^2}{ن_2 - ١}} = \sqrt{\frac{٩}{٢٠٠} + \frac{٤}{١٠٠}} = \sqrt{٠٫٠٤٥ + ٠٫٠٤}$$

$$= \sqrt{٠٫٠٨٥} = \sqrt{\frac{٨٥}{١٠٠٠}} = ٠٫٢٨$$

$$\therefore\ ع = \frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{٠٫٢٨} = \frac{١٧٠ - ١٧٥}{٠٫٢٨} = \frac{٥}{٠٫٢٨} = ١٧٫٩$$

ولكن $ع_{٠٫٠٥}$ من الجدول يساوى ١٫٩٦

ونرى أن القيمة المحسوبة أكبر من قيمتها فى الجدول بمستوى معنوية ٥ ٪ ولذا يرفض الفرض القائل بأنه يوجد فرق معنوى فى الدخل بالنسبة الى المجتمعين .

مثـال : بفرض أن الانحراف المعيارى للمجتمع الأول ١٠ والمجتمع الثانى ٥ فهل يوجد فرق معنوى فى الدخل بالنسبة الى المجتمعين ؟

الحـل : الانحراف المعيارى للمجتمعين معروف

$$\therefore \; ع = \frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{\sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}}} = \frac{١٧٠ - ١٧٥}{\sqrt{\frac{١٠٠}{٢٠١} + \frac{٢٥}{٢٠١}}} = \frac{٥}{\sqrt{٥ر + ٢٥ر}}$$

$$ع = ٤ر٣٢٥$$

ولكن $ع_{٠٥ر}$ من الجدول يساوى ١ر٩٦

ونرى أن القيمة المحسوبة أكبر من قيمتها فى الجدول بمستوى معنوية ٥٪ ولذا يرفض الفرض القائل بأنه يوجد فرق معنوى فى الدخل بالنسبة الى المجتمعين .

مقارنـة تشتـتى مجموعتـين :

فيما سبق ذكرنا كيفية قياس معنوية الفرق بين متوسطى عينتين والآن نحاول أن نقارن بين تشتتى مجموعتين .

اذا كانت مفردات المجموعة الأولى هى $س_1$ ، $س_2$ ، ... ، $س_{ن_1}$ ومتوسطها $\bar{س}_1$

وعددها $ن_1$

ومفردات المجموعة الثانية هى $س_1$ ، $س_2$ ، ... ، $س_{ن_2}$ ومتوسطها $\bar{س}_2$ وعددها $ن_2$ فيكون التباين التقديرى من العينتين هو

$$ع_1^2 = \frac{مج \; (س - \bar{س})^2}{ن_1 - ١} \quad \text{بدرجات حرية} \quad ن_1 - ١$$

$$ع_٢^٢ = \frac{مجـ (س - \bar{س}_٢)^٢}{ن_٢ - ١} \quad \text{بدرجات حرية} \quad ن_٢ - ١$$

ونكون $ع_١^٢$ ، $ع_٢^٢$ هى تقديرات تباين المجتمعين المأخوذة منها العينتين فاذا كان المجتمعان مختلفان وكان عدد مفردات المجموعة المأخوذة كل منهما كبيرا فان النسبة بين $\frac{ع_١^٢}{ع_٢^٢}$ تختلف اختلافا حقيقيا عن الواحد الصحيح . وقد قام سنديكور بحساب جدول للنسبة $\frac{ع_١^٢}{ع_٢^٢}$ بدرجات حرية ( $ن_١ - ١$ ، $ن_٢ - ١$ ) وبمستوى معنوية ٥٪ ، ١٪ ويسمى هذا الجدول بجدول ف

وبواسطة هذا الجدول يمكننا اختيار معنوية أى نسبة نحصل عليها للتباين $ع_١^٢$ ، $ع_٢^٢$ فاذا كانت النسبة المحسوبة ف = $\frac{ع_١^٢}{ع_٢^٢}$ أكبر مما يقابلها بمستوى معنوية معين فاننا نرفض الفرض القائل بأن تباين المجتمعين متساويان .

مثال (١) : فى احدى تجارب تغذية الحيوان استحضر الباحث ٢٠ قطعة من الماشية وقسمها الى مجموعتين أ ، ب وأعطى لكل مجموعة ١٠٠ رطل من العلف وكانت الزيادة فى المجموعتين كما يلى :

أ : ١٧ ـ ٢٢ ـ ٢٢ ـ ١٥ ـ ٢٤ ـ ٢٢ ـ ٢١ ـ ٢١ ـ ١٧ ـ ٢١

ب : ٢٠ ـ ٢١ ـ ٢١ ـ ٢٢ ـ ٢٤ ـ ٢٢ ـ ٢٣ ـ ٢١ ـ ٢٢ ـ ٢٣

والمطلوب معرفة ما اذا كان هناك اختلافا حقيقيا بين هاتين المجموعتين فى التباين

الحل : يمكن طرح العدد ٢٠ من جميع المفردات وذلك لتبسيط الحساب فى الحل

أ : ـ٣ ، ٢ ، ٢ ، ـ٥ ، ٤ ، ٢ ، ١ ، ١ ، ـ٣ ، ١ ، $\bar{س}_١ = ٢ر$

ب : صفر ، ١ ، ١ ، ٢ ، ٤ ، ٢ ، ٣ ، ١ ، ٢ ، ٣ $\bar{س}_٢ = ٩ر١$

$$\text{مح}\,(\text{س} - \bar{\text{س}}_{1})^{2} = (٣٫٢)^{2} + (١٫٨)^{2} + (١٫٨)^{2} + (٥٫٢)^{2} + (٣٫٨)^{2} + (١٫٨)^{2}$$

$$+ (٫٨)^{2} + (٣٫٢)^{2} + (٫٨)^{2} = ٧٣٫٦$$

$$\text{مح}\,(\text{س} - \bar{\text{س}}_{2})^{2} = (١٫٩)^{2} + (٠٫٩)^{2} + (٠٫٩)^{2} + (٠٫١)^{2} + (١٫٢)^{2} + (٠٫١)^{2}$$

$$+ (١٫١)^{2} + (٠٫٩)^{2} + (٠٫١)^{2} + (١٫١)^{2} = ١٢٫٩$$

$$\therefore\quad \text{ع}_{1}^{2} = \frac{٧٣٫٦}{\text{ن}_{1} - ١} = \frac{٧٣٫٦}{٩} = ٨٫١٧٨$$

$$\text{ع}_{2}^{2} = \frac{١٢٫٩}{\text{ن}_{1} - ١} = \frac{١٢٫٩}{٩} = ١٫٤٣٣$$

$$\therefore\quad \text{ف} = \frac{\text{ع}_{2}^{2}}{\text{ع}_{2}^{2}} = \frac{٨٫١٧٨}{١٫٤٣٣} = ٥٫٧١$$

$\text{ف}_{(٠٫٠٥،\ ٩،\ ٩)}$ من الجدول يساوى ٣٫١٨

∴ القيمة المحسوبة أكبر من القيمة فى الجدول بمستوى معنوية ٥ % ودرجات حرية ( ٩ ، ٩ )

ولذلك نرفض الفرض القائل بأن $\text{ع}_{1} = \text{ع}_{2}$ أى أن المجموعتين يختلفان اختلافا حقيقيا عن بعضهما فى التباين ٠

<u>مثال (٢)</u> : عمل اختبار لمجموعتين من الطلبه المجموعة الأولى حجمها ٩ ومفرداتها هى

٦٧ — ٤٨ — ٥٥ — ٧٢ — ٧٦ — ٦١ — ٧٠ — ٥٨ — ٦٣

والثانية حجمها ١٠ ومفرداتها هى

٦٣ — ٦٩ — ٦٤ — ٥٩ — ٧١ — ٦٥ — ٥٨ — ٦٦ — ٦٠ — ٧٠

فهل يستدل من هذه النتائج أن أحدى المجموعتين أكثر تفاوتا عن الأخرى

<u>الحــل</u> : يمكن طرح العدد ٦٣ من جميع المفردات وذلك لتسهيل الحسابات فى الحــل

المجموعة الأولى : ٤ ، ــ١٥ ، ــ٨ ، ٩ ، ١٣ ، ــ٢ ، ٧ ، ــ٥ ، صفر

المجموعة الثانية : صفر ، ٦ ، ١ ، ــ٤ ، ٨ ، ٢ ، ــ٥ ، ٣ ، ــ٣ ، ٧

$$\bar{\text{س}}_{١} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣} = \text{٣ر٠}$$

$$\bar{\text{س}}_{٢} = \frac{١٥}{١٠} = \text{٥ر١}$$

يمكن اثبات أن

للمجموعة الأولى $\text{مج} \left(\text{س} - \bar{\text{س}}_{١}\right)^{٢} = \text{١ر٦٣٢٫٠}$

" الثانية $\text{مج} \left(\text{س} - \bar{\text{س}}_{٢}\right)^{٢} = \text{٥٠ر١٩٠}$

$$\therefore \quad \text{ع}_{١}^{٢} = \frac{\text{٠٠ر٦٣٢}}{٨} = ٧٩$$

$$\text{ع}_{٢}^{٢} = \frac{\text{٥ر١٩٠}}{٩} = \text{١٧ر٢١}$$

$$\therefore \quad \text{ف} = \frac{\text{ع}_{١}^{٢}}{\text{ع}_{٢}^{٢}} = \frac{٧٩}{\text{١٧ر٢١}} = \text{٧٣ر٣}$$

$\text{ف}_{(\text{٠٥ر٠} ، ٨ ، ٩)}$ من الجدول = ٩ر٣

نرى أن ف المحسوبة أقل من ف من الجدول

$\therefore$ نقبل الفرض القائل بأنه لا يوجد تفاوت بين $\text{ع}_{١}$ ، $\text{ع}_{٢}$

## البـــــاب الثالـــــــث

## نظرية التقديـــر Theory of estimation

### طريقـــة المربعـــات الصغـــــرى

كثيرا ما يستدعى فى التطبيقات العملية ايجاد العلاقة بين المتغيرات وبعضها أو بمعنى آخـــر المحاولة الى الوصول الى القانون الذى يربط بين هذه المتغيرات ففى النظرية الاقتصادية يهـــدف المخطط الى ايجاد العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية على أساس الاستقرار بالنسبة الى سلـــوك الوحدات الاقتصادية ولهذا يجد أن من أهم ما يقوم به هو حساب هذه العلاقات فى دوال رياضيـــة يسهل منها التنبؤ بالظاهرة الاقتصادية فى المستقبل فمثلا دالة الطلب demand function التى تحدد كميات الطلب على السلع المختلفة والأسعار أو دالة الانتاج production function وهى الدالة التى تظهر العلاقة بين المدخلات والمخرجات ٠

ومن النماذج المختلفة التى يقابلها المخطط هى :

(١) : دوال خطية على الصورة

$$ص = أ + أ_١ س$$

(٢) دوال غير خطية على الصورة

$$ص = أ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + \cdots + أ_ل س^ل$$

(٣) دوال أسية على الصورة

$$ص = أ س_١^{ب_١} س_٢^{ب_٢} \cdots س_ن^{ب_ن}$$

<u>والسؤال الآن</u> : ما هى أحسن صورة من الصورة السابقة تمثل البيانات المعطاه أى اذا كانت الدالة خطية التى تربط العلاقة بين المتغيرات ما هى أحسن قيم للثوابت $\text{أ}$ ، $\text{أ}_{١}$

<u>أولا : النموذج الخطى $\text{ص} = \text{أ} + \text{أ}_{١}\,\text{س}$ وتقدير الثوابت $\text{أ}$ ، $\text{أ}_{١}$</u>

نفرض أن متغير اقتصادى س ( الاسعار ) يؤثر فى متغير ص ( الطلب أو الكميات ) وأن العلاقة بينهما خطية على الصورة

$$\text{ص} = \text{أ} + \text{أ}_{١}\,\text{س}$$

والهدف هو تقدير قيم أ ، $\text{أ}_{١}$ وتكون وسيلة التقدير هى القيم المشاهدة لكل من ص ، س وأحدى الطرق المتبعة فى ذلك هى طريقة المربعات الصغرى .

نفرض أن القيم المشاهدة هى

$$\text{ص} : \text{ص}_{١} ، \text{ص}_{٢} ، \cdots ، \text{ص}_{\text{ن}}$$

$$\text{س} : \text{س}_{١} ، \text{س}_{٢} ، \cdots ، \text{س}_{\text{ن}}$$

ونفرض أننا نريد توفيق خط يمر من هذه النقط وصورته هى

$$\text{ص} = \hat{\text{أ}} + \hat{\text{أ}}_{١}\,\text{س}$$

حيث $\hat{\text{أ}}$ ، $\hat{\text{أ}}_{١}$ هى تقديرات للمعاملات أ ، $\text{أ}_{١}$ من القيم المشاهدة نفرض أن ص هى القيمة المشاهدة المقابلة للقيمة س وأن

$$\text{ص}_{\text{ر}} = \text{أ} + \text{أ}_{١}\,\text{س}_{\text{ر}}$$

نجد أن الفرق بين ص ، $\text{ص}_{\text{ر}}$ عبارة عن تشتت القيم $\text{ص}_{١}$ ، $\text{ص}_{٢}$ ، $\cdots$ ، $\text{ص}_{\text{ن}}$ عن الخط المستقيم ص . والمطلوب هو أن يكون مجموع مربعات هذه التشتتات أصغر ما يمكن أى أن

$$\text{م} = \text{مج}\,(\text{ص} - \text{ص}_{\text{ر}})^{٢} \quad \text{أصغر ما يمكن}$$

$$\text{أو} \quad \text{م} = \text{مج}\,(\text{ص} - \text{أ} - \text{أ}_{١}\,\text{س}_{\text{ر}})^{٢} \quad \text{أصغر ما يمكن}$$

ولكي يكون الدالة م نهاية صغرى فان الشرط اللازم لذلك هو أن قيمة التفاضل بالنسبة الى أ ، $أ_١$ يساوى صفر أى أن

$$\frac{\partial م}{\partial أ} = \text{صفر} \quad ، \quad \frac{\partial م}{\partial أ_١} = \text{صفر}$$

من هذا نحصل على

$$-\ ٢\ مح\ (ص - أ - أ_١\ س) = \text{صفر}$$

$$-\ ٢\ مح\ س\ (ص - أ - أ_١\ س) = \text{صفر}$$

أى أن

$$مح\ ص = ن\ أ + أ_١\ مح\ س \quad ..... \quad (١)$$

$$مح\ ص\ س = أ\ مح\ س + أ_١\ مح\ س^٢ \quad \quad (٢)$$

تسمى بالمعادلتين الشرطيتين

والمعادلة (١) ، (٢) عبارة عن معادلتين من الدرجة الأولى فى مجهولين ويمكن حلهما بالطرق المعروفة وذلك بعد ايجاد قيمة كل من مح ص ، مح س ، مح $س^٢$ ، مح س ص

<u>مثال</u> :

اذا كانت العلاقة بين المتغيرين س ، ص للبيانات التالية :

س : ٧ ـ ٦ ـ ٦ ـ ٥ ـ ٤ ـ ٤ ـ ٣ ـ ٣ ـ ١ ـ ١

ص : ١٠ ـ ٩ ـ ٨ ـ ٦ ـ ٤ ـ ٣ ـ ٣ ـ ٢ ـ ٣ ـ ٢

خطية على الصورة $ص = أ + أ_١\ س$

من واقع البيانات السابقة قدر كل من أ ، $أ_١$

<u>الحل</u> : نجد أن

$$مح\ س = ٤٠$$

$$مح\ ص = ٥٠$$

مح س ص = ٢٥٠

مح $س^٢$ = ١٩٨

بالتعويض عن هذه القيم فى المعادلات (١) ، (٢) نحصل على

٥٠ = ١٠ أ + ٤٠ $أ_١$ .... (١)

٢٥٠ = ٤٠ أ + ١٩٨ $أ_١$ .... (٢)

بحل هذه المعادلتين وذلك بضرب المعادلة (١) فى ٤ والطرح نحصل على

$أ_١ = \frac{-٥٠}{-٣٨} = ١٫٣١$

بالتعويض فى (١) عن قيمة $أ_١$ نحصل على

أ = −٠٫٢٤

ومنهما فان المعادلة التى يمكن البيانات المعطاه هى

ص = ٠٫٢٤١ + ١٫٣١ س

<u>مثال (٢)</u> : اذا كانت العلاقة بين المتغيرين س ، ص للبيانات التالية

س : ١٣ ، ١٢ ، ١٠ ، ١٠ ، ٨ ، ٦ ، ٦ ، ٥ ، ٣ ، ٢

ص : ١١ ، ١٤ ، ١١ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ٣ ، ٧ ، ٦ ، ١

خطية على الصورة ص = أ + $أ_١$ س

من واقع البيانات السابقة قدر كل من أ ، $أ_١$

<u>الحل</u> : من السهل اثبات أن

مح س = ٧٥

مح ص = ٨٠

مح س ص = ٧٠٢ ، مح $س^٢$ = ٦٨٧

بالتعويض عن هذه القيم فى المعادلتين الشرطيتين (١) ، (٢) نحصل على

$$٨٠ = ١٠ \text{ أ} + ٧٥ \text{ أ}_١$$

$$٧٠٢ = ٧٥ \text{ أ} + ٦٨٧ \text{ أ}_١$$

بحل هاتين المعادلتين نحصل على

$$\text{أ}_١ = ٤٥ \quad (\text{ بطريقة الحذف })$$

$$\text{أ} = -٣٢٩٫٥$$

$$\therefore \quad \text{ص} = -٣٢٥٫٥ + ٤٥ \text{ س}$$

صور أخرى يمكن تحويلها الى معادلة خط مستقيم أو الى صورة خطية

(١) $\text{ص} = \text{أ} \; \text{س}^{\text{أ}_١}$

بأخذ اللوغاريتم للطرفين نحصل على

$$\text{لو ص} = \text{لو أ} + \text{أ}_١ \text{ لو س} \quad ...... \qquad (١)$$

بوضع $\text{ص}' = \text{لو ص}$ ، $\text{س}' = \text{لو س}$ نحصل على

$$\text{ص}' = \text{أ}' + \text{أ}_١ \text{ س}' \qquad (٢)$$

وهذه معادلة خطية

مثال : اذا كانت العلاقة بين المتغيرين س ، ص للبيانات التالية

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| س : | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ |
| ص : | ٢ | ١١ | ٢٨ | ٤٥ | ٧٠ | ١١٠ |

على الصورة $\text{ص} = \text{أ} \; \text{س}^{\text{أ}_١}$

من واقع البيانات السابقة قدر كل من أ ، $\text{أ}_١$

الحل : اوجد لوغاريتم كل من س ، ص

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| س (لو س) : | صفر | ٣٠ر | ٤٨ر | ٦٠ر | ٧ر | ٧٨ر |
| ص (لو ص) : | ٣ر | ١ر٠٤ | ١ر٤٥ | ١ر٦٥ | ١ر٨٥ | ٢ر٠٤ |

مج س = ٢ر٨٦

مج ص = ٨ر٣٣

مج س ص = ٤ر٨٨

مج $\text{س}^2$ = ١ر٧٨

بالتعويض عن هذه القيم فى المعادلات الشرطية نحصل على

٨ر٣٣ = ٦ أ + ٢ر٨٦ $\text{أ}_1$

٤ر٨٨ = ٢ر٨٦ أ + ١ر٧٨ $\text{أ}_1$

وحلهما نحصل على أ = ٣٤ر ، $\text{أ}_1$ = ٢ر٢

∴ ص = ٣٤ر٠ + ٢ر٢٠ س أو ص = ٣٤ر٠ $\text{س}^{٢ر٢٠}$

(أ) ص = أ $\text{هـ}^{\text{أ}_1 \text{س}}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على

لو ص = لو أ + $\text{أ}_1$ س

بوضع ص = لو ص ، لو أ = أ نحصل على

ص = أ + $\text{أ}_1$ س وهذه معادلة خطية

ص = $\dfrac{١}{\text{أ} + \text{أ}_1 \text{س}}$

بقلب الكسر لكل من الطرفين نحصل على

$$\frac{1}{\text{ص}} = \text{أ} + \text{أ}_1\ \text{س}$$

بوضع ص = $\frac{1}{\text{ص}}$ نحصل على

ص = أ + $\text{أ}_1$ س وهذه معادلة خطية

**مثال :** اذا كانت العلاقة بين المتغيرين س ، ص للبيانات التالية

س : صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

ص : ٠٫٣٢ ، ٠٫٢٠ ، ٠٫١٤ ، ٠٫١١ ، ٠٫٠٩ ، ٠٫٠٨

على الصورة ص = $\frac{1}{\text{أ} + \text{أ}_1\ \text{س}}$

من واقع البيانات التالية قدر قيمة كل من أ ، $\text{أ}_1$

**الحل :** نوجد قيم $\frac{1}{\text{ص}}$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| س : | صفر | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ |
| ص = $\frac{1}{\text{ص}}$ : | $\frac{25}{8}$ | ٥ | $\frac{50}{7}$ | $\frac{100}{11}$ | $\frac{100}{9}$ | $\frac{25}{2}$ |

ص = أ + $\text{أ}_1$ س

من السهل اثبات أن

مح س = ١٥

مح س = ٤٧٫٩٥

مح س ص = ١٥٣٫٥ ، مح $\text{س}^2$ = ١٥

∴ بالتعويض فى المعادلتين الشرطين نحصل على

٤٧٫٩٥ = ٦ أ + ١٥ $\text{أ}_1$

١٥٣٫٥ = ١٥ أ + ٥٥ $\text{أ}_1$

وبحل هاتين المعادلتين بطريقة الحذف نحصل على

$\text{أ}_1 = ١٫٩٢$ ، $\text{أ} = ٣٫١٩$

$\therefore\ \text{ص} = \text{أ} + \text{أ}_1\ \text{س} = ٣٫١٩ + ١٫٩٢\ \text{س}$

أو $\frac{1}{\text{ص}} = ٣٫١٩ + ١٫٩٢\ \text{س}$

$$\therefore\ \text{ص} = \frac{1}{٣٫١٩ + ١٫٩٢\ \text{س}}$$

**ثانيا : العلاقة غير الخطية :**

فى كثير من المشاكل الاقتصادية عند تمثيل الظاهرة بين المتغير التابع والمتغير المستقل بيانيا يكون نمط الظاهرة على شكل منحنى ودرجته مثلا ل أى أنه اذا كانت البيانات المتاحة للمتغير المستقل والمتغير التابع هى

$\text{س} :\ \text{س}_1 ، \text{س}_2 ، \cdots ، \text{س}_{\text{ن}}$

$\text{ص} :\ \text{ص}_1 ، \text{ص}_2 ، \cdots ، \text{ص}_{\text{ن}}$

فتكون العلاقة بينهما على الصورة

$$\text{ص} = \text{أ} + \text{أ}_1\ \text{س} + \text{أ}_2\ \text{س}^2 + \cdots + \text{أ}_{\text{ل}}\ \text{س}^{\text{ل}}$$

والمطلوب من واقع البيانات تقدير قيمة كل من $\text{أ} ، \text{أ}_1 ، \cdots \text{أ}_{\text{ل}}$ أو بمعنى آخر أحسن تقدير للقيم $\text{أ} ، \text{أ}_1 ، \cdots ، \text{أ}_{\text{ل}}$ التى تجعل الفرق بين القيمة الحقيقية للمتغير ص والقيمة المشاهدة ص مثلا أقل ما يمكن

وباستخدام طريقة المربعات الصغرى يمكن ايجاد تقديرات للثوابت $\text{أ} ، \text{أ}_1 ، \text{أ}_2 ، \cdots ، \text{أ}_{\text{ل}}$ أى أن

$$\text{م} = \text{مج}\ (\text{ص} - \hat{\text{ص}})^2 \quad \text{أقل ما يمكن}$$

أو $م = مج\ (ص - أ - أ_{١}\, س_{هـ} - أ_{٢}\, س_{هـ}^{٢} - \cdots - أ_{ل}\, س_{هـ}^{ل})^{٢}$ أقل ما يمكن ولكى يكون الدالة $م$ نهاية صغرى فان الشرط اللازم لذلك هو أن قيمة التفاضل بالنسبة الى $أ ، أ_{١} ، أ_{٢} ، \cdots ، أ_{ل}$ يساوى صفرا أى أن

$$\frac{\partial م}{\partial أ} = صفر \quad ، \quad \frac{\partial م}{\partial أ_{١}} = صفر \quad ، \quad \frac{\partial م}{\partial أ_{٢}} = صفر \quad ، \cdots ، \quad \frac{\partial م}{\partial أ_{ل}} = صفر$$

ومن هذة الشروط نحصل على

$$مج\ ص = ن\, أ + أ_{١}\, مج\ س_{هـ} + أ_{٢}\, مج\ س_{هـ}^{٢} + \cdots + أ_{ل}\, مج\ س_{هـ}^{ل}$$

$$مج\ س_{هـ}\, ص = أ\, مج\ س_{هـ} + أ_{١}\, مج\ س_{هـ}^{٢} + أ_{٢}\, مج\ س_{هـ}^{٣} + \cdots + أ_{ل}\, مج\ س_{هـ}^{ل+١}$$

.....................................................................

.....................................................................

$$مج\ س_{هـ}^{ل}\, ص = أ\, مج\ س_{هـ}^{ل} + أ_{١}\, مج\ س_{هـ}^{ل+١} + أ_{٢}\, مج\ س_{هـ}^{ل+٢} + \cdots + أ_{ل}\, مج\ س_{هـ}^{٢ل}$$

ومن ذلك نرى أن لدينا عدد $(ل + ١)$ من المعادلات يوجد بها عدد $(ل + ١)$ من المجاهيل وبحل هذه المعادلات أما بطريقة الحذف أو بطريقة المحددات أو بطريقة مقلوب المصفوفة يمكن الحصول على قيمة المجاهيل $أ ، أ_{١} ، أ_{٢} ، \cdots ، أ_{ل}$ التى تجعل قيمة الدالة $م$ أقل ما يمكن ٠

وسنحاول أن نذكر بشىء من التفصيل طريقة الى توفيق منحنى من الدرجة الثانية أى ايجاد تقديرات لكل من $أ ، أ_{١} ، أ_{٢}$ ( وبنفس الطريقة يمكن توفيق منحنى درجته أكبر من ذلك ) ٠

بفرض أن العلاقة بين المتغير المستقل $س$ والمتغير التابع $ص$ على الصورة

$$ص = أ + أ_{١}\, س + أ_{٢}\, س^{٢}$$

المطلوب الوصول الى أحسن تقدير لمعاملات $أ ، أ_{١} ، أ_{٢}$ من واقع البيانات أو بمعنى آخر توفيق أحسن منحنى يمثل البيانات وباستخدام طريقة المربعات الصغرى ٠

$$م = مج\ (ص - ص_{هـ})^{٢} \quad \text{أقل ما يمكن}$$

$$\text{أو} \quad م = مج\ (ص - أ - أ_{١}\, س_{هـ} - أ_{٢}\, س_{هـ}^{٢})^{٢} \quad \text{أقل ما يمكن}$$

والتفاضلات بالنسبة الى أ ، $أ_١$ ، $أ_٢$ ومساوتها بالصفر أى أن

$$\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{أ}} = \text{صفر} \quad , \quad \frac{\partial \text{م}}{\partial \text{أ}_١} = \text{صفر} \quad , \quad \frac{\partial \text{م}}{\partial \text{أ}_٢} = \text{صفر}$$

ومنها نحصل على

$$\text{مح ص} = \text{ن أ} + \text{أ}_١ \text{ مح س}_\text{ر} + \text{أ}_٢ \text{ مح س}^٢_\text{ر}$$

$$\text{مح س}_\text{ر} \text{ ص} = \text{أ مح س}_\text{ر} + \text{أ}_١ \text{ مح س}^٢_\text{ر} + \text{أ}_٢ \text{ مح س}^٣_\text{ر} \qquad (١)$$

$$\text{مح س}^٢_\text{ر} \text{ ص} = \text{أ مح س}^٢_\text{ر} + \text{أ}_١ \text{ مح س}^٣_\text{ر} + \text{أ}_٢ \text{ مح س}^٤_\text{ر}$$

وهذه هى ثلاثة معادلات فى ثلاث مجاهيل أ ، $أ_١$ ، $أ_٢$ وتحل اما بطريقة الحذف أو بطريقة المحددات أو بطريقة المصفوفات .

<u>بطريقـــة المحددات</u>

$$\text{أ} = \frac{\begin{vmatrix} \text{مح ص} & \text{مح س}_\text{ر} & \text{مح س}^٢_\text{ر} \\ \text{مح س}_\text{ر}\text{ص} & \text{مح س}^٢_\text{ر} & \text{مح س}^٣_\text{ر} \\ \text{مح س}^٢_\text{ر}\text{ ص} & \text{مح س}^٣_\text{ر} & \text{مح س}^٤_\text{ر} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{ن} & \text{مح س}_\text{ر} & \text{مح س}^٢_\text{ر} \\ \text{مح س}_\text{ر} & \text{مح س}^٢_\text{ر} & \text{مح س}^٣_\text{ر} \\ \text{مح س}^٢_\text{ر} & \text{مح س}^٣_\text{ر} & \text{مح س}^٤_\text{ر} \end{vmatrix}} \quad , \quad \text{أ}_١ = \frac{\begin{vmatrix} \text{ن} & \text{مح ص} & \text{مح س} \\ \text{مح س}_\text{ر} & \text{مح س}_\text{ر}\text{ص} & \text{مح س} \\ \text{مح س}^٢_\text{ر} & \text{مح س}^٢_\text{ر}\text{ ص} & \text{مح س} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{ن} & \text{مح س}_\text{ر} & \text{مح س} \\ \text{مح س}_\text{ر} & \text{مح س}^٢_\text{ر} & \text{مح س} \\ \text{مح س}^٢_\text{ر} & \text{مح س}^٣_\text{ر} & \text{مح س} \end{vmatrix}}$$

$$\text{أ}_٢ = \frac{\begin{vmatrix} \text{ن} & \text{مح س}_\text{ر} & \text{مح ص} \\ \text{مح س}_\text{ر} & \text{مح س}^٢_\text{ر} & \text{مح س}_\text{ر}\text{ص} \\ \text{مح س}^٢_\text{ر} & \text{مح س}^٣_\text{ر} & \text{مح س}^٢_\text{ر}\text{ ص} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{ن} & \text{مح س}_\text{ر} & \text{مح س}^٢_\text{ر} \\ \text{مح س}_\text{ر} & \text{مح س}^٢_\text{ر} & \text{مح س}^٣_\text{ر} \\ \text{مح س}^٢_\text{ر} & \text{مح س}^٣_\text{ر} & \text{مح س}^٤_\text{ر} \end{vmatrix}}$$

مثـال عددى :

اذا كانت العلاقة بين المتغيرين س ، ص للبيانات التالية

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| س : | ١٦ | ١٧ | ١٨ | ١٩ | ٢٠ | ٢١ | ٢٢ | ٢٣ | ٢٤ |
| ص : | ٦٦ | ٥٧ | ٥٦ | ٤٧ | ٤٥ | ٤١ | ٤١ | ٤٢ | ٣٨ |

على الصورة ص = أ + $أ_١$ س + $أ_٢$ $س^٢$

قدر من واقع البيانات السابقة كل من أ ، $أ_١$ ، $أ_٢$

الحـل : لتبسيط الحسابات نطرح من المتغير المستقل س ١٥ ومن المتغير التابع ص العدد ٣٨ نحصل على

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| س = س ـ ١٥ : | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ |
| ص = ص ـ ٣٨ : | ٢٨ | ١٩ | ١٨ | ٩ | ٧ | ٣ | ٣ | ٤ | صفر |

من السهل اثبات أن

مجـ س = ٤٥ ، مجـ ص = ٩١ ، مجـ $س^٢$ = ٢٨٥ ، مجـ $س^٣$ = ٢٠٢٥

مجـ $س^٤$ = ١٥٣٣٣ ، مجـ س ص = ٢٦٢ ، مجـ $س^٢$ ص = ١٠٩٦

بالتعويض عن هذه القيم فى (١) نحصل على

٩١ = ٩ أ + ٤٥ $أ_١$ + ٢٨٥ $أ_٢$

٢٦٢ = ٤٥ أ + ٢٨٥ $أ_١$ + ٢٠٢٥ $أ_٢$ (٢)

١٠٩٦ = ٢٨٥ أ + ٢٠٢٥ $أ_١$ + ١٥٣٣٣ $أ_٢$

وهذه عبارة عن ثلاث معادلات فى ثلاث مجاهيل أ ، $أ_١$ ، $أ_٢$ يمكن ايجاد قيم هذه المجاهيل بطريقة الحذف نحصل على

ص = ٢٩٦٫٨٥٦ ـ ٢١٫٩٧٣ س + ٠٫٤٩٦ $س^٢$

## ثالثـــا : الانحدار المتعدد :

يصادفنا أيضا فى الدراسات الاقتصادية ايجاد العلاقة من متغير تابع ومتغيرات مستقلة فمثـــلا دالة الانتاج نرى أنها العلاقة بين كمية أو قيمة الانتاج ورأس المال والعمالة ( مستلزمات الانتاج ) .

فاذا افترضنا أن المتغير التابع ص والمتغيرات المستقلة هى $س_1$ ، $س_2$ ، ... ، س وأن البيانات المعطاه هى

| ص | $س_1$ | $س_2$ | ......... | $س_م$ | الوسط الحسابى $\bar{ص}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $ص_1$ | $س_{11}$ | $س_{12}$ | ......... | $س_{1م}$ | $\bar{س}_1$ |
| $ص_2$ | $س_{12}$ | $س_{22}$ | ......... | $س_{2م}$ | $\bar{س}_2$ |
| . | . | . | ......... | . | . |
| . | . | . | ......... | . | . |
| . | . | . | ......... | . | . |
| $ص_ن$ | $س_{1ن}$ | $س_{2ن}$ | ......... | $س_{نم}$ | $\bar{س}$ |

أى أن لكل من المتغير التابع والمتغيرات المستقلة عدد ن من القيم ويكون الهدف الوصول الى أحسن صورة للعلاقة بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة على الصورة

$$ص = أ + أ_1 س_1 + .... + أ_م س_م \quad ...... \quad (1)$$

أى الوصول الى أحسن تقدير لقيم كل من أ ، $أ_1$ ، ..... ، $أ_م$ والطريقة فى ذلك هـو أن يكون مجموع مربعات تشتتا القيم عن (١) أصغر ما يمكن أى أن

$$م = مج\ (ص - ص_ل)^2 \text{ أقل ما يمكن}$$

أو $م = مج\ (ص - أ - أ_1 س_{1ل} - أ_2 س_{2ل} - .... أ_م س_{مل})^2$ أقل مايمكن

والشروط اللازمة لكى يكون الدالة م أقل ما يمكن هى

$$\frac{\partial م}{\partial أ} = صفر \quad ، \quad \frac{\partial م}{\partial أ_1} = صفر \quad ، \quad .... \quad ، \quad \frac{\partial م}{\partial أ_م} = صفر$$

ومن هذه الشروط نحصل على

$$\text{مح}\ ص = ن\ أ + أ_{١}\ \text{مح}\ س_{١ل} + أ_{٢}\ \text{مح}\ س_{٢ل} + \cdots\cdots + أ_{م}\ \text{مح}\ س_{مل}$$

$$\text{مح}\ س_{١ل}\ ص = أ\ \text{مح}\ س_{١ل} + أ_{١}\ \text{مح}\ س_{١ل}^{٢} + أ_{٢}\ \text{مح}\ س_{١ل}\ س_{٢ل} + \cdots + أ_{م}\ \text{مح}\ س_{مل}\ س_{١ل}$$

..................................................................................................

..................................................................................................

$$\text{مح}\ س_{مل}\ ص = أ\ \text{مح}\ س_{مل} + أ_{١}\ \text{مح}\ س_{١ل}\ س_{مل} + أ_{٢}\ \text{مح}\ س_{٢ل}\ س_{مل} + \cdots + أ_{م}\ \text{مح}\ س_{مل}^{٢}$$

وهذه هي مجموعة من المعادلات عددها ( م + ١ ) بها عدد ( م + ١ ) أيضا من المجاهيل وبالطرق المعروفة لحل مثل هذه المعادلات يمكن ايجاد تقدير لقيم كل من $أ$ ، $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، ... ، $أ_{م}$

يمكن كتابة المعادلة (١) على الصورة

$$ص_{ل} = أ + أ_{١}\ (س_{١ل} - \bar{س}_{١}) + أ_{٢}\ (س_{٢ل} - \bar{س}_{٢}) + \cdots + أ_{م}\ (س_{مل} - \bar{س}_{م})$$

وبتطبيق قاعدة النهايات الصغرى نحصل على

$$\bar{ص} = \frac{\text{مح}\ ص}{ن} = أ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (٢)$$

$$\text{مح}\ (س_{١ل} - \bar{س}_{١})(ص - \bar{ص}) = أ_{١}\ \text{مح}\ (س_{١ل} - \bar{س}_{١})^{٢} + \cdots\cdots\cdots$$
$$+ أ_{م}\ \text{مح}\ (س_{١ل} - \bar{س}_{١})(س_{مل} - \bar{س}_{م})$$

$$\text{مح}\ (س_{٢ل} - \bar{س}_{٢})(ص - \bar{ص}) = أ_{١}\ \text{مح}\ (س_{١ل} - \bar{س}_{١})(س_{٢ل} - \bar{س}_{٢}) + \cdots\cdots$$
$$+ أ_{م}\ \text{مح}\ (س_{٢ل} - \bar{س}_{٢})(س_{مل} - \bar{س}_{م})$$

..................................................................................................

..................................................................................................

$$\text{مح}\ (س_{مل} - \bar{س}_{م})(ص - \bar{ص}) = أ_{١}\ \text{مح}\ (س_{١ل} - \bar{س}_{١})(س_{مل} - \bar{س}_{م}) + \cdots\cdots\cdots$$
$$+ أ_{م}\ \text{مح}\ (س_{مل} - \bar{س}_{م})^{٢}$$

يوضع

$$\sum_{ل = ١}^{ن} (س_ل - \bar{س})(ص - \bar{ص}) = \beta_{٠ر}$$

$$\sum (س_ل - \bar{س})(س_{ك ل} - \bar{س}_ك) = \beta_{رك}$$

نحصل على

$$\beta_{٠١} = أ_١ \beta_{١١} + أ_٢ \beta_{٢١} + أ_٣ \beta_{٣١} + \cdots + أ_ر \beta_{ر١}$$

$$\beta_{٠٢} = أ_١ \beta_{١٢} + أ_٢ \beta_{٢٢} + أ_٣ \beta_{٣٢} + \cdots + أ_ر \beta_{ر٢}$$

..................................................................

..................................................................

$$\beta_{٠ر} = أ_١ \beta_{١ر} + أ_٢ \beta_{٢ر} + أ_٣ \beta_{٣ر} + \cdots + أ_ر \beta_{رر}$$

يمكن حل هذه المعادلات بالطرق المعروفة نحصل على $أ_١$ ، $أ_٢$ ، ... ، $أ_ر$ ، $أ = \bar{ص}$

وسنحاول أن نذكر بشيء من التفصيل طريقة الوصول الى تقدير لقيم $أ$ ، $أ_١$ ، $أ_٢$

نفرض أن المعادلة (١) على الصورة

$$ص = أ + أ_١ س_١ + أ_٢ س_٢ \qquad \cdots\cdots \qquad (٢)$$

والمطلوب تقدير قيم $أ$ ، $أ_١$ ، $أ_٢$

يمكن وضع المعادلة السابقة على الصورة

$$ص = أ + أ_١ (س_١ - \bar{س}_١) + أ_٢ (س_٢ - \bar{س}_٢)$$

باتباع الطريقة العامة السابقة نحصل على

$$أ = \bar{ص}$$

$$\beta_{١١} أ_١ + \beta_{٢١} أ_٢ = \beta_{٠١}$$

$$\beta_{١٢} أ_١ + \beta_{٢٢} أ_٢ = \beta_{٠٢} \qquad (٣)$$

حيث $\beta_{01} = \text{مح}\,(\text{س}_{1\text{ل}} - \bar{\text{س}}_1)(\text{ص} - \bar{\text{ص}})$

$$\beta_{02} = \text{مح}\,(\text{س}_{2\text{ل}} - \bar{\text{س}}_2)(\text{ص} - \bar{\text{ص}})$$

$$\beta_{21} = \beta_{12} = \text{مح}\,(\text{س}_{2\text{ل}} - \bar{\text{س}}_2)(\text{س}_{1\text{ل}} - \bar{\text{س}})$$

$$\beta_{11} = \text{مح}\,(\text{س}_{1\text{ل}} - \bar{\text{س}}_1)^2 ، \quad \beta_{22} = \text{مح}\,(\text{س}_{2\text{ل}} - \bar{\text{س}}_{22})^2$$

وحل المعادلة (٣) بطريقة الحذف نحصل على

$$\text{أ}_1 = \frac{\beta_{01}\,\beta_{22} - \beta_{02}\,\beta_{12}}{\beta_{11}\,\beta_{22} - \beta_{21}^2} ، \quad \text{أ}_2 = \frac{\beta_{02}\,\beta_{11} - \beta_{01}\,\beta_{21}}{\beta_{11}\,\beta_{22} - \beta_{21}^2}$$

<u>وبطريقة المحـددات</u>

$$\text{أ}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \beta_{01} & \beta_{12} \\ \beta_{02} & \beta_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{vmatrix}} ، \quad \text{أ}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{01} \\ \beta_{12} & \beta_{02} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{vmatrix}}$$

وبطريقة المصفوفات فانه يمكن وضع (٣) على الصورة التالية

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{أ}_1 \\ \text{أ}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{01} \\ \beta_{02} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \text{أ}_1 \\ \text{أ}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_{01} \\ \beta_{02} \end{bmatrix}$$

ومنها يمكن ايجاد قيمة $\text{أ}_1$ ، $\text{أ}_2$ بمعلومية مقلوب المصفوفة .

**مثـال (١)** : اذا كانت العلاقة بين المتغيرات ص ، $س_١$ ، $س_٢$ للبيانات التاليـة

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ص | : | ١٢ | ١ | ٢ | ٤ | ١٢ | ١٣ | ٣ | ١ |
| $س_١$ | : | ١٥ | ١ | ٦ | ٢٣ | ٢٦ | ٢٧ | ٢٠ | ٢ |
| $س_٢$ | : | ٦ | ١١ | ٩ | ٦ | ٤ | ٢ | ٧ | ١١ |

على الصورة ص = أ + $أ_١$ $س_١$ + $أ_٢$ $س_٢$

قدر من واقع البيانات السابقة أحسن قيمة لكل من أ ، $أ_١$ ، $أ_٢$

**الحـل** : نجد أن

$\bar{ص}$ = ٦ = أ

$\bar{س}_١$ = ١٥

$\bar{س}_٢$ = ٧

$\beta_{٠١}$ = مح ( $س_{١ل}$ ـ $\bar{س}_١$ ) ( ص ـ $\bar{ص}$ ) = مح ( $س_{١ل}$ ـ ١٥ ) ( ص ـ ٦ ) =

= صفر × ٦ + ( ١٤٠ ) ( ـ٥ ) + ( ـ٩ ) ( ـ ٤ ) + ٨ × ( ـ٢ ) + ١١ × ١٢ × ٧ + ٥ ×

× ( ـ٣ ) + ( ـ١٣ ) ( ـ٥ ) = ٣٢١ ـ ٣١ = ٢٩٠

وبالمثل فان

$\beta_{٠٢}$ = ـ ١٠٥

$\beta_{١١}$ = ٨٠٠ ، $\beta_{١٢}$ = $\beta_{٢١}$ = ـ ٢٢٧

، $\beta_{٢٢}$ = ٧٢

وبالتعويض عن هذه القيم فى المعادلات (٣) نحصل على

٨٠٠ $أ_١$ ـ ٢٢٧ $أ_٢$ = ٢٩٠

ـ ٢٢٧ $أ_١$ + ٧٢ $أ_٢$ = ـ ١٠٥

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على

$$\text{أ}_{1} = -\text{٫٤٩} \quad , \quad \text{أ}_{2} = -\text{٢٫٩٩}$$

$$\therefore \; \text{ص} = \text{٦} - \text{٫٤٩}\,(\text{س} - \text{١٥}) - \text{٢٫٩٩}\,(\text{س} - \text{٧})$$

أي أن

$$\text{ص} = \text{٣٤٫٢٨} - \text{٫٤٩}\,\text{س}_{1} - \text{٢٫٩٩}\,\text{س}_{2}$$

<u>مثال (٢)</u> : اذا كانت العلاقة بين المتغيرات ص ، $\text{س}_{1}$ ، $\text{س}_{2}$ ، $\text{س}_{3}$ للبيانات التالية

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ص : | ٧ | ٨ | ٥ | ١١ | ١٧ | ١٨ | ١٣ | ١١ | ٩ | ١٠ |
| $\text{س}_{1}$ : | ٥ | ٦ | ٤ | ٧ | ٨ | ٩ | ٧ | ٦ | ٥ | ٤ |
| $\text{س}_{2}$ : | ١٠ | ١٠ | ١٠ | ١٤ | ١٥ | ١٣ | ١٠ | ١٢ | ١٤ | ١١ |
| $\text{س}_{3}$ : | ٧ | ١٠ | ٦ | ١٥ | ١٦ | ١٨ | ١٥ | ١٠ | ٧ | ١٢ |

على الصورة $\text{ص} = \text{أ} + \text{أ}_{1}\text{س}_{1} + \text{أ}_{2}\text{س}_{2} + \text{أ}_{3}\text{س}_{3}$

من واقع البيانات السابقة قدر أحسن قيمة كل من أ ، $\text{أ}_{1}$ ، $\text{أ}_{2}$ ، $\text{أ}_{3}$

<u>الحل</u> : نجد أن

$$\bar{\text{ص}} = \text{١٠٫٩} \quad , \quad \bar{\text{س}}_{1} = \text{٦٫١} \quad , \quad \bar{\text{س}}_{2} = \text{١٢} \quad , \quad \bar{\text{س}}_{3} = \text{١١٫٦}$$

$$\beta_{01} = \text{مج}\,(\text{س}_{1ل} - \bar{\text{س}}_{1})(\text{ص} - \bar{\text{ص}}) = \text{مج}\,(\text{س}_{1ل} - \text{٦٫١})(\text{ص} - \text{١٠٫٩}) = \text{٥١٫١}$$

$$\beta_{02} = \text{مج}\,(\text{س}_{2ل} - \bar{\text{س}}_{2})(\text{ص} - \bar{\text{ص}}) = \text{مج}\,(\text{س}_{2ل} - \text{١٢})(\text{ص} - \text{١٠٫٩}) = \text{٣٨}$$

$$\beta_{03} = \text{مج}\,(\text{س}_{3ل} - \bar{\text{س}}_{3})(\text{ص} - \bar{\text{ص}}) = \text{مج}\,(\text{س}_{3ل} - \text{١١٫٦})(\text{ص} - \text{١٠٫٩}) = \text{١٠٣٫٦}$$

$$\beta_{11} = \text{مج}\,(\text{س}_{1ل} - \bar{\text{س}}_{1})^{2} = \text{مج}\,(\text{س}_{1ل} - \text{٦٫١})^{2} = \text{٢٤٫٩}$$

$$\beta_{21} = \beta_{12} = \text{مج}\,(\text{س}_{1ل} - \text{٦٫١})(\text{س}_{2ل} - \text{١٢}) = \text{١٣}$$

$$\beta_{٣١} = \beta_{١٣} = \text{مح}\,(س_{١ل} - ١٫٦)(س_{٣ل} - ١١٫٦) = ٥٤٫٥$$

$$\beta_{٣٢} = \beta_{٢٣} = \text{مح}\,(س_{٢ل} - ١٢)(س_{٣ل} - ١١٫٦) = ٢٨$$

$$\beta_{٢٢} = \text{مح}\,(س_{٢ل} - ١٢)^{٢} = ٣٢$$

$$\beta_{٣٣} = \text{مح}\,(س_{٣ل} - ١١٫٦)^{٢} = ١٦٢٫٤$$

بالتعويض عن هذه القيم فى المعادلات التالية

$$\beta_{١١}\,أ_{١} + \beta_{٢١}\,أ_{٢} + \beta_{٣١}\,أ_{٣} = \beta_{١٠}$$

$$\beta_{١٢}\,أ_{١} + \beta_{٢٢}\,أ_{٢} + \beta_{٣٢}\,أ_{٣} = \beta_{٢٠}$$

$$\beta_{١٣}\,أ_{١} + \beta_{٢٣}\,أ_{٢} + \beta_{٣٣}\,أ_{٣} = \beta_{٣٠}$$

نحصل على

$$٢٤٫٩\,أ_{١} + ١٣\,أ_{٢} + ٥٤٫٤\,أ_{٣} = ٥١٫١$$

$$١٣\,أ_{١} + ٣٢\,أ_{٢} + ٢٨\,أ_{٣} = ٣٨$$

$$٥٤٫٤\,أ_{١} + ٢٨\,أ_{٢} + ١٦٢٫٤\,أ_{٣} = ١٤٣٫٦$$

$$،\quad أ = \bar{ص} = ١٠٫٩$$

باحدى الطرق المعروفة يمكن حل المعادلات السابقة ونجد أن

$$أ_{١} = ٠٫٨٥ \quad،\quad أ_{٢} = ٠٫٣٧ \qquad أ_{٣} = ٠٫٥٤$$

والمعادلة على الصورة

$$ص = ١٠٫٩ + ٠٫٨٥\,(س_{١} - ١٫٦) + ٠٫٣٧\,(س_{٢} - ١٢) + ٠٫٥٤\,(س_{٣} - ١١٫٦$$

أو

$$ص = -٤٫٩٩ + ٠٫٨٥\,س_{١} + ٠٫٣٧\,س_{٢} + ٠٫٥٤\,س_{٣}$$

## صور أخرى للمعادلة السابقة :

(١) قد تكون العلاقة بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة على الصورة

$$\text{ص} = \text{أ}\ \text{هـ}^{\text{أ}_1 \text{س}_1 + \text{أ}_2 \text{س}_2 + \cdots + \text{أ}_\text{ن} \text{س}_\text{ن}}$$

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

$$\text{لو ص} = \text{لو أ} + \text{أ}_1 \text{س}_1 + \text{أ}_2 \text{س}_2 + \cdots + \text{أ}_\text{ن} \text{س}_\text{ن}$$

بوضع لو ص = $\text{ص}'$ ، لو أ = $\text{أ}'$ نحصل على

$$\text{ص}' = \text{أ}' + \text{أ}_1 \text{س}_1 + \text{أ}_2 \text{س}_2 + \cdots + \text{أ}_\text{ن} \text{س}_\text{ن}$$

وهذه هى صورة المعادلة السابقة

(٢) قد تكون العلاقة بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة على الصورة

$$\text{ص} = \text{أ}\ \text{س}_1^{\text{أ}_1}\ \text{س}_2^{\text{أ}_2} \cdots\cdots \text{س}_\text{ن}^{\text{أ}_\text{ن}}$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على

$$\text{لو ص} = \text{لو أ} + \text{أ}_1 \text{لو س}_1 + \text{أ}_2 \text{لو س}_2 + \cdots + \text{أ}_\text{ن} \text{لو س}_\text{ن}$$

بوضع

$$\text{ص}' = \text{لو ص}\ ،\ \text{س}'_1 = \text{لو س}_1\ ،\ \text{س}'_2 = \text{لو س}_2\ ،\ \cdots\ ،\ \text{س}'_\text{ن} = \text{لو س}\ ،$$

$$\text{أ}' = \text{لو أ}$$

نحصل على

$$\text{ص}' = \text{أ}' + \text{أ}_1 \text{س}'_1 + \text{أ}_2 \text{س}'_2 + \cdots + \text{أ}_\text{ن} \text{س}_\text{ن}$$

وهذه هى معادلة على صورة المعادلة السابقة (١)

نرى أن دالة الانتاج (دالة كوب دوجلاس) على الصورة

$$ص = أ \, س_{١}^{أ_{١}} \, س_{٢}^{أ_{٢}}$$

حيث ص كمية الانتاج ( قيمة الانتاج ) ، $س_{١}$ رأس المال ، $س_{٢}$ العمالة

بنفس الطريقة السابقة بأخذ اللوغاريتم نحصل على

$$لو \, ص = لو \, أ + أ_{١} \, لو \, س_{١} + أ_{٢} \, لو \, س_{٢} \quad \cdots\cdots$$

بالتفاضل بالنسبة الى $س_{١}$ ، $س_{٢}$

$$\frac{١}{ص} \; \frac{ص}{س_{١}} = \frac{أ_{١}}{س_{١}}$$

ومنها $$أ_{١} = \frac{س_{١}}{ص} \; \frac{ص}{س_{١}}$$

وحيث أن الطرف الأيمن يمثل معامل المرونة على رأس المال $س_{١}$

$\therefore$ $أ_{١}$ = معامل المرونة على رأس المال

وكذلك $$\frac{١}{ص} \; \frac{ص}{س_{٢}} = \frac{أ_{٢}}{س_{٢}}$$

فان $$أ_{٢} = \frac{س_{٢}}{ص} \; \frac{ص}{س_{٢}}$$ = معامل المرونة على العمالة

***********

## تماريـــــــــــــن

## على اختبارات الفـــروق — ونظريـــة التقديـــــر

١ — قام الخبراء بادخال بعض التحسينات على المصابح الكهربية ، وكان متوسط أعمارها ٩٥٠ ساعة ولا اختبار ما اذا كانت هذه التحسينات قد افادت من اطالة عمر المصابيح اختبر ٣٠ مصباحا وأضيئت حتى احترقت عميقا وجلت عمر كل منها ثم حسب المتوسط فوجد أنـــه ١٠٢٠ ساعة ، فاذا كان الانحراف المعياري لعمر المصابيح ١٢٠ ساعة بين مـــا اذا كانت هناك فرق معنوى بين متوسط عمر المصباح بعد ادخال التحسين عليه ومتوسط عمره بالطريقة الأولى .

٢ — نفرض أنه من المعروف أن محصول الفدان من القطن ٥ر٥ قنطار فان بمعرفة تأثـــير الأسمدة اختيرت عشرة أفدنه اختبارا عشوائيا وسمدت بهذا السماد وكان محصول هـذه الأفدنه هو

٥٫٢٥ — ٩ر٤ — ١ر٦ — ٩ر٥ — ٣ر٦ — ٨ر٥ — ٤ر٥ — ٢ر٥ — ٩ر٥

فهل يمكن اعتبار أن هذه العينة ممثلة للمجتمع متوسطه ٥ر٥ قنطار وما حكمه علـــى تأثير هذا السماد .

٣ — دخل أحد مفتشى التموين مخبزا لاختبار أوزان الأرغفـة المعروضة للبيع وأخذ عينـــة من ١٠٠ رغيف ووزنها واحد بعد الآخر وكانت أوزانها موزعة كالتالـــى :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الوزن بالدرهم : | ٦١— | ٦٣— | ٦٥— | ٦٧— | ٦٩— | ٧١— | الجملة |
| عدد الأرغفة : | ٨ | ١٩ | ٣٠ | ٢٨ | ٨ | ٢ | ١٠٠ |

وبناء على هذه البيانات قرر المفتش أن صاحب المخبز يتعمد انقاص وزن الرغيف عـــن الوزن الرسمى وهو ٦٧ درهم فهل استنتاج المفتش صحيحا ثم باستخدام متوسط العينة أوجد متوسط وزن الرغيف فى ذلك المخبز على العموم .

٤ ـ اذا كانت العلاقة بين المتغير س ، ص للبيانات التالية

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| س : | ٨٥ | ٢٥ | ٧٠ | ٥٠ | ٤٠ | ٦٥ | ٢٠ | ٤٠ | ٨٠ | ٥٠ |
| ص : | ٩٠ | ٢٠ | ٦٠ | ٧٠ | ٤٠ | ٨٥ | ٣٥ | ٥٥ | ٨٠ | ٢٥ |

على الصورة ص = أ + $\text{أ}_{1}$ س

من واقع البيانات السابقة قدر كل من أ ، $\text{أ}_{1}$ ، $\text{أ}_{2}$

٥ ـ اذا كانت العلاقة بين المتغير س ، ص للبيانات التالية

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| س : | ٣ | ٤٨ | ١٢ | ١٩٢ | ٩٦ | ٢٤ | ٦ |
| ص : | ٢ | ٣٢ | ٨ | ١٢٨ | ٦٤ | ١٦ | ٤ |

على الصورة ص = أ + $\text{أ}_{1}$ س

من واقع البيانات السابقة قدر كل من أ ، $\text{أ}_{1}$

٦ ـ اذا كانت العلاقة بين المتغيرين س ، ص للبيانات التالية

س : ١٢٠ ـ ١٣١ ـ ١٤٠ ـ ١٦١ ـ ١٦١ ـ ١٧٤ ـ ١٨٠ ـ ٢٠٠
٢١٤ ـ ٢١٩ ـ ٢٤١ ـ ٢٥٠

ص : ٥٤٠ ـ ٥٩٠ ـ ٦٧٠ ـ ٦٧٠ ـ ٨٥٠ ـ ٩٧٠ ـ ١٠٧٠ ـ ١١٨٠
١٢٧٠ ـ ١٣٩٠ ـ ١٥٣٠

على الصورة ص = أ + $\text{أ}_{1}$ س + $\text{أ}_{2}$ $\text{س}^{2}$

من واقع البيانات السابقة قدر كل من أ ، $\text{أ}_{1}$ ، $\text{أ}_{2}$

## البـــاب الرابـــــع

## مقدمه فى نظرية اتخاذ القـــرارات

سواء كنا أفراد أو جماعات باحثين أو عاديين يقابلنا عند مواجهة أى مشكلة اتخاذ قرار معـــين لحلها . ونلاحظ أنه عند اتخاذ هذا القرار فاننا نختاره من بين مجموعة من القرارات المتصـــور اتخاذها ويرمز لهذه المجموعة من القرارات بالرمز D ولكن من الواضح أن ليس كل قرار ممكن تصـــوره يمكن تحقيقه اذ يحول بين القرار وتنفيذه اعتبارات الواقع . كما نلاحظ أن القرار المتخذ لا بد أن يكون من بين تلك القرارات الممكن تحقيقها ونرمز الى هذه المجموعة بالرمز C

ونجد أنه لا بد من الخطوات التالية عند اتخاذ قرار معين فى حل مشكلة ما .

(١) تحديد القرارات المتصورة D

(٢) تحديد القرارات الممكنة C

(٣) المفاضلة بين تلك القرارات الممكنة بالنسبة الى معيـار الافضلية $\wp$ أى نفترض أن متخذ القـرار يمكن له ترتيب القرارات الممكنة أمامه حسب أفضليتها بالنسبة اليه وبالنسبة الى معيار الافضلية .

وعموما نعرف مشكلة اتخاذ القرارات على أنها اتخاذ أفضل القرارات الممكنة التى تحدد بالعناصـــر $(D, C, \wp)$ ولتوضيح ذلك نذكر المثالين التاليين :

مثـال (١) :

نفرض أن الهدف هو اختيار وسيلة من وسائل المواصلات (القرارات D ) للانتقال من مدينـــة لأخرى وربما أن الشخص لا يمكن له السير على قدميه كما أنه قد لا يوجد قطار يمر بالمدينـــة أو لا يوجد مطار بها أو أن الطريق غير معبد ولذا فاننا نستبعد وسائل المواصلات الغير ممكنـــة ونختار من بين الوسائل الممكنة الوسيلة التى لها أفضلية بالنسبة لنا أما من ناحية السرعـة أو مـن ناحية أقل التكاليف أو من الاثنين معا .

مثـال (٢) :

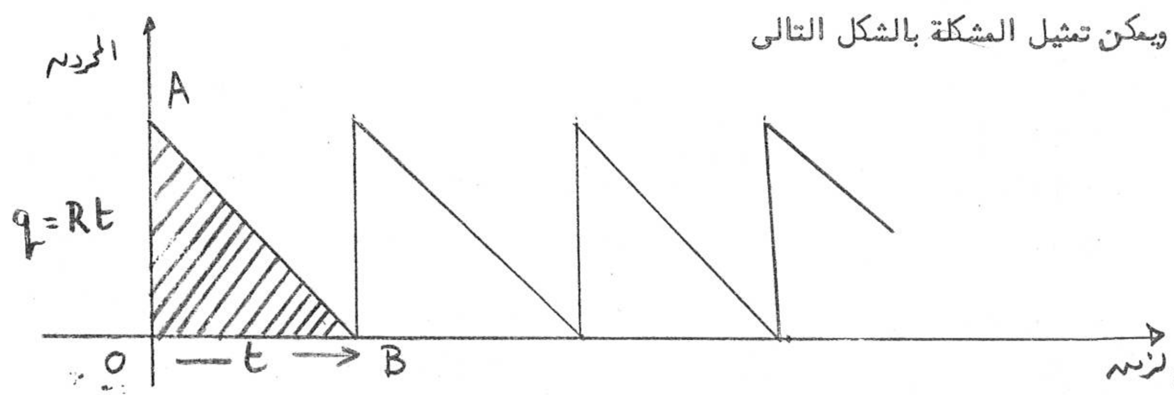
نفرض أن متعهد مطلوب منه أن يورد منتجات كميتها Q خلال فترة زمنية T فاذا كان معدل الاستهلاك فى وحدة الزمن R وكانت تكاليف التخزين عن كل وحدة فى وحدة الزمن $C_1$ فاذا كانت تكلفة التوريد (أو الانتاج) هى $C_2$ والسؤال : هل المتعهد يتخذ قـــرارا بالتوريد على دفعة واحدة أم على دفعات متقاربة أو متباعدة ويكون معيار الأفضلية اتخاذ القرار الذى نوصل الى أقل التكاليف ٠

ونلاحظ أنه عند اتخاذ أى قرار فى حل مشكلة تكون أما على علم تام بالمشكلة والقرارات الممكنة وهنـــا يسهل اتخاذ قرار منها بالنسبة الى معيار الأفضلية أو ليس على علم بجوانب المشكلة والقرارات ففى هذه الحالة أما أنه يمكن اعداد توزيعا احتماليا عن سلوك المشكلة فى أيام سبقـت وفى يمكن الحالة يمكـن اتخاذ قرار سليم ٠ أو أنه لا يمكن اعداد مثل هذا السلوك وفى هذه الحالة يصعب اتخاذ أى قـرار سليم ونلجأ الى المخاطـرة فى اتخاذ القرار ٠

وسنحاول أن نعطى بعض الأمثلة فى الحالات السابقة

أولا : حالة التأكد التام بجوانب المشكلة والقرارات الممكنة :

(١) فى مشكلة التوريد التى فى المثال السابق نرى أن القرارات الممكنة معروفة كما أن الطلب معـروف أى أننا على علم تام بجوانب المشكلة والمقررات وهى أما التوريد على دفعة واحدة أو على دفعـات ٠ ويمكن تمثيل المشكلة بالشكل التالى



من الشكل نرى أنه بما أن معدل الاستهلاك فى وحدة الزمن R وطول فترة التوريد t فان حجم المخزون فى بداية الفترة هو Rt

مساحة المثلث ABO يمثل حجم المخزون يساوى

$$\tfrac{1}{2}t \cdot Rt = \tfrac{1}{2}Rt^2$$

والتكلفة الناتجة عن التخزين يساوى مرة مساحة المثلث أى أن

$$C_1 \tfrac{1}{2} Rt^2 = \tfrac{1}{2} Rt^2$$

والتكلفة الكلية = التكلفة الناتجة عن التخزين + تكلفة التوريد أو الانتاج

$$F(t) = \tfrac{1}{2} C_1 Rt^2 + C_2$$

والتكلفة فى وحدة الزمن

$$F_1(t) = \tfrac{1}{2} \frac{C_1 Rt^2 + C_2}{t} = \tfrac{1}{2} C_1 Rt + \frac{C_2}{t}$$

ويكون القرار الذى يجب اتخاذه هو القرار الذى يجعل دالة الهدف (التكلفة) أقل ما يمكن وهذا يمكن التوصل منه بتفاضل الدالة $F_1(t)$ ومساويتها بالصفر أى أن

$$\frac{dF_1(t)}{dt} = 0 = \tfrac{1}{2} C_1 R - \frac{C_2}{t^2}$$

ومنها فان

$$t = \sqrt{\frac{2C_2}{C_1 R}}$$

والكمية التى تورد فى كل دفعة هى

$$q = Rt = R\sqrt{\frac{2C_2}{C_1 R}} = \sqrt{\frac{2C_2 R}{C_1}}$$

وعدد دفعات التوريد N تساوى

$$N^* = \frac{T}{t^*} = \frac{Q}{q^*}$$

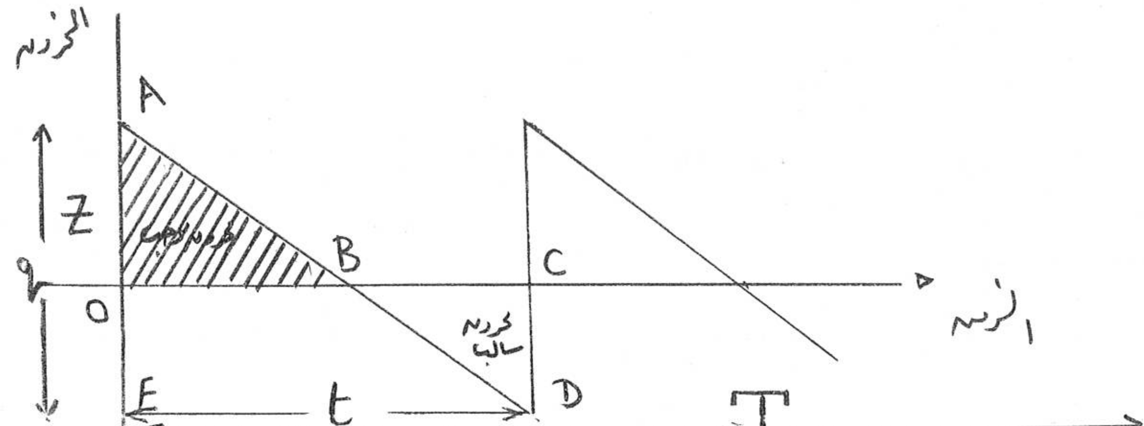
أى أن القرار الأمثل فى تنفيذ التعاقد هو أن تكون التوريد على دفعات حجم كل دفعة $q^* = \sqrt{\frac{2C_2R}{C_1}}$

وتستهلك خلال فترة $t^* = \sqrt{\frac{2C_2}{RC_1}}$ وعدد مرات التوريد $N^* = \frac{T}{t^*} = \frac{Q}{q^*}$ فى المثال السابق فرضنا أن الدفعة يصل بمجرد أن المخزون يساوى صفرا .

( ب ) اذا فرض أن الدفعة يصل بعد مدة وأن الغرامة الناجمة عن تأخير وحدة سلعة فى وحدة زمن $C_3$ وأن $C_2$ تكلفة التوريد أو الانتاج .

ما هو القرار الأمثل المتبع فى التوريد ؟ هل تورد على دفعات أم دفعة واحدة وما هو حجم كل دفعة ؟

يمكن تمثيل المشكلة السابقة بالرسم التالى




نرى من الرسم أن الكمية q تمثل الدفعة فى أول الفترة التى لا يكون هناك مخزون سالب أى الكمية المطلوبة التى لا تعرفنا فى غرامة التأخير ولكن فى هذه الحالة سنجد أن تكاليف التوريد لكمية q كبيرة .

والنفقة الكلية = نفقة التخزين + نفقة التأخير + نفقة التوريد ( الانتاج )

ومن الشكل نرى أن المثلث ABO يمثل المخزون

من يشابه المثلثين AOB ، AED نرى أن

$$BO = \frac{z}{q} \cdot t$$

وعلى ذلك فان مساحة المثلث ABO يساوى

$$\tfrac{1}{2} \frac{z}{q} \cdot t \cdot z = \tfrac{1}{2} t \frac{z^2}{q}$$

ونفقة التخزين يساوى $C_1$ مساحة المثلث ABO ويساوى

$$\tfrac{1}{2} C_1 t \frac{z^2}{q} \qquad (1)$$

كما أن مساحة المثلث BCD يمثل العجز فى المخزون ( المخزون السالب )

$$\tfrac{1}{2} BC \cdot CD = \tfrac{1}{2} (t - \frac{z}{q} t)(q-z) = \tfrac{1}{2}t(1- \frac{z}{q})(q-z) =$$

$$= \tfrac{1}{2} t \left( \frac{q - z}{q}\right)^2$$

والنفقة الناجمة عن العجز فى المخزون يساوى

$$\tfrac{1}{2} C_2 \frac{t(q - z)^2}{q}$$

وعلى ذلك فا ن النفقة خلال فترة $t$ هى

$$F(t) = \tfrac{1}{2} C_1 t \frac{z^2}{q} + \tfrac{1}{2} \frac{C_2 t(q - z)^2}{q} + C_3$$

والنفقة فى وحدة الزمن هى

$$F_1 = \tfrac{1}{2} C_1 \frac{z^2}{q} + \tfrac{1}{2} \frac{C_2(q-z)^2}{q} + \frac{C_3}{t}$$

وبما أن $t = \frac{q}{R}$ بالتعويض عن قيمة $t$ نحصل على

$$F_1 = \tfrac{1}{2} C_1 \frac{z^2}{q} + \tfrac{1}{2} \frac{C_2 (q - z)^2}{q} + \frac{C_2 R}{q}$$

ولايجاد القرار الأمثل كمية التوريد z , q نوجد هذه القيم التى تجعل الدالة $F_1$ أصغر ما يمكن أى

$$\frac{F}{z} = o = \frac{C_1 z}{q} - \frac{C_2(q - z)}{q} = 0$$

ومنها فان

$$Z = \frac{C_2\ q}{C_1+C_2} \qquad (2)$$

$$\frac{F}{q} = 0 = -\tfrac{1}{2}\ \frac{C_1\ z^2}{q^2} + \tfrac{1}{2}\, C_2\ \frac{2q(q - z) - (q - z)^2 . 1}{q^2} - \frac{C_3 R}{q^2} = 0$$

وبالتعويض عن قيم Z بدلالة q أى باستخدام (2) نحصل على

$$q^{*} = \sqrt{\frac{2\ C_3\ R\ (C_1+C_2)}{C_1\ C_2}}$$

$$Z^{*} = \sqrt{\frac{2\ C_2\ C_3\ R}{(C_1+C_2)C_1}}$$

وعدد مرات التوريد هى

$$N^{*} = \frac{Q}{q^{*}}$$

وطول فترة التوريد أو الانتاج هى

$$t^{*} = \frac{q^{*}}{R}$$

والنفقة الصغرى الناجمة عن ذلك هى

$$F = \sqrt{2C_1 C_3\ R}\ .\ \sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}$$

أى أنه من الأفضل الوقوع من غرامة التأخير من توريد الكمية $q^{*}$ هى حيث أن النفقة فى الحالة الأولى أقل منها من الحالة الثانية ٠

ويطلق على الكمية $z^{*} - q^{*}$ بالحد الأدنى للمخزون (حد الأمان)

وعلى ذلك فان القرار الذى يمكن اتخاذه هو أن يكون حجم المخزون فى بداية كل فترة هـو

وطول فترة التوريد هى $t^* = \frac{q^*}{R}$ وعدد مرات التوريد $\frac{T}{t^*} = N^* = \frac{Q}{q^*}$

والتكلفة الصغرى هى

$$F^* = \sqrt{2C_1C_3R} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}$$

مثال عددى (١) :

نفرض أن مصنع يورد بمعدل ٢٤٫٠٠٠ قطعة سلعة سنويا ، فاذا كانت نفقة ( تكلفة ) التخزين عن وحدة سلعة فى وحدة زمن ( شهريا ) يساوى ١ر جنيها وتكلفة العجز فى المخزون عن كل وحدة سلعة فى وحدة زمن ( شهريا ) يساوى = ٢ر٠ وتكلفة التوريد ( دورة الانتاج ) عن كل دورة ٣٥٠ . أوجد القرار الأمثل لعملية التوريد .

الحل : بما أن سنويا $0.1 \times 12$ = شهريا $C_1 = 0.1$

سنويا $0.2 \times 12$ = شهريا $C_2 = 0.2$

$C_3 = 350 \qquad R = 24000$

$$q^* = \sqrt{\frac{2C_3\ R\ (C_1+C_2)}{C_1\ C_2}} = \sqrt{\frac{(2)(350)(24000)(1.2+2.4)}{(1.2)\ (2.4)}}$$

$= 4578$ قطعة

والحجم الأمثل لكل دفعة يساوى

$$z^* = \sqrt{\frac{2C_2C_3\ R}{C_1(C_1+C_2)}} = \sqrt{\frac{(2)(2.4)(350)(24000)}{(1.2)(1.2+2.4)}} = 3056$$

$$t^* = \frac{q^*}{R} = \frac{4578}{24000} = 0.18$$ سنة

$= 2.16$ شهرا

والتكلفة الكلية يساوى

$$F^{*} = \sqrt{\frac{2C_1C_2C_3\ R}{C_1 + C_2}} = 3667\ £ .$$

أى أن القرار الا ًمثل لعملية التوريد أن تكون التوريد على فترات طول كل فترة 2.16 شهرا، والحجم والحجم الأمثل للدفعة (التخزين) فى بداية كل فترة هى $z^{*} = 3056$ والحد الأدنى للمخزون (مستوى الامان) هو $4578 - 3056 = 1522$ والتكلفة فى هذه الحالة تساوى $3667\ £$

مثال عددى (٢) :

متعهد يورد ماكينات ديزل لمصنع بمعدل ٢٥ ماكينة / يوميا ، فاذا كانت تكلفة التخزين لكل ماكينة فى الشهر $16\ £$ وأن الغرامة الناجمة عن التأخير عن التوريد لكل ماكينة فى اليوم $10\ £$ وتكلفة الانتاج عن كل دورة $10,000\ £$ أوجد القرار الأمثل لعملية التوريد .

الحل : $C_1 = \frac{16}{30}\ ,\ C_2 = 10,\ C_3 = 10,000\ ,\ R = 25$

$$q^{*} = \sqrt{\frac{2(25)(10.000)}{16/30}}\ \sqrt{\frac{10 + \frac{16}{30}}{10}} = 1000$$

$$z^{*} = \sqrt{\frac{2(25)(10.000)}{10/30} \cdot \frac{10}{10 + \frac{16}{30}}} = 943$$

$$t^{*} = \frac{q^{*}}{R} = \frac{1000}{25} = 40$$

عدد مرات التوريد (الانتاج)

$$N^{*} = \frac{360}{40} = 9$$

$$F^{*} = 2(10000)(\frac{16}{30})(10)\ \ \frac{10}{10 + \frac{10}{30}} = 503\ £$$

أى أن القرار الأمثل لعملية التوريد هى أن يكون التوريد على فترات طول كل فترة ٤٠ يوما وعددها ٩ دورات وحجم الانتاج فى كل دورة ١٠٠٠ وحجم الأمثل للمخزون فى بداية كل فترة ٩٤٣ والحد الأدنى لمستوى المخزون (حد الامان) فى بداية كل فترة هى ماكينة ٥٧ والتكلفة الصغرى فى هذه الحالة فى وحدة الزمن 503 ج

ثانيا : <u>عند عدم التأكد بجوانب المشكلة ومعرفة القرارات الممكنة</u>

نفرض أن فى احدى المدن بها ثلاث مجموعات من السكان الأولى تحتاج الى تيار شدته لا يتعدى ١٥ أمبير والمجموعة الثانية تحتاج الى تيار شدته لا تتعدى ٢٠ أمبير والمجموعة الثالثة تحتاج الى تيار شدته لا تتعدى ٣٠ أمبير . فاذا تعهد مقاول بعملية توصيل الاسلاك الكهربية من ثلاث أنواع نوع يتحمل ١٥ أمبير ونوع يتحمل ٢٠ أمبير ونوع يتحمل ٣٠ أمبير . ونفرض أن المقاول ليس على علم بحالات المجتمع المراد توصيل اليه الاسلاك . ولذا فانه قد يحدث أن يكون التوصيله لتيار شدته ١٥ أمبير ، ونجد أن هذا القرار لا يصلح لمجموعة السكان الثانية والثالثة حيث أنه يلزمهم تيار شدته أكبر من ذلك ، ولذا فانه لا يمكن لهم استخدام جميع الأدوات الكهربية التى لديهم والتى تحتاج الى شدته تيار أكبر أما للمجموعة الاولى فهو القرار السليم ، وقد يقوم المقاول بتوصيل الاسلاك التى يتحمل تيار شدته ٢٠ أمبير وفى هذه الحالة اذا كان التيار للمجموعة الأولى فانه يوجد تكلفة أكثر من الاسلاك حيث أنه يلزمهم أسلاك يتحمل فقط ١٥ أمبير أما اذا كانت للمجموعة الثانية ففى هذه الحالة لا يمكن لهذه المجموعة استخدام جميع الأدوات الكهربية التى لديهم ويستلزم تيار شدته أقل من ٣٠ أمبير أما اذا كانت التوصيله للمجموعة الثانية ففى هذه الحالة فيكون هذا القرار هو القرار السليم .

وقد يقوم المقاول بتوصيل اسلاك يتحمل تيار شدته ٣٠ أمبير وفى هذه الحالة اذا كان التيار للمجموعة الأولى والثانية فانه يوجد تكلفة أكثر فى الاسلاك حيث أنه يلزمهم أسلاك يتحمل تيار شدته أقل من ذلك . أما اذا كان للمجموعة الثالثة ، فانه لا يوجد فى هذه الحالة وأن خسارة بالنسبة الى المقاول أو بالنسبة الى المجموعة ، ويمكن أن نضع جدول التكلفة الناجمة عن التوصيلات بالنسبة الى المجموعات الثلاث .

| حـــالات الطبيعـــــة | القـــرارات المتخذة | | |
|---|---|---|---|
| نوع التوصيلات / مجموعة السكـان | $a_1 = 15$ | $a_2 = 20$ | $a_3 = 30$ |
| $6_1$ مجموع يستخدم أقل من ١٥ أمبير | 1 | 2 | 3 |
| $6_2$ " " " " ٢٠ " | 5 | 2 | 3 |
| $6_3$ " " " " ٣٠ " | 7 | 6 | 3 |

وتفسير هذا الجدول نرى أن الوحدة فى العمود الأول والصف الاول تمثل التكلفة فى التركيب لتوصيلة تيار شدته ١٥ أمبير لمجموعة تتطلب تيار شدته أقل من ١٥ أمبير وأن القيمة ٥ فى العمود الأول والصف الثانى تمثل التكلفة فى التركيب والخسارة الناجمة عن توصيل أسلاك لتيار شدته ١٥ أمبير للمجموعة الثانية التى يستخدم تيار شدته أقل من ٢٥ أمبير .

وأن القيمة (٣) فى العمود الثالث والصف الثالث تمثل التكلفة لتوصيله أسلاك يتحمل تيار شدته ٣٠ أمبير للمجموعة الثالثة وهكذا .

ونلاحظ أن المقاول يمكنه تقليل التكلفة التى يتحملها اذا كان على علم تام بحالات الطبيعة أى بالسكان وحالتهم . ولذلك بالتجربة (بالسؤال ) يمكن معرفة حالات الطبيعة فيذهب الى السكان لمعرفة شدته التيار المتطلب ، فاذا كانت الاجابة هى واحدة من الأربع حالات التالية :

(١) مجموعة تتطلب تيار شدته ١٠ أمبير

(٢) مجموعة تتطلب تيار شدته ١٢ أمبير

(٣) مجموعة تتطلب تيار شدته ١٥ أمبير

(٤) مجموعة تتطلب تيار شدته ٢٠ أمبير

ونجد أن فى المجموعات الثلاث أن المجموعة التى تتطلب تيار شدته أقل من ١٥ أمبير نصفها يستخدم تيار شدته $z_1=10$ والنصف الآخر يستخدم تيار شدته $z_2=12$ أمبير والمجموعة التى تتطلب تيار شدته أقل من ٢٠ أمبير نصفها يستخدم تيار شدته $z_3=15$ والنصف الآخر يستخدم تيـــار

شدته ١٢ أمبير والمجموعة الثالثة التى تستخدم تيار شدته أقل من ٣٠ أمبير ثلثها يستخدم تيار شدته ١٥ والثلثين يستخدما تيار شدته ٢٠ أمبير ونحصل على جدول السلوك الاحتمالى للطلب على التيار بالنسبة الى المجموعات الثلاث .

| حالات الطبيعة | الملاحظات والقيم المشاهدة | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $z_1 = 10a$ | $z_2 = 12a$ | $z_3 = 15a$ | $z_4 = 20a$ |
| $\theta_1 - 15$ | ½ | ½ | 0 | 0 |
| $\theta_2 - 20$ | 0 | ½ | ½ | 0 |
| $\theta_3 - 30$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |

ونرى أن المقاول يمكن أن يتخذ القرار ( الاستراتيجية ) بالنسبة الى التوصيلة المطلوبة على ضوء الملاحظات السابقة فمثلا اذا كان الملاحظ هو $z_1$ أى أن التيار المطلوب شدته ١٠ أمبير والتوصيله لتيار شدته ٢٠ أمبير .

وكان الملاحظ هو $z_2$ (أى ١٢ أمبير ) والتوصيله لتيار شدته ٢٠ أمبير
أو أن الملاحظ $z_3$ (أى ١٥ أمبير ) والتوصيلة لتيار شدته ٣٠ أمبير
أو أن الملاحظ $z_4$ (أى ٢٠ أمبير ) والتوصيلة لتيار شدته ٣٠ أمبير

وترمز للاستراتيجية بالرمز $S(a_2, a_1, a_2, a_3)$ - وهى يعنى أن $a_2$ القرار المتخذ اذا كانت الملاحظة هى $z_1$ , $a_1$ هو القرار المتخذ اذا كانت الملاحظة $z_2$ , $a_2$ القرار المتخذ اذا كانت الملاحظة $z_3$ وأن $a_3$ القرار المتخذ اذا كانت الملاحظة هو $z_4$

والجدول التالى يمثل خمسة استراتيجيات من بين ٨١ استراتيجية الممكنة

| الاستراتيجيات | $z_1 = 10a$ | $z_2 = 12a$ | $z_3 = 15a$ | $z_4 = 20a$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
| $S_2$ | $a_2$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_3$ |
| $S_3$ | $a_3$ | $a_3$ | $a_3$ | $a_3$ |
| $S_4$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ |
| $S_5$ | $a_3$ | $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ |

والسؤال الآن : كيف يختار المقاول من بين هذه الاستراتيجيات الاستراتيجية المفضلة ·
للاجابة على هذا السؤال نوجد متوسط النفقة عند جميع حالات الطبيعة بالنسبة الى جميع الاستراتيجيات
والجدول التالى يبين متوسط النفقة ·

| حالات الطبيعة | الاستراتيجيـــات | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ |
| $\theta_1$ - 15 | 1 | 1.5 | 3 | 1 | 3 |
| $\theta_2$ - 20 | 3.5 | 2.5 | 3 | 5 | 2.5 |
| $\theta_3$ - 30 | 4 | 3 | 3 | 7 | 6.67 |

والقيم فى الجدول توضح كالتالى :

<u>أولا</u> : نوجد احتمالات كل من الاستراتيجية $S_1(a_1, a_1, a_2, a_3)$

نفرض أن الطبيعة فى حالة $\theta_1$ أى يوجد مجموعة يستخدم تيار شدته أقل من ١٥ أمبير ومـــن الملاحظ أن نصف المجموعة يستخدم $z_1$ والنصف الآخر يستخدم $z_2$ فاذا فعند استخـــدام الاستراتيجية $s_1$ فانه فى حالة اختيار القرار $a_1$ لا يمكن أن يستخدم القرارات $a_2$ ، $a_3$

أما اذا كانت الطبيعة فى الحالة $\theta_2$ أى يوجد مجموعة يستخدم تيار شدته أقل من ٢٠ أمبير من الملاحظ أن نصف هذه المجموعة يستخدم $z_2$ والنصف الآخر فى حالة $z_3$ فعند اختيار الاستراتيجية $s_1$ فاننا نختار أما القرار $a_1$ أو القرار $a_2$ وكل منها باحتمال ½ وأحيانا يمكن اختيار القرار

أما اذا كانت الطبيعة فى الحالة $\theta_3$ أى يوجد مجموعة يستخدم تيار شدته أقل من ٣٠ فعند اختيار الاستراتيجية $s_1$ فاننا نختار القرار $a_1$ ، $a_2$ باحتمال $\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{3}$ على الترتيب ويمكن كتابة الجدول التالى

| | النفقة | | | احتمالات القرارات | | | متوسط النفقة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| حالات الطبيعة | $s_1=(a_1,a_1,a_2,a_3)$ | | | | | | |
| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | |
| $\theta_1$ | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | $1.1+2.0+3.0 = 1$ |
| $\theta_1$ | 5 | 2 | 3 | ½ | ½ | 0 | $5.\frac{1}{2}+2.\frac{1}{2}+3.0 = 35$ |
| $\theta_3$ | 7 | 6 | 6 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $7.0+6\frac{1}{3}+3\frac{2}{3} = 4$ |

$$s_2=(a_2,a_2,a_3,a_3)$$

| | النفقة | | | احتمالات القرارات | | | متوسط النفقة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| حالات الطبيعة | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | |
| $\theta_1$ | 1 | 2 | 3 | ½ | ½ | 0 | 1.5 |
| $\theta_2$ | 5 | 2 | 3 | 0 | ½ | ½ | 2.5 |
| $\theta_3$ | 7 | 6 | 6 | 0 | 0 | 1 | 3 |

أى أنه اذا كانت الطبيعة فى الحالة $\theta_1$ فانه دائما نختار القرار $a_1$ وهذا فى كل مرة يغطى نفقة مقدارها الوحدة فاذا كانت الصيغة فى الحالة $_2$ فان نصف الحالات نختار القرار $a_1$ بنفقة مقدارها ٥ والنصف الآخر تختار القرار $a_2$ بنفقة مقدارها ٢ وعلى ذلك فان متوسط النفقة هو

$$5.\tfrac{1}{2} + 2.\tfrac{1}{2} + 3.0 = 3.5$$

ومتوسط النفقة اذا كانت الطبيعة فى الحالة $_3$ هى

$$7.0 + 6.\frac{1}{3} + 3.\frac{2}{3} = 4$$

ولذلك بالنسبة الى الاستراتيجية $s_2$ نجد أن اذا كانت الطبيعة فى حالة $\theta_1$ فان متوسط النفقة 1.5 وعندما يكون فى الحالة $\theta_2$ فان متوسط النفقة 2.5 واذا كانت الطبيعة فى الحالة 3 فان متوسط النفقة ٣ وبالمثل بالنسبة الى الاستراتيجيات الأخرى بهذه الطريقة تتضح للمقرر الاستراتيجية الممكن استخدامها والتى تحقق أقل نفقة ممكنة .

من الخطوات السابقة لحساب متوسط النفقة لجميع الاستراتيجيات قد تعطى احدى الاستراتيجيات قد تعطى متوسط نفقة أكبر من الأخرى فمثلا بمقارنة الاستراتيجية $S_5$ , $S_2$ يلاحظ أنه فى الحالات الثلاث للطبيعة فان النفقة عن استخدام الاستراتيجية $S_5$ أكبر من النفقة باستخدام الاستراتيجية $S_2$ ، ولذا فاننا نصرف النظر عن هذه الاستراتيجية وجميع الاستراتيجيات الأخرى ماعدا الاستراتيجية $S_1$ , $S_2$

<u>والآن كيف يمكن الوصول الى الاستراتيجية المطلوبة ؟</u>

نلاحظ أنه اذا كان على علم بالنسبة المئوية أى مكونات السكان التى يقابل $\theta_1$ ، $\theta_2$ ، $\theta_3$ فمثلا قد تكون مكونات المجتمع متساوية أى $\frac{1}{3}$ السكان يستخدم $\theta_1$ ، $\frac{1}{3}$ يستخدم $\theta_2$ ، $\frac{1}{3}$ يستخدم $\theta_3$ فان متوسط النفقة عند استخدام الاستراتيجية $s_1$

$$1.\frac{1}{3} + 3.5\frac{1}{3} + 4\,\frac{1}{3} = 2.83$$

ومتوسط النفقة عند استخدام الاستراتيجية $s_2$

$$1.5\frac{1}{3} + 2.5.\frac{1}{3} + 3.\frac{1}{3} = 2.33$$

أما اذا كان ٩٠٪ من السكان ينتمون الى الحالة $\theta_1$ ، ١٠٪ ينتمى الى الحالة $\theta_2$ فان متوسط النفقة بالنسبة الى الاستراتيجية $s_1$ هو

$$1.09 + 3.5(0.1) = 1.25$$

وبالنسبة الى الاستراتيجية $s_2$ فان متوسط النفقة هو

$$(1.5).(0.9)+(2.5) = 1.60$$

ومنها يتضح أنه يجب اختيار الاستراتيجية $s_1$

وأخيرا اذا كانا على علم بالنسب المئوية لمكونات السكان فان اختيار الاستراتيجية الصالحة ليس صعبا وعند عدم معرفة هذه النسب فمن الصعب اختيار الاستراتيجية الصالحة .

وعند اتخاذ قرار يجب أن يتوافر التالى :

(١) تحدد حالات الصيغة $\theta_1, \theta_2, \ldots$

(٢) القرارات الممكنة $a_1, a_2, \ldots$

(٣) جدول النفقة : تحدد عن كل قرار بالنسبة الى قرارات ( حالات ) الطبيعة ، فاذا كانت معروفة حالات الطبيعة فانه ممكن اختيار أحسن القرارات أما اذا كانت غير معروفة فانه من التجارب يمكن تحديد الملاحظات الممكنة $z_1, z_2, \ldots$ والاحتمالات بالنسبة الى حالات الطبيعة والقرارات .

(٤) تحديد الاستراتيجيات .

(٥) تحديد أفضل الاستراتيجيات وذلك بأقل نفقة .

# المراجــــــــــع


(١) مبادئ الاحصاء ( الجزء الاول ) — الدكتور عبد المنعم الشافعي

(٢) مبادئ الاحصاء — الدكتور مدنى الدسوقى

(٣) مقدمه الاحصاء التحليلى — الدكتور احمد عباده سرحان

(٤) النظرية الاحصائية ( الجزء الاول ) — الدكتور محرم محمود وهبى

(٥) مقدمه فى نظرية الاحتمالات — الدكتور يوسف نصر الدين محمد
معهد التخطيط مذكرة رقم ٨٧٤

(٦) مقدمه فى الاسلوب الاحصائى — الدكتور يوسف نصر الدين محمد
معهد التخطيط مذكرة رقم ٨٩٦

الآراء التي وردت في هذه المذكـــــــــــــــرة
تمثل رأي الكاتب ولاتمثل رأي المعهد ذاتـــــــــــه

# الاسعـــار والسياسات السعرية

الدكتور محمد سلطان ابو على

# الاسعار والسياسات السعرية

الدكتور محمد سلطان ابو علي

## ١ - مقدمة :

يعرف اوسكار وايلد الاقتصادى بانه "الشخص الذى يعرف سعر كل شيء ولا يعرف قيمة اى شيء" . والواقع ان هذا التعريف يخرج عن الحقيقة تماما حيث انه لا يوجد الاقتصادى الذى يعرف سعر كل شيء [١] ، وكثير منهم من يعرف قيمة عديد من الاشياء، ولكن هذا التعريف يشير الى اهمية الدور الذى تؤديه الاسعار فى الاقتصاد القومى .

ومن المعروف انه عند قيام الثورة البلشفية فى الاتحاد السوفيتى عام ١٩١٧ والغائها لجهاز الثمن الحر بالمعنى المفهوم فى ظل النظام الرأسمالى تنبأ له الكثيرون بعدم امكانية استمراره وحكموا عليه بضرورة الانهيار . ومن ابرز من حكم بعدم امكانية عمل الاقتصاد الاشتراكى البروفسور ميزس Von Mises [٢] وذلك استنادا الى عدم وجود نظام ترتب على اساسه البدائل الاقتصادية . وفى هذا يقول البروفسور هايك ان لميزس يرجع "شرف السبق فى صياغة المشكلة الرئيسية فى الاقتصاد الاشتراكى بصورة عامة يستحيل معها اختفاؤها من النقاش والجدل" (٣) .

الا ان هناك من الاقتصاديين من اتخذ موقفا اقل تشددا من هذا الموقف امثال هايك Hayek ، روبنز Robbins [٤] حيث انهما يسلمان بالامكانية النظرية لعمل النظام الاشتراكى ، الا انهم يرون عدم امكانية تطبيقية عمليا .

---

(١) مأخوذة من

R. Dorfman, The Price System, Prentice-Hall, 1964.

(٢) L. Von Miss, "Economic Calculation in Socialist Commonwealth," reprinted in F.A. Hayek, ed., Collectivist Economic Planning, London; Routledge, 1935.

(٣) F.A. Hayek, "The Nature and History of the Problem", Ibid, p. 32.

(٤) L.C. Robbins,"The Great Depression, London, 1934, quoted by O. Lange, On the Economic Theory of Socialism.

وفى ذلك يقول البروفسور رومنز :

"يمكننا التخيل نظريا ان المشكلة (اى المحاسبة الاقتصادية) قد حلت عن طريق سلسلة من الحسابات الرياضية ٠٠ ولكن هذا الحل لا يمكن تطبيقه عمليا نظرا لانه يتطلب تركيب ملايين المعادلات على اساس ملايين البيانات الاحصائية الخاصة بملايين المواطنين٠ فاذا ما فرغنا من حل هذه المعادلات فان البيانات التى استخدمت تصبح بالية ويجب اعادة العمليات المحاسبية من جديد"٠

الا ان الاقتصادى الايطالى باريتو Pareto قد بين فى عام ١٨٩٧ الطريقة التى يمكن بواسطتها التوصل الى عمل الحسابات الاقتصادية وترتيب البدائل المتاحة امام المجتمع٠ ولقد اطنب أ٠ بارونى E. Barone فى بيان كيفية الوصول الى حل رياضى لهذه المشكلة٠ ثم توالت من بعد ذلك المحاولات التى تبين تخطيط كيفية الانتاج فى ظل الاقتصاد الاشتراكى٠ وعلى رأس هذه الكتابات مقال الاقتصادى الامريكى ف٠م٠ تيلرTaylor والاقتصادى البولندى اوسكار لانجيه O.Lange ولاشك ان نجاح الاقتصاديات الاشتراكية فى عدد كبير من الدول فى تحقيق معدل نمو كبير فى الدخل القومى دليل كاف على امكانية التطبيق الاشتراكى فى المجالات الاقتصادية هذا فضلا عن نجاحه٠

وقد يكون من المفيد قبل الاستطراد فى بيان كيفية تخصيص الموارد اى اموال الانتاج بين استخداماتها المختلفة واموال الاستهلاك بين افراد المجتمع ان نميز بين نوعين من التخطيط هما : الامر والتخطيط المركزى مع لا مركزية التنفيذ٠ فتقوم الدعامة الاولى للاشتراكية على الملكية العامة لغالبية وسائل الانتاج٠ ومتى تم ذلك تنشأ مشكلة توزيع هذه الوسائل على مجالات الانتاج المختلفة ثم مشكلة توزيعها بين الاستخدامات المختلفة من استهلاك وتكوين رأسمالى٠ ومن هنا تبرز اهمية التخطيط الاقتصادى فى ادارة الاقتصاد القومى٠

ولقد اتجه التفكير المبدئي في هذا الصدد الى اتباع التخطيط المركزى القائم على سياسة التوجيه المباشر لكل من اموال الانتاج بين الانشطة الانتاجية ،واموال الاستهلاك بين مجموعات الشعب وافراده. وفى ظل هذا التنظيم يتسلم كل مدير للوحدة الاقتصادية عناصر الانتاج المختلفة من مواد اولية وآلات وايدى عاملة ثم يطلب اليه تسليم كمية من المنتجات النهائية بدرجة جردة معينة. اما فى مجالات الاستهلاك فيتسلم الافراد ايصالات بكميات عينية من السلع المقرر استهلاكهم لها. اى انه يتم احلال تفضيلات الافراد كلية بالتفضيلات الخاصة بالقيادة السياسية (٥). وهذا ما قد يطلق عليه اصطلاح التخطيط الآمر.

ونتيجة للصعوبات الناجمة عن المركزية الشديدة فى ادارة الاقتصاد القومى الحديث، اصبح من المتعذر ادارته بكفاءة بهذه الطريقة. ومن ثم اتجه الفكر المعاصر الى ادخال جهاز الثمن فى ادارة الاقتصاد المخطط. بمعنى ان تحقيق الاهداف المرسومة يتم عن طريق استخدام جهاز الثمن والادوات الاقتصادية الاخرى من سياسات مالية ونقدية وغيرها لكى يتم تخصيص الموارد الاقتصادية بما يحقق كفاءة الاستخدام. ومثل هذا النوع من الادارة الاقتصادية هو الذى سنطلق عليه اصطلاح مركزية التخطيط ولا مركزية التنفيذ (٦). فالمقصود بنظام التخطيط المركزى والتنفيذ اللامركزى اذن النظام الاقتصادى الذى يتحدد فيه الاطار العام للاهداف الاقتصادية والاجتماعية بواسطة السلطة المركزية ولكن يتم تخصيص الموارد بين الوحدات الاقتصادية المختلفة عن طريق السياسات المختلفة. وتؤخذ تفضيلات الافراد فى الاعتبار عن طريق ما يعكسه السوق من انحرافات بين

---

(٥) انظر على سبيل المثال :

J. Drewnowski, "The Economic Theory of Socialism: A Suggestion for Reconsideration," Journal of Political Economy, August, 1961, pp. 341 - 354.

(٦) انظر المقال الاول من كتاب

T. Koopmans, Three Essays on the State of Economic Science, Mac Graw - Hill 1957.

الطلب والانتاج على النحو الذى سنبينه فيما بعد (٧) ٠

٢ ــ دور الاسعار فى النظم الاقتصادية

وتؤدى الاسعار ادوارا هامة فى الحياة الاقتصادية للمجتمع نوجز اهمها فيما يلى :

(أ) تخصيص الموارد :

تعتبر الاسعار فى النظام الرأسمالى الموجه الاساسى لتخصيص المـــوارد ٠ فاذا كان سعر سلعة ما مرتفعا بالنسبة الى نفقات فاننا نجد ان الموارد توجـــه الى انتاج هذه السلعة حتى يقل الربح المتحصل من هذه السلعة عن طريـــق انخفاض سعرها كنتيجة لزيادة العرض من ناحية ، ولزيادة اسعار عوامل الانتـــاج المستخدمة بزيادة الطلب عليها ٠ اما اذا كان السعر منخفضا عن نفقات الانتاج ، فنجد ان الموارد تخرج من ميدان انتاج هذه السلع سعيا وراء تحقيق ربـــح ما من وراء الانتقال من نشاط انتاجى آخر ٠ لذلك نجد انه اذا رغبت الدولـة فى زيادة المنتج من سلعة معينة فانها تعمل على تخفيض نفقات انتاجها (عـــن طريق اعفائها من الضرائب او من جزء منها ، منحها اعانة او غير ذلك مـــــن الاجراءات ) بحيث تزيد من ربحيتها وبذلك تتجه الموارد الى هذا النشـــاط الانتاجى ، والعكس بالعكس ٠

---

(٧) من المعروف ان طريقة اتخاذ القرارات فى المجتمع تختلف باختلاف صورة التنظيم السياسى فى المجتمع ، ويمكن تمييز ثلاث انواع من المجتمعات فى هذا الصدد هى : مجتمع ديمقراطى ، مجتمع ديكتاتورى ، ومجتمع قبلى او تقليدى ٠ ففى ظل المجتمع الدكتاتورى تحل ارادة الدكتاتور محل ارادة افراد المجتمع ٠ وفى المجتمع القبلى يتم اتخاذ القرارات بطريقة تقليدية ٠ اما فى المجتمع الديمقراطى فيمكن التعبير عن الارادة الجماعية لتفضيلات الافراد باحدى وسيلتين هما : السوق والانتخاب بالتصويت ٠ ولقد اوضح كينيث ارو ان اتخاذ القرارات بطريقة التصويت من الممكن ان تؤدى الى قرارات متضاربة ويفضل اتمام عملية الاختيار عن طريق السوق ٠ انظر فى ذلك الصدد

K.J. Arrow, Social Choice and Individual Values, New York : John Wiley & Sons, 2nd, ed., 1963.

ومن الناحية الاخرى بين م ٠ الما ان التعبير التفضيل الاجتماعى عن طريق السوق من الممكن ان تؤدى ايضا الى عدم التوافق المنطقى فيها ، وهذا يترك المسألة دون حل محدد بعد ٠ انظر

M.J. Ellman, "Individual Preferences and the Market," Economics of Planning, Vol. 6 No. 3, 1966, pp. 241 - 250.

اما فى النظام الاشتراكى المخطط تخطيطا مركزيا شاملا فى مجالى السياسة والتنفيذ - اى النظام الآمر - فلا تقوم الاسعار بدور كبير فى هذا المجال ٠ ولكن فى ظل التخطيط المركزى والتنفيذ اللامركزى تؤدى الاسعار الدور الرئيسى فى تخصيص الموارد بنفس طريقة النظام الرأسمالى ولكن مجال الاختلاف هنا ان السعر لا يتحدد فى السوق ولكن تقوم الجهة المختصة بالتخطيط بتحديد الاسعار وتعديلها بما يعمل على تحقيق اهداف الخطة الاقتصادى والاجتماعية باكبر كفاءة ممكنة (٨) ٠

(ب) توزيع الدخول :

يتحدد نمط توزيع الدخول بما يحصل عليه كل فرد من افراد المجتمع ٠ وتعتبر اسعار السلع عوائد لعوامل الانتاج المختلفة ٠ ومن ثم فأنها تؤدى دورا هاما فى توزيع الدخول بين الافراد والفئات ٠ وفى المجتمع الاشتراكى ، حيث ترغب الدولة فى تحديد نمط معين لتوزيع الدخول تتحقق فيه العدالة فى التوزيع ، يجب ان يكون هناك توافق بين سياسة الاسعار ونمط توزيع الدخل المرغوب فى تحقيقه ٠ ومن الاسباب الرئيسية فى معارضة التضخم (اى الارتفاع المطرد فى الاسعار) انه يؤدى الى الحاق الضرر باصحاب الدخول الثابتة ٠

(ج) تقييد الاستهلاك :

اذا عرضت جميع السلع مجانا فلا يكون هناك قيد على القدر الذى يستهلكه الافراد من السلع الا اللهم تشبع رغباتهم من هذه السلع ٠ وكذلك لا يكون هناك حافز للافراد على العمل نظرا الى استطاعتهم الحصول على ما يرغبون فيه من السلع والخدمات بدون مقابل ٠ ولما كان المعروض من السلع والخدمات فى اية فترة

---

٨) انظر على سبيل المثال

Leftwitch, Price System and Allocation of Resources.

زمنية محدودا نسبيا ، فيجب ان يكون هناك وسيلة لتقييد الطلب عليها لكى تتواء م مع المعروض منها ٠ وتعتبر الاسعار احدى الوسائل الرئيسية لقيد الاستهلاك فى المجتمعات الحديثة ٠

( د ) تحديد الهيكل الوظيفى الامثل :

لاشك ان الاجر الذى يتقاضاه الفرد احد الاسعار الذى يجب ان يحددها المجتمع٠ ولذلك فان الاجر الى جانب تحديده لنمط توزيع الدخول يحدد توزيع القوة العاملة بين المهن والوظائف المختلفة٠ ولذلك اذا وجد فائض فى المعروض من الايدى العاملة فى مهنة ما ، وكان هناك عجز فى مهنة اخرى فانه يمكن استخدام الاجور والمهايا كوسيلة لتحقيق التوازن فى الهيكل الوظيفى مما يعمل على زيادة كفاءة الاقتصاد القومى (٩)٠

وبالاختصار فان الاسعار تعتبر اداة اقتصادية مهمة فى يد السلطة القائمة بالعملية التخطيطية فى ظل التنفيذ اللا مركزى٠ وهى احدى الوسائل للقضاء على الاختناقات وتسيير الاقتصاد بكفاءة ٠ وان لم يفلح جهاز التخطيط فى الاقتصادية والاجتماعية لعدم التنفيذ وتصور الاداء عن الاهداف المخططة٠

٣ — تخصيص الموارد الانتاجية :

ولتسهيل العرض هندسيا نفترض ان المجتمع ينتج سلعتين فقط وذلك باستخدام عاملين من عوامل الانتاج هما العمل ورأس المال٠ ويكون غرض المجتمع من عملياته الانتاجية هو الحصول على اكبر قدر من الانتاج بإستخدام الموارد المتاحة٠ ويمكن تحديد الطريقة

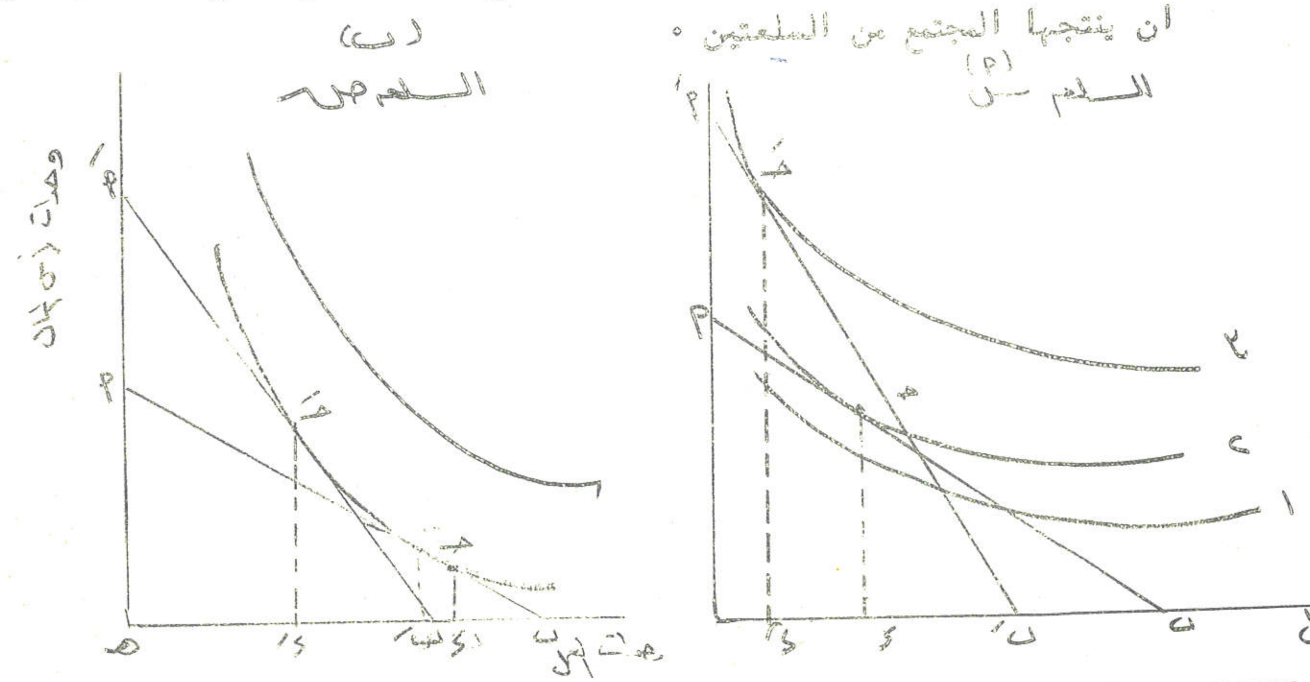
---

(٩) Harbison, Manpower and Economic Development McGraw - Hill, 1964.

التى تخصص بها الموارد باحدى طريقتين هما : التحليل الحدي والبرمجة الخطيـــة ٠ وسنعرض هنا لكيفية تخصيص الموارد على انتاج السلعتين بغرض تعظيم الانتاج الكلـــى ودور الاسعار في ذلك٠

## (أ) التحليل الحدي:

يفترض التحليل الحدي ان عوامل الانتاج وكذلك المنتجات قابلة للانقســـام بحيث تصبح دالة انتاج كل سلعة مستمرة وتوجد لها مشتقات من اى درجـــة مرغوب فيها (١٠) وتمثل كل نقطة على اى منحنى من منحنيات الناتج المتكافىء نسبة معينة يمزج بها العمل ورأس المال لانتاج السلعة النهائية٠ وتتحدد الكميـــة المنتجة من كل سلعة في ظل الفن التكنولوجى المتبع بناء على الاسعار النسبيـــة لعوامل الانتاج ٠ فتحدد الاسعار النسبية للعمل ورأس المال الكمية المنتجة ونسب العمل ورأس المال المستخدم في العملية الانتاجية في ظل حجم معين من الموارد وبتغيير كمية الموارد المخصصة لكل سلعة نستطيع الحصول على اقصى كميات يمكـــن ان ينتجها المجتمع من السلعتين ٠



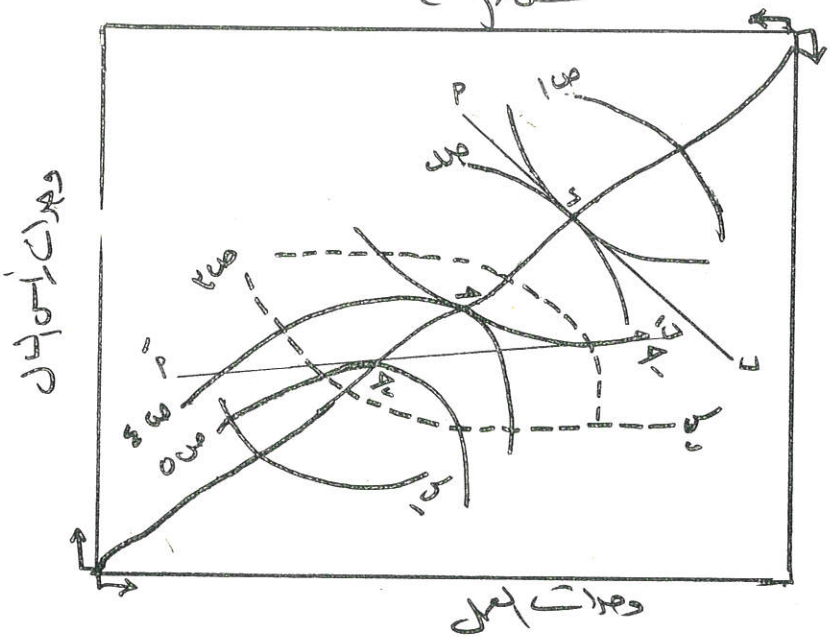
(١٠) انظـــر

P.A. Samuelson, Foundations of Economic Analysis, Cambridge; Mass: Harvard University Press, 1947.

وتظهر فى الشكل رقم ( ١ ) منحنيات الناتج المتكافىء الخاصة بالسلعتين س ، ص فاذا كانت نسبة سعر العمل الى سعر رأس المال ممثلة بميل الخط المستقيم أ . ب نجد ان الانتاج الامثل يتم عند النقطة جـ وتكون نسبة العمل الى رأس المال هى د هـ : د جـ ، فاذا تغيرت الاسعار النسبية للعمل ورأس المال تغير ميل الخط المستقيم ليصبح أ/ ب/ ويتم التوازن عند النقطة جـ/ ، ويتغير بالتالى كثافة استخدام عوامل الانتاج مع بقاء الكمية المنتجة على ما هى عليها ، كما هو الحال فى الشكل أ — ب ، او مع تغير الكمية المنتجة (انظر الشكل أ — أ) .

ولا نبحث هنا اثر تغير الموارد المتاحة لكل نشاط من السلعتين حيث ان الذى يهمنا هو اثر تغير الاسعار فقط . فاذا رغبنا فى معرفة الكميات الممكن انتاجها من السلعتين معا فى ظل الموارد المتاحة للمجتمع فاننا نعكس الشكلين السابقين على بعضهما البعض لنحصل على ما اسماه ادجورث وبولى Edgeworth-Bowley بالشكل الصندوقى المبين فى الشكل رقم (٢) (١١) .

شكل رقم (٢)




---

(١١) انظر للمؤلف محاضرات فى الاقتصاد التحليلى ، دار الجامعات المصرية سنة ١٩٦٦ ص ١٧٢ وما بعدها .

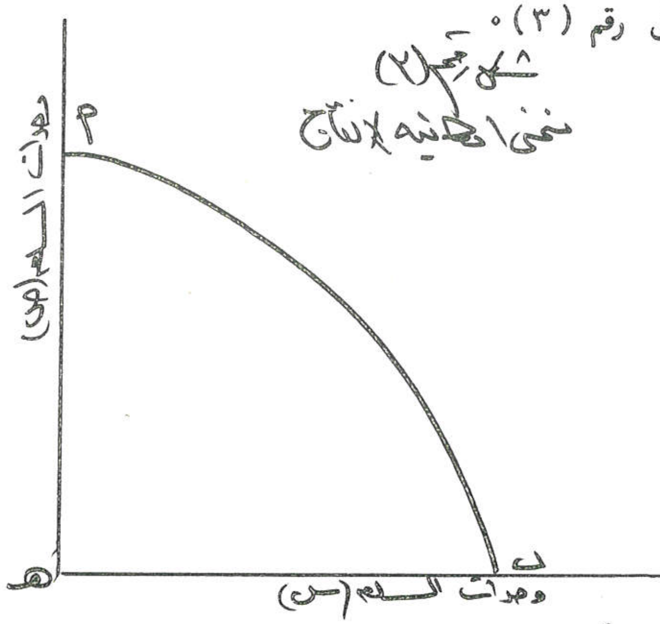
نحصل على الشكل الصندوقى عن طريق تمثيل للموارد المتاحة فى المجتمع بمستطيل يمثل الضلع الافقى منه كميات العمل والضلع الرأسى كميات المال المتاحين فى المجتمـــع ٠ وكما هو معروف يتم الاستغلال للموارد عند نقط تماس المنجنيات الخاصة بالسلعتين س ، ص واذا لم يتحقق هذا امكن زيادة الكمية المنتجة من السلعة س او السلعة ص او الاثنتين معا ٠ فاذا ما وصلنا نقط التماس ببعضها البعض لحصلنا على المنحنى س جـ د ص وهو ما يعرف باسم منحنى الامثلية الخاص بباريتـــو ٠

ولكى نرى دور سعرى العمل ورأس المال فى التخصيص الامثل للموارد نأخذ احدى نقط منحنى الامثلية Efficiency Locus ولتكن النقطة جـ ٠ فاذا كانت نسبة الآسعـــار مثلة بميل الخط المستقيم أ ب فان ذلك يحقق الكفاءة فى استخدام الموارد ٠ امـــا اذا كانت نسبة الاسعار هى ميل أ َ ب َ فان الكفاءة الانتاجية لا تتحقق ٠ وذلك انــــه اذا تحققت بالنسبة للسلعة س فانه يلزم الانتاج عند النقطة جـ ٠ وتكون الكمية المنتجة فيهمـــا هى س٣ فى حين ان الكمية المنتجة من السلعة ص هى ص٣ والتى تقل عن الكميـــة ص٤ السلعة ص يتم الانتاج عند جـ بكميات قدرها ص٤ ، س٢ وهى لا تحقق الكفاءة الانتاجية فى المجتمع حيث يمكن زيادة الكمية المنتجة من السلعة س عن س٢ مع عدم الاقلال مـــن الكمية المنتجة من السلعة ص ٠ وذلك بالانتقال الى منحنى الكفاءة ٠ لذلك تتحقق الكفاءة ـ والتى نعرفها على انها ذلك الوضع الذى لا يمكن فيه زيادة الكمية المنتجة مـــن س دون الاقلال من الكمية المنتجة من ص ـ عندما تكون نسبة الاسعار ممثلة بميل الخط المستقيم أ ب ٠ اما اذا لم تعكس الاسعار النسبية هذه الاوضاع فاما الا تتحقق الكفاءة الانتاجية فى المجتمع ، واما ان تتحقق عند نقطة تختلف عن النقطة جـ ٠ اى ان الكميات الـــتى تصاحب الاسعار الجديدة قد لا تتفق مع ما يرغب المجتمع فى تحقيقه ٠

والشرط اللازم توافره لتحقيق الكفاءة الانتاجية فى المجتمع هو ان يتعادل معـــدل الاحلال الحدى لعوامل الانتاج فى جميع استخداماتها ٠ اى انه يجب ان تكون :

$$\frac{\text{الانتاجية الحدية للعمل المستخدم في السلعة س}}{\text{الانتاجية الحدية لرأس المال المستخدم في السلعة س}} = \frac{\text{الانتاجية الحدية للعمل المستخدم في السلعة ص}}{\text{الانتاجية الحدية لرأس المال المستخدم في السلعة ص}}$$

ومن الممكن بيان منحنى الامثلية الخاص بالعمليات الانتاجية فى صورة اخرى تبين اقصى ما يمكن انتاجه من السلعتين س ، ص فى ظل كميات الموارد المتاحة فى المجتمع ، وذلك على النحو المبين فى الشكل رقم (٣) ٠




شكل رقم (٢)
منحنى امكانية الانتاج

وكما هو معروف يمثل المنحنى أ ب منحنى امكانيات الانتاج والذى يعبر عن اقصى ما يمكن انتاجه من السلعتين س ، ص ٠ اما المنطقة هـ أ هـ فتعبر عن جميع الكميات الممكن انتاجها بالموارد المتاحة فى المجتمع والفن التكنولوجى المعروف ٠ وتظهر النقط التى تقع فى داخل هذه المنطقة حالة عدم استغلال الطاقة الانتاجية المتاحة لاقصى درجة ممكنة ٠ وتناظر مثل هذه النقط اى نقطة لا تقع على منحنى الكفاءة فى الشكل رقم (٢) ٠

## (ب) البرمجة الخطية :

يفترض التحليل الحدى - كما رأينا - ان دوال الانتاج مستمرة ومن ثم تفترض وجود عدد لا نهائى من الطرق الفنية المستخدمة فى انتاج السلعة وكذا قابلية وحدات السلعة ووحدات عوامل الانتاج الى الانقسام اللانهائى . وغالبا ما لا تصح هذه الافتراضات فى الواقع . ولهذا اتجه التحليل الاقتصادى الى استخدام اساليب البرمجة لتحديد الاستخدام الامثل للموارد (١٢). وتصاغ المشكلة فى هذه الحالة على ان هناك دالة هدف Objective Function يراد تعظيمها بشرط استيفاء عدد من القيود تعبر عن الموارد المتاحة. اى اذا افترضنا ان هناك سلعتين فقط يراد انتاجهما فان المشكلة تكون على النحو التالى :

يراد تعظيم

$$\text{ف} = \text{ع}_{1}\,\text{س}_{1} + \text{ع}_{2}\,\text{س}_{2}$$

بشرط ان تكون

$$\text{مجـ}_{\text{و}}\ \text{أ}_{\text{رو}}\ \text{س}_{\text{و}} \quad \text{ب}_{\text{ر}} \qquad (\text{حيث ر} = 1 ، 2 ، \ldots ، \text{م})$$

$$\text{س}_{\text{و}} \quad \text{صفر}$$

حيث و = سعر السلعة "و" ، $\text{س}_{\text{و}}$ = الكمية المنتجة من السلعة "و" . $\text{أ}_{\text{رو}}$ = كمية العامل "ر" اللازمة لانتاج وحدة واحدة من السلعة "و" أو العمل الفنى للانتاج ، $\text{ب}_{\text{ر}}$ = كمية عامل الانتاج "ر" المتاحة فى المجتمع .

---

(١٢) لمقارنة التحليل الحدى بالتحليل الذى يستخدم البرمجة الخطية انظر:
K. Boulding and Spivey, eds., Linear Programming and the Theory of the Firm. Macmillan.

ولكن لتغيير الاسعار النسبية اثر فى تحديد الكمية المنتجة من كل من السلعتين وعادة ما نحصل على اسعار عوامل الانتاج عن طريق حل البرنامج المقابل والذى يشتمل على دالة اقلالها Minimization ( وهى فى هذه الحالة دالة التكاليف) بشرط استيفاء عدد من القيود تكون فى شكل متباينات على هيئة اكبر من ان تساوى سعر الوحدة من السلع المنتجة (١٣). اى ان

يراد الاقلال

$$\text{ب} = \text{ب}_{١}\,\text{ك}_{١} + \text{ب}_{٢}\,\text{ك}_{٢}$$

بشرط ان

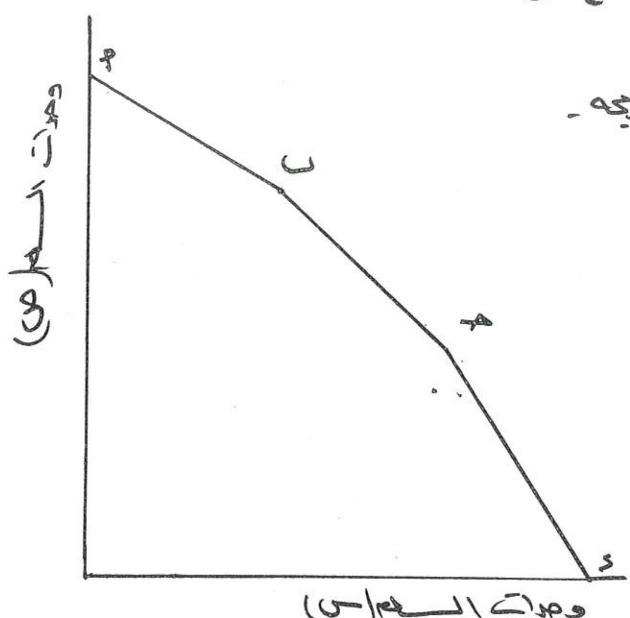
$$\text{مح}_{ر}\ \ \text{أ}_{رو}\ \text{ك}_{ر} \qquad \text{ع}_{و}$$

$$\text{ك}_{ر} \qquad \text{صفر}$$

ويكون شكل منحنى امكانية الانتاج فى هذه الحالة خط منكسر ( انظر الشكل رقم (٤) )

شكل رقم (٤)

منحنى امكانية الانتاج فى حالة البرمجة -




(١٣) انظر R. Dorfman, P.A. Samuelson, and R. Solow, Linear Programming and Economic Analysis, McGraw-Hill, 1958.

وكذلك A. Qayum, Theory and Policy of Accounting Prices, Amsterdam, 1960.

وبنفس الطريقة يعبر المنحنى أ ب جـ د عن اقصى ما يمكن ان ينتجه المجتمع من السلعتين ، والنقط الواقعة هـ أ ب جـ د تعبر عن استغلال الموارد بما يقل عن الطاقة الكاملة ، ولهذا يجب أن يحقق التوزيع كمية من الانتاج تقع على الخط المنكسر أ ب جـ د ، ويتوقف موقع هذه النقطة على نسبة سعرى السلعتين كما سنتبين فيما بعد ،

وتستطيع السلطة المركزية للتخطيط القيام بتحديد اسعار عناصر الانتاج التى تحقق قدرا من انتاج كل سلعة يتفق مع القدر المرغوب فيه بدون الحاجة الى الاوامر المباشرة ، فاذا اتفقت تقديرات هيئة التخطيط بالنسبة لاحتياجات المستهلكين عند الاسعار المحددة ، ثم التوازن فى المجتمع عند اقصى كفاءة ممكنة ، وقبل بيان ذلك نود ان نعرض لكيفية تحديد التوزيع الامثل لسلع الاستهلاك على افراد وفئات المجتمع ،

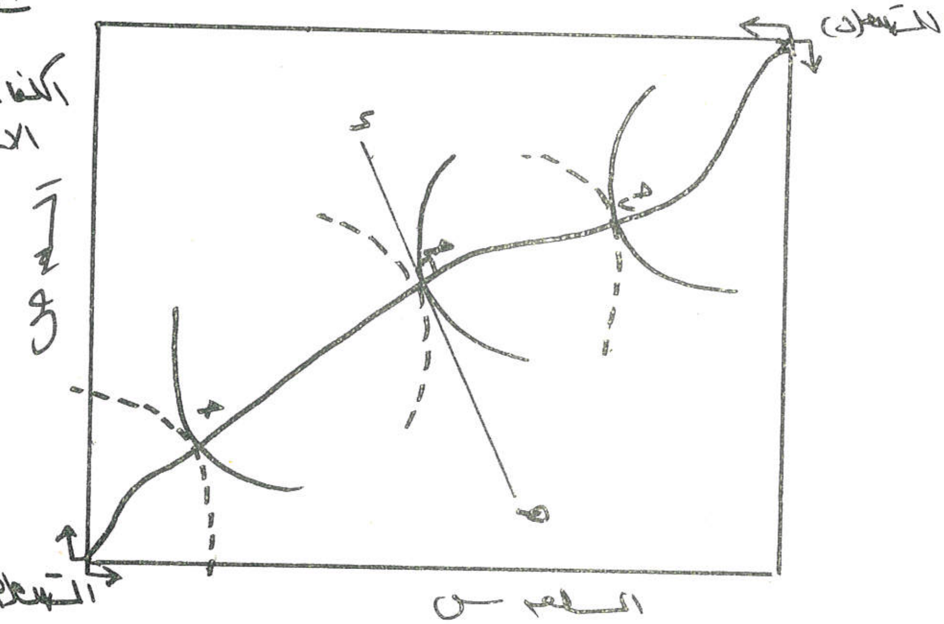
٤ - تخصيص الموارد الاستهلاكية :

ان الهدف الرئيسى من النشاط الاقتصادى هو اشباع رغبات الافراد ، ويحصل الافراد على دخولهم من العمل اساسا ، وتفترض النظرية الاقتصادية ان تصرفات المستهلكين رشيدة بمعنى انهم يفاضلون بين البدائل المتاحة لهم بغرض الحصول على اقصى اشباع ممكن ، ويتوقف طلب المستهلكين على السلع المختلفة على مقدار ما يحصلون عليه من دخل ، اسعار السلع ، اذواقهم ، وطبيعة توقعاتهم بالنسبة للمستقبل فيما يتعلق بالاسعار والدخول ، ومعروف ان الاذواق والتوقعات لا تتغير بدرجة كبيرة فى الاجل القصير ، وكذا فان دخول الافراد مخططة ومن ثم تؤدى الاسعار دورا رئيسيا فى نمط مشتريات الافراد ، وتخبرنا النظرية الاقتصادية ان الفرد يتحصل على اقصى منفعة ممكنة عندما يتعادل الاحلال الحدى لاى سلعتين مع نسبة سعريهما ، اى عندما تكون :

$$\frac{\text{المنفعة الحدية للسلعة س}}{\text{المنفعة الحدية للسلعة ص}} = \frac{\text{ثمن السلعة س}}{\text{ثمن السلعة ص}}$$

ومن ثم الاسعار فى الكميات المطلوبة من كل سلعة ، وذلك تبعا للمرونة السعرية للطلب ، ويمكن ايجاد السعر النسبى لسلعتين والذى يحقق الكفاءة فى توزيع سلع الاستهلاك باستخدام الشكل الصندوقى على افتراض ان هناك فئتين او شخصين فقط فى المجتمع ، وذلك باستخدام منحنيات السواء .

شكل رقم (٢)
الكفاءة فى توزيع سلع الاستهلاك




يمثل المحور الافقى اقصى ما يمكن انتاجه من السلعة س والمحور الرأسى اقصى ما يمكن انتاجه من السلعة ص ، ونقيس مقدار ما يحصل عليه المستهلك أ من السلعتين س ص ابتداء من الركن الجنوبى الغربى ، اما نقطة الاصل بالنسبة للمستهلك ب فتقع فى الركن الشمالى الشرقى ولهذا كلما اتجهنا الى الجنوب والى الغرب كلما زاد مقدار ما يحصل عليه من السلعتين اى اننا ننتقل من منحنى سواء الى منحنى سواء آخر اعلى منه ، وتتحقق الكفاءة فى توزيع السلع الاستهلاكية عندما يتم التوزيع بناء على منحنى التعاقد ج جر جر ..

ويلاحظ انه كلما اقتربنا من مركز المستطيل كلما زادت درجة العدالة في توزيع سلع الاستهلاك على فئات المجتمع ٠ اما اذا ابتعدنا عنه فاننا نفضل فئة على آخرى٠ وعلى اية حال اذا قرر المجتمع سياسة معينة في التوزيع ولتكن عند النقطة ج ١ فيجب ان تكون نسبة سعر س الى سعر ص ممثلة بميل الخط المستقيم هـ و٠ وان لم يتحقق ذلك خرجنا عن شرط الكفاءة في مجال الاستهلاك ٠ واذا اختلفت نسبة الاسعار عن ذلك كان احد المستهلكين على استعداد لاستبدال سلعة محل سلعة اخرى باسعار تختلف عن الاسعار التي حددها جهاز التخطيط ، ولا يتم توازن المستهلكين ٠

وتجدر ملاحظة انه اذا اختلف نسبة سعرى السلعتين عن معدل الاحلال الحدى فان معنى ذلك ان المستهلكين يحصلون على دخل يختلف عن الدخل المخطط٠ وينتج ذلك من حقيقة ان المستهلك سيحاول الحصول على السلعة التي يفضلها اكثر باى وسيلة ومنها انه يدفع سعرا يفوق السعر الرسمي ومن ثم ينخفض دخله عن الدخل الحقيقي المقدر ، وهذا مما يؤثر على توازن الاقتصاد القومى بأكمله ٠

٥ — التوازن الكلى في المجتمع :

تتحقق الكفاءة الاقتصادية في المجتمع اذا تحققت ثلاث شروط رئيسية هي :

(أ) الانتاج الامثل للسلع :

يتحدد الانتاج الامثل من السلع بناء على معرفة مجموعات السلع الممكن استخدامها باستخدام الموارد الاقتصادية المتاحة ثم اختيار المجموعة التي تحقق اقصى اشباع ممكن ٠ ويتم ذلك عندما تكون المنفعة الحدية الاجتماعية التي يحصل عليها المجتمع من استهلاك اى سلعة مساوية لتكافئها الاجتماعية Marginal Social Cost.

ويستطيع المجتمع الحصول على اكبر اشباع ممكن بالانتاج عند النقطة ج حيث يمس اعلى منحنى سواء للمجتمع منحنى امكانية الانتاج • ولكن اذا كانت نسبة الاسعار هى الممثلة بالخط المستقيم ٥ ب ٥ فنجد ان كفاءة الانتاج تتحقق عند النقطة ج١ ولكن اقصى اشباع للمجتمع لا يتم بناء على هذه الاسعار الا عند النقطة ج٢ • ولكن هذه النقطة الاخيرة تقع خارج المنطقة التى يمكن ان يتم عندها الانتاج ومن ثم يحقق المجتمع اشباعا اقل بالانتاج عند النقطة ج١ •

اما اذا غيرت السلطة المركزية للتخطيط الاسعار النسبية بحيث تعادل ميل الخط المستقيم أ ب لتحققت الكفاءة الاقتصادية فى مجالى الانتاج والاستهلاك • واذا تم ذلك لكان الاقتصاد القومى فى حالة توازن عام ولما ظهر مخزون فائض من السلع او طاقات انتاجية غير مستغلة • ويظهر هذا بوضوح اهمية الدور الذى تؤديه الاسعار فى ادارة الاقتصاد القومى •

## ٦ - اسس التسعير :

### ( أ ) التسعير فى الاقتصاديات الرأسمالية : التكلفة الحدية والتكلفة الكاملة:

تنص النظرية الاقتصادية على ضرورة التسعير عند التكلفة الحدية • اى انه يفرض السعر الذى يناظر تعادل التكلفة الحدية (وهى عبارة عن التكلفة الناتجة من زيادة الانتاج بوحدة واحدة) مع الايراد الحدى• ومن المعروف ان هذا المبدأ يحقق شرط تعظيم ارباح المنتج وهو شرط اساسى فى النظرية الاقتصادية ولكن التساؤل الذى يثور هنا هو هل هو تصرف رجال الاعمال فى الحياة العملية ؟ لقد قام الاقتصاديان البريطانيان هول وهيتش Hall and Hitch (١٥)

---

(١٥) انظر :
R. Hall and C. Hitch, "Price Theory and Business Behavior," Oxford Economic Papers, No. 2. (May 1939).

بدراسة عن سلوك عدد من رجال الاعمال البريطانيين فى هذا الصدد وتبين لهما ان غالبية رجال الاعمال يبنون قراراتهم التسعيرية على اساس اجمالى التكلفة مضافا اليها هامشا للربح ◦ وبذلك يكون المبدأ المتبع فى التسعير هو التكلفة الكاملة وليس مبدأ التكلفة الحدية ◦

ولقد تأسس الهجوم على مبدأ التسعير بالتكلفة الحدية على ما يلى : (١٦)

(١) عدم مقدرة المنتجين على التعرف على منحنيات الطلب التى يوجهونها ومن ثم لا يعرفون منحنى الايراد الحدى ◦ ويرجع السبب فى ذلك لامرين اولهما عدم معرفة المنتجين لاذواق المستهلكين ◦ والامر الثانى ان المنتجين لاية سلعة قليلون ومن ثم يتأثر كل منهم بافعال الاخرين ، وفى نفس الوقت يجهل كل منهم ردود افعال بعضهم لبعض ◦

(٢) انه بالرغم من عدم معرفة المنتجين لتصرفات بعضهم البعض الا انهم يخشون ان هم خفضوا اسعارهم ان يخفض منافسوهم من اسعارهم ايضا ◦

(٣) اما فى حالة محاولة رفع احدهم لاسعاره ، فانه يخشى ان فعل ذلك الا يرفع الاخرون اسعارهم او يرفعونها بنسبة اقل ◦ وفى كلتا الحالتين يفقد جانبا كبيرا من مبيعاته ◦

(٤) لا يخفض المنتجون اسعارهم بالاتفاق الضمنى او الصريح بينهم وذلك لاعتقادهم بان مرونة الطلب على مجموع منتجاتهم منخفضة بحيث لا تبرر مثل هذا المسلك ◦

(٥) لا يرفع المنتجون اسعارهم اذا كانت قريبة من التكلة الكاملة خشية دخول منتجين جدد السوق فى الاجل الطويل ◦

(٦) غالبا ما تكون تغيرات الاسعار باهظة التكاليف من الناحيتين الادارية والبيعية ◦

---

(١٦) راجع : R.H. Barback, The Pricing of Manufactures, London, Macmillan, 1964.

## ٧ ـ خاتمـــة :

رأينا من العرض السابق الدور الحيوى الذى تؤديه الاسعار فـى ادارة الاقتصاد القومى المخطط بطريقة تحقق مركزية التخطيط ولا مركزية التنفيذ . فاذا لم تعكس الندرة النسبية الحقيقية للموارد المتاحة فى المجتمع بطريقة ديناميكيـة لظهرت الاختلالات فيه ومظهر هذه الاختلالات فى جانب الانتاج ان عوامـل الانتاج توضع لها اسعار اقل من سعرها التوازنى مما يؤدى الى زيادة الطلـب عليها بحيث يوجد عجز فيها . اما العوامل التى حددت اسعارها باعلـى من سعر التوازن فيقل الطلب عليها عن الكمية المتاحة ومن ثم يوجد جـزء منها غير مستغل . وفى هاتين الحالتين يجب تعديل الاسعار بما يحقـق التـوازن .

اما فى جانب السلع الاستهلاكية فان انخفاض الاسعار عن سعر التـوازن ينعكس على وجود طلب فائض ومن ثم تنشأ اسواق سوداء لها . اما اذا ارتفـع سعرها التوازنى فانه ستراكم مخزون كبير منها . ويؤدى تغيير الاسعار النسبيـة الى تصحيح هذه الاوضاع بما يوازن بين قوى العرض والطلب .

ويكون من الحيوى فى هذا الصدد الاهتمام بمسألتين هما :

### الاولى :

قبل استخدام الاسعار كاداه للتصحيح تجب دراسة المرونة السعريـــة للطلب بحيث تتحقق من جدوى هذه الاداه كوسيلة لاعادة تخصيص المـوارد . اى اننا يجب ان نتحقق من ان الاختلال ناتج عن سوء التسعير وليس لاسبـاب

اخرى (مثل نقص المواد الخام ، او الرغبة فى الحد من الاستهلاك لاغراض التنمية ... الخ ) هذا من ناحية. اما من الناحية الاخرى فتفيدنا دراسة المرونةالسعرية للطلب فى معرفة مقدار التغير (بالزيادة او بالنقص) فى الاسعار الذى يحقق التوازن حتى يتم التعديل دفعة واحدة .

الثانية :

يجب ان ينظر الى الاقتصاد القومى ككل وليس للسلع المراد تغيير اسعارها فقط. فمن المعروف ان تغيير سعر بعض السلع يؤثر على الكميات المطلوبة من السلع الاخرى نتيجة لعلاقات التكامل والاحلال الموجودة فى الاقتصاد القومى وذلك منعا من ايجاد حل فى بعض جوانب الاقتصاد وخلق مشاكل فى جوانب اخرى. كذلك فان تغير الاسعار ينعكس على الدخول الحقيقية لافراد المجتمع مما يؤثر فى الطلب عليها .

اى انه من الحيوى اتباع النظرة الشاملة لا النظرة الجزئية ولهذا فان سياسة تحديد الاسعار يجب ان تكون من اختصاص السلطة المركزية للتخطيط والا تسببت لا مركزية التنفيذ فى سوء تخصيص الموارد . وجدير بالملاحظة ان الاسعار فى ج.ع.م. تحدد اما بالتسعيرة الجبرية بواسطة وزارة التموين او الصناعة او بالتسعيرة الودية بالاشتراك مع التجار وسنعالج هذا الموضوع فى مذكرة منفصلة.

على انه تجب الاشارة الى ان الاسعار ليست السياسة الوحيدة للتنفيذ اللامركزى للخطة بل يجب استغلال الادوات الاقتصادية الاخرى مثل تعديل الدخول ، والسياسات النقدية المالية الاخرى (الضرائب ، كمية النقود ، الاعانات ...) والتى تكون وسيلة التخطيط المركزى فى التنفيذ اللامركزى .