الجمهورية العربية المتحدة

معهد التخطيط القومى

مذكرة رقم (٨٩٩)

النماذج الرياضية لتخطيط الانتاج والتخزين

اعداد

الدكتورة نادية مكارى

يونية سنة ١٩٦٩

القاهرة
٣ شارع محمد مظهر - بالزمالك

الآراء التى وردت فى هذه المذكــــــــــــــــرة
تمثل رأى الكاتب ولاتمثل رأى المعهد ذاتـــــــــــــــه

المحتويــــات

****

مقدمـــــــه

من الملاحظ أنه بالرغم مما يتطلبه الاحتفاظ بالمخزون من نفقات وما يؤدى اليه من تعطيل لرأس المال فان الكثير من الهيئات والمؤسسات الصناعية والتجارية تحتفظ بمخزون سلعى سواء من المواد الخام أو السلع النصف مصنوعة أو السلع التامة الصنع ٠ وقد يكون ذلك راجعا الى رغبتها فى الاستفادة من مزايا وفورات الانتاج الكبير أو الى رغبتها فى تجنب التقلبات الموسمية فى الأسعار ٠ كذلك فان وجود فجوات زمنية أو فترات ابطاء Time Lag بين بدأ الانتاج (أو اصدار الأمر بالشراء) والحصول على الكميات المرغوب فيها لتلبية الطلب ، بالاضافة الى عشوائية الطلب المتوقع ، تعتبر من الأسباب الهامة التى تؤدى الى الاحتفاظ بالمخزون ، ولقد سبق أن اشار بعض الكتاب الى مدى التشابه بين الدوافع التى تؤدى الى الاحتفاظ بالمخزون وتلك التى تؤدى الى الاحتفاظ بالنقود — كما عرفها كينز — الا وهى : الحذر — المضاربة — السيولة ٠

وتعتبر مشكلة تحديد أفضل مستوى للمخزون السلعى وكذلك الجدول الزمنى الذى يجب اتباعه فى هذا الشأن والكميات التى يجب انتاجها (أو شراءها) لتحقيقه من أهم المشاكل التى تواجه هذه الهيئات والمؤسسات كما أن نفس المشكلة تظهر فى الكثير من المجالات الأخرى ٠ فمثلا تحديد كمية الاحتياطى النقدى الذى يجب أن تحتفظ به احدى شركات التأمين أو احد البنوك التجارية ما هى الا مشكلة تخزين — وتحديد كمية المياه الواجب الاحتفاظ بها أمام أحد الخزانات وتوقيت تصريفها لمواجهة الطلب المحتمل سواء للرى أو للكهرباء ما هى أيضا الا مشكلة تخزين وبالمثل فان تحديد عدد ونوع قطع الغيار الواجب الاحتفاظ بها لمواجهة العطل المحتمل لآلة معينة هى أيضا مشكلة تخزين ٠

من هذا يتضح مدى أهمية الدراسات المرتبطة " بنظرية التخزين " فى حل الكثير من المشاكل التطبيقية ٠ فهذه الدراسات تبين ما يجب اتخاذه من قرارات — نوعية أو كمية أو زمنية — فى المواقف المماثلة وفى ظل فروض معينة كما أنها تبين النتائج المترتبة على اتباع سياسات معينة

للتخزين • وتبدأ مثل هذه الدراسات ببناء نموذج رياضى يمثل المشكلة تحت البحث وما تتضمنه من علاقات متشابكة • وبتحليل هذا النموذج ودراسة خواصه يمكن معرفة أفضل القرارات الممكنة كما يمكن معرفة أثر القرارات المتبعة فعلا • فمثلا اذا كان الهدف هو معرفة سياسة التخزين التى تحقق أقل نفقات ممكنة فى ظل شروط معينة فان النموذج الرياضى سيعتبر دالة النفقات ـ التى تعتمد على الشروط الموضوعة ـ هى دالة الهدف وبتحليل العلاقات والدوال المكونة لهذا النموذج والمؤثرة على دالة الهدف يمكن التوصل الى مجموعة القرارات التى تحقق النهاية الصغرى لهذه الدالة •

وبذلك نكون قد حصلنا على " السياسة المثلى للتخزين " وبالاضافة الى ذلك فانه يمكن معرفة النتائج المترتبة على اتباع أى سياسة أخرى للتخزين قد تكون أثر بساطة أو واقعية من السياسة المثلى •

وسيقتصر التحليل هنا على مشاكل ونماذج التخزين الخاصة بسلعة واحدة تامة الصنع* كما سنفترض أن الهيئة المسئولة عن سياسة التخزين لا تستطيع التحكم فى الطلب على هذه السلعة أو سعرها وانما يمكنها التحكم كميا وزمنيا فى انتاجها (أو شراءها من المنتج) •

أنواع النفقات المرتبطة بمشكلة التخزين :

يمكن تقسيم النفقات المرتبطة بمشكلة التخزين الى ثلاث أنواع :

١ ـ النفقة الكلية للانتاج (أو الشراء) Ordering or Set-up cost

وهى نفقة انتاج (أو شراء) كمية معينة من السلعة سواء لرفع مستوى المخزون منها أو لاحلال الكمية التى تم بيعها من المخزون واعادة مستوى المخزون الى ما كان عليه • ويلاحظ أن هذه النفقة تتكون من جزئين : جزء يتناسب طرديا مع حجم الكمية المنتجة (أو المشتراه) وجزء ثابت يجب دفعه مهما كان حجم الكمية المنتجة • مثال ذلك نفقة تجهيز الالات لانتاج سلعة معينة أو النفقات الادارية المصاحبة لاصدار الأمر بالشراء •

* الهدف من هذا الفرض هو مجرد تبسيط العرض فهو لا يحد من عمومية التحليل وامكانية تطبيقه على جميع أنواع المخزون •

- فاذا كانت أ هى عدد الوحدات المرغوب فى انتاجها (أو شرائها) (أ $\geqslant$ صفر)
- واذا كانت ك هى نفقة انتاج الوحدة بالجنيه (ك $\geqslant$ صفر)
- واذا كانت ك هى النفقة الثابتة للتجهيز بالجنيه (ك $\geqslant$ صفر)

فان : ك + ك أ تمثل النفقة الكلية لانتاج الكمية أ

٢ — <u>نفقة الاحتفاظ بالمخزون</u> Holding or Carrying Cost

وهى نفقة الاحتفاظ بالسلعة فى شكل مخزون وتتضمن قيمة ايجار المخزن وقيمة ما يفقد من فوائد نتيجة عدم استثمار رأس المال وتعطيله فى شكل مخزون (أى نفقة الفرصة البديلة)٠ وما قد تتعرض له السلعة من انخفاض فى قيمتها كنتيجة للتقادم ، بالاضافة الى النفقات الادارية الأخرى. ونفقة الاحتفاظ بالمخزون تتوقف على كل من حجم المخزون وطول فترة التخزين ٠

- فاذا كانت ص هى عدد الوحدات المخزونة (ص $\geqslant$ صفر)٠
- واذا كانت هـ هى نفقة الاحتفاظ بوحدة مخزون واحدة ولوحدة زمنية واحدة (هـ $\geqslant$ صفر)

فان : هـ ص تمثل نفقة الاحتفاظ بالكمية ص كمخزون (لوحدة زمنية واحدة)

٣ — <u>نفقة العجز فى المخزون</u> Shortage or Penalty Cost

وهى النفقات الناجمة عن التأخر فى تلبية الطلبات أو عن العجز فى اجابة هذه الطلبات مثال ذلك الاضطرار الى بيع السلعة بسعر منخفض مقابل التأخر فى تسليمها (غرامات التأخير) أو فقد العميل نهائيا ٠

- فاذا كانت س هى عدد الوحدات التى لم تكن متوفرة وقت الطلب (س $\geqslant$ صفر)
- واذا كانت جـ هى نفقة عجز المخزون بمقدار وحدة واحدة ولوحدة زمنية واحدة (جـ $\geqslant$ صفر)٠

فان : حـ س تمثل النفقة الناجمة عن عدم تلبية س وحدة من الطلب (لوحدة زمنية واحدة)

وسنقوم هنا بعرض بعض النماذج الرياضية لنظم التخزين مبينين كيفية بناء هذه النماذج وكيفية تحليلها للتوصل الى السياسة المثلى للتخزين وذلك فى ظل فروض مختلفة فيما يتعلق بأنواع النفقات التى تظهر بالنموذج وبفترات الابطاء الخاصة بالانتاج ٠

وبافتراض أن الهيئة المسئولة عن التخزين لا تستطيع أن تتخذ قرارا بتخفيض حجم المخزون ـ سواء لعدم امكانية ذلك أو كنتيجة للارتفاع الباهظ فى تكاليف تخفيض المخزون ـ فاننا سنبدأ بالنماذج المبسطة التى تفترض أن الطلب على السلعة محدد ومعلوم ٠ ثم ننتقل الى النماذج التى تعالج الطلب العشوائى ـ الذى يتبع توزيعا احتماليا معلوما ٠ *

---

* تود الكاتبة أن تشكر السيدة / سوسن احمد خضر على المجهود الذى بذلته فى كتابة هذة المذكرة ٠

١ - نماذج التخزين ذات الطلب المحدد
Deterministic Models.

لنفرض أن أحد المنتجين يعلم أن الكمية المطلوبة - خلال الزمن م - من السلعة التى ينتجها هى ط وحدة وأن هذا الطلب سيتحقق بمعدل زمنى ثابت هو د (أى أن $د = \frac{ط}{م}$)

وسنفرض أيضا أن المنتج يستطيع التحكم فى الكميات التى تنتج لمواجهة هذا الطلب وكذلك فى التوقيت الزمنى للانتاج بالاضافة الى أنه يستطيع الاحتفاظ بأى كمية من السلعة كمخزون كما أنه يهدف الى تخفيض نفقاته الى أقل قيمة ممكنة .

من الواضح أن هناك الكثير من السياسات الخاصة بتنظيم الانتاج والتخزين والتى يستطيع المنتج اختيار أحدها ليواجه الطلب المعلوم . الا أن تحديد السياسة المثلى - أى التى تحقق أقل نفقات - يتوقف على الكثير من العوامل مثل :

- هل من الممكن تجاهل جزء من الطلب ؟ وهل الكمية المطلوبة التى لا تتوافر لدى المنتج يمكن تلبيتها فيما بعد مقابل نفقات معينة أم أنها ستفقد نهائيا ؟
ان هذا سيتوقف على طبيعة الطلب على السلعة وعلى المقارنة بين نفقات العجز ونفقات التخزين .

- هل النفقة الثابتة للتجهيز كبيرة بحيث يجب تجنبها وبالتالى العمل على انتاج كميات كبيرة على فترات زمنية متباعدة وتخزينها ؟ أم أن نفقات التخزين هى المرتفعة بحيث يجب تجنبها بانتاج كميات صغيرة على فترات زمنية متقاربة ؟

- هل هناك فجوة زمنية بين البدء فى الانتاج والحصول على المنتجات مما قد يؤدى الى ضرورة البدء فى الانتاج بالرغم من عدم نفاذ المخزون ؟

ونظرا لتعدد العوامل المؤثرة على سياسة التخزين فاننا سنعرض فيما يلى بعض النماذج

المبسطة التى تظهر العلاقة بين النفقات المختلفة وكيفية تأثيرها على القرارات الخاصة بمستوى المخزون* فى ظل فروض متعددة .

النموذج الاول :

سنفترض هنا أن فترة الابطاء** صغيرة جدا بحيث لا تؤثر على قرارات الانتاج والتخزين وبالتالى فانه يمكن تجاهلها، كما سنفترض أن المنتج ملزم بتلبية جميع الطلبات ولا يستطيع تجاهل أى منها*** وعلى ذلك فان المنتج عليه أن يقوم بانتاج الكمية ط . ونتساءل الان عن كيفية تنظيم الانتاج . هل يجب انتاج الكمية المطلوبة كلها دفعة واحدة ؟ أم على دفعات كبيرة متباعدة ؟ أم على دفعات صغيرة متقاربة ؟ وما عدد هذه الدفعات وطول الفترات الزمنية بينها ؟

لنفرض أن مستوى المخزون فى بداية الزمن م هو الصفر وأن عدد دفعات الانتاج خلال هذا الزمن ن (مقدار مجهول) وأن $م_ر$ هو طول الفترة الزمنية رقم ر — أى عدد الوحدات الزمنية التى تمر بين الحصول على الدفعة رقم ر والدفعة رقم ر + ١ — وبالتالى فان

$$\sum_{ر=1}^{ن} م_ر = م$$

ونظرا لأن طول فترة الابطاء يساوى الصفر فان المنتج لن يبدأ دفعة جديدة من الانتاج الا اذا كان مستوى المخزون مساويا للصفر . فاذا كانت $ص_ر$ هى الكمية التى سينتجها فى بداية الفترة الزمنية ر (ر = ١ ، ... ، ن) فان $\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر = ط$ كما أن $ص_ر$ تمثل مستوى المخزون فى بداية الفترة وتتناقص بمعدل ثابت هو د حتى تصل الى الصفر فى نهاية الفترة .

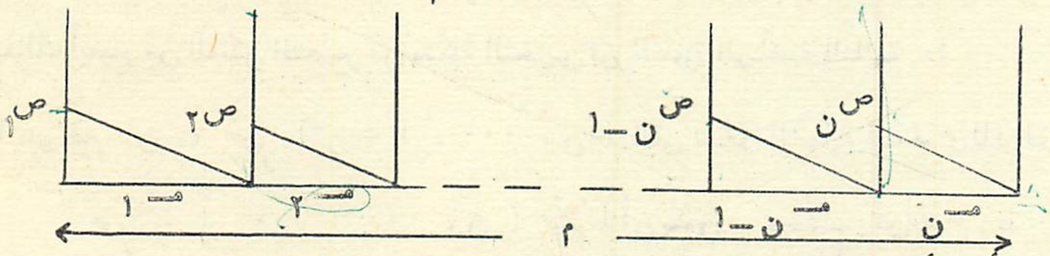
---

* فى جميع نماذج هذا الجزء سنفترض أن مستوى المخزون هو متغير متصل

** فترة الابطاء هى الزمن الذى يمر بين بدأ الانتاج وتسلم المنتجات (أو بين تاريخ اصدار الأمر بشراء السلعة وتاريخ تسلمها) وهذا الزمن قد يكون مقدارا ثابتا ومعلوما وقد يكون متغيرا عشوائيا . وكذلك فانه قد يتوقف — بالنسبة لبعض السلع — على حجم الكمية المنتجة والقرارات الانتاجية المرتبطة بها . ولكن فى هذه المذكرة سنفترض دائما أن طول فترة الابطاء ثابت .

*** قد يكون ذلك راجعا الى ارتفاع نفقات العجز الى حد كبير، ويمكن التعبير عن ذلك رياضيا بوضع $ح = \infty$.

وبالتالى فانه يمكن تمثيل مستوى المخزون خلال الفترة ر بخط مستقيم ميله سالب ويساوى د كما أنه يمكن استنتاج أن متوسط مستوى المخزون خلال الفترة هو $\frac{\text{ص}_{\text{ر}}}{٢}$



يلاحظ أيضا أن النفقة الاجمالية التى يتحملها المنتج خلال الزمن م ستتوقف على كل من عدد مرات الانتاج (ن) وحجم الانتاج فى كل مرة ($\text{ص}_{\text{ر}}$) . فاذا رمزنا الى دالة النفقات الكلية خلال الزمن م بالرمز $\text{ق}_{\text{م}}$ (ن ، $\text{ص}_{\text{ر}}$: ر = ١ ، ... ، ن) فان ما يريده المنتج هو تحديد قيم ن ، $\text{ص}_{\text{ر}}$ (ر = ١ ... ، ن) التى تحقق النهاية الصغرى لهذه الدالة بشرط أن يكون $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}} = \text{ط}$*

ولمعرفة الشكل الرياضى للدالة ق (ن ، ص : ر = ١ ... ن) نحاول ايجاد مكوناتها :

فطالما أن متوسط مستوى المخزون فى الفترة رقم ر هو $\frac{\text{ص}_{\text{ر}}}{٢}$ ، فان :

نفقة الاحتفاظ بالمخزون خلال الفترة رقم ر $= \text{هـ} \cdot \frac{\text{ص}_{\text{ر}}}{٢} \cdot \text{مـ}_{\text{ر}}$ ر = ١ ... ن

وبالتالى فان النفقة الكلية للانتاج والتخزين خلال الفترة رقم ر

$$= \text{ك} + \text{ى}\,\text{ص}_{\text{ر}} + \text{هـ} \cdot \frac{\text{ص}_{\text{ر}}}{٢} \cdot \text{مـ}_{\text{ر}}$$

$$= \text{ك} + \text{ى}\,\text{ص}_{\text{ر}} + \frac{\text{هـ}}{٢\text{د}}\,\text{ص}_{\text{ر}}^{٢} \qquad \text{ر} = ١ \ldots \text{ن}$$

(لأن $\text{مـ}_{\text{ر}} = \frac{\text{ص}_{\text{ر}}}{\text{د}}$)

ومن هذا يتضح أن :

$$\text{ق}_{\text{م}}\,(\text{ن} ، \text{ص}_{\text{ر}} : \text{ر} = ١ \ldots \text{ن}) = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \left[\text{ك} + \text{ى}\,\text{ص}_{\text{ر}} + \frac{\text{هـ}}{٢\text{د}}\,\text{ص}_{\text{ر}}^{٢}\right]$$

---

* طالما أن $\text{ص}_{\text{ر}} = \text{د}\,\text{مـ}_{\text{ر}}$ فانه يمكن النظر الى المشكلة باعتبارها ايجاد قيم ن ، $\text{مـ}_{\text{ر}}$ التى تحقق النهاية الصغرى لدالة النفقات $\text{ق}_{\text{ط}}$ (ن ، $\text{مـ}_{\text{ر}}$: ر = ١ ... ن) بشرط أن يكون $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{مـ}_{\text{ر}} = \text{م}$

$$= \text{ن ك} + \text{ک} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}} + \frac{\text{هـ}}{\text{٢ د}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}}^{2}$$

وبذلك أصبح من الممكن التعبير عن مشكلة التخزين فى الصورة الرياضية التالية :

ما هى قيم ن ، ص$_{\text{ر}}$ (ر = ١ ، ... ، ن) التى تحقق النهاية الصغرى للدالة

ق$_{\text{م}}$ (ن ، ص$_{\text{ر}}$: ر = ١ ، ... ، ن) بشرط أن يكون $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}} = \text{ط}$.

وبحل هذه المشكلة الرياضية* نجد أن النهاية الصغرى للنفقات تتحقق اذا قسمنا الزمن م الى $\hat{\text{ن}}$ من الفترات المتساوية ، طول كل منها $\hat{\text{ـمـ}}$ من الوحدات الزمنية على أن يكون مستوى المخزون فى بداية كل فترة هو $\hat{\text{ص}}$ ، وذلك حيث :

$$\hat{\text{ن}} = \sqrt{\text{م ط} \cdot \frac{\text{هـ}}{\text{٢ ك}}} \text{ ،}$$

$$\hat{\text{ـمـ}} = \frac{\text{م}}{\hat{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{\text{٢ ك}}{\text{هـ}} \cdot \frac{1}{\text{د}}} \text{ ،}$$

$$\text{**} \quad \hat{\text{ص}} = \frac{\text{ط}}{\hat{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{\text{٢ ك}}{\text{هـ}} \cdot \text{د}} \text{ .}$$

ويمكن الوصول الى نفس هذه النتائج اذا بدأنا بافتراض أن الفترات الزمنية متساوية وأن المطلوب هو تحديد طول الفترة الزمنية — وبالتالى مستوى المخزون فى بداية الفترة — الذى يحقق النهاية الصغرى لمتوسط النفقات الكلية للوحدة الزمنية .

فاذا كانت ـمـ هى طول الفترة الزمنية ، ص هو مستوى المخزون فى بدايتها ، فانه باستخدام التحليل السابق نجد أن :

النفقة الكلية للانتاج والتخزين خلال أى فترة زمنية = $\text{ك} + \text{ک ص} + \frac{\text{هـ}}{\text{٢ د}} \text{ص}^{2}$ ،

ولكن ص = د ـمـ ، أى أن :

---

* انظر الملحق الرياضى رقم (١) .

** المقدار $\sqrt{\frac{\text{٢ ك}}{\text{هـ}} \cdot \text{د}}$ يعرف " بالحجم الاقتصادى للمخزون " Economic Lot Size

النفقة الكلية للانتاج والتخزين خلال أى فترة زمنية = $\text{ك} + \text{ى} \cdot \text{د} \cdot \text{م} + \frac{\text{هـ د}}{٢}\ \text{م}^{٢}$

وبالقسم على م نحصل على متوسط النفقة الكلية للوحدة الزمنية :

متوسط النفقة الكلية للوحدة الزمنية = $\frac{\text{ك}}{\text{م}} + \text{ى د} + \frac{\text{هـ د}}{٢}\ \text{م}$

ونظرا لأن هذه الدالة محدبة* فانها تصل الى نهايتها الصغرى عندما يتساوى معاملها التفاضل الأول (بالنسبة الى م) بالصفر . أى عندما تكون :

$$-\frac{\text{ك}}{\text{م}^{٢}} + \frac{\text{هـ د}}{٢} = \text{صفر}$$

وقيمة م التى تحقق هذه العلاقة هى القيمة $\hat{\text{م}}$. أى أن النهاية الصغرى لمتوسط النفقات الكلية للوحدة الزمنية تتحقق عندما يكون طول الفترة هو $\hat{\text{م}}$ وحدة زمنية وبالتالى فان حجم المخزون فى بداية الفترة يجب أن يكون $\text{د} \cdot \hat{\text{م}}$ (أى $\hat{\text{ص}}$) كما أن عدد الفترات الزمنية سيكون $\frac{\text{م}}{\hat{\text{م}}}$ (أى $\hat{\text{ن}}$) .

وعلى ذلك فانه يمكن وصف السياسة المثلى كما يلى :

يجب تقسيم الزمن م الى $\hat{\text{ن}}$ من الفترات المتساوية ، طول كل منها $\hat{\text{م}}$ وفى بداية كل فترة يجب انتاج وتخزين الكمية $\hat{\text{ص}}$ ثم مواجهة الطلب باستخدام هذه الكمية حتى يصل مستوى المخزون الى الصفر فى نهاية الفترة .

ويتبين مما سبق أن الحجم الأمثل للمخزون يتناسب طرديا مع النفقة الثابتة للانتاج وعكسيا مع نفقة الاحتفاظ بالمخزون . كما يتبين أيضا أنه يتناسب مع الجذر التربيعى للكمية المطلوبة . وهذا يتعارض مع ما قد يتبادر الى الذهن من ضرورة الاحتفاظ بالمخزون كنسبة ثابتة من حجم المبيعات المتوقعة .

---

* لأن المعامل التفاضلى الثانى لها بالنسبة الى م يساوى $\frac{\text{ك}}{\text{م}^{٣}}$ وهو مقدار موجب .

النمـوذج الثانـى :

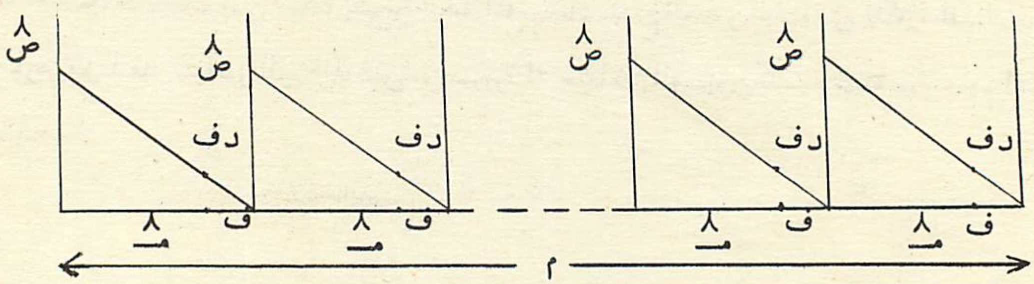
سنفترض هنا أن فترة الابطاء طولها ف وحدة زمنية . بمعنى أنه اذا بدأ الانتاج فى اللحظة ظ فان الدفعة الجديدة من الانتاج يتم تسلمها فى اللحظة ظ + ف وفيما عدا ذلك فاننا سنستخدم باقى رموز وفروض النموذج الأول .

وباتباع نفس طريقة التحليل السابقة فاننا نحصل على نفس النتائج التى تبين أن السياسة المثلى هـى :

" تقسيم الزمن م الى $\hat{ن}$ من الفترات المتساوية ـ طول كل منها $\hat{م}$ من الوحدات الزمنية ، وفى بداية كل فترة يجب أن يكون مستوى المخزون قبل استلام الدفعة الجديدة من الانتاج هو الصفر ثم يرتفع الى المستوى $\hat{ص} = \sqrt{\frac{٢ك}{هـ} \cdot د}$ لحظة استلام الدفعة الجديدة من الانتاج .

ولكن السياسة المثلى كما تم وصفها الآن لا تبين متى يجب البدء فى انتاج الدفعة الجديدة ولتحديد ذلك نلاحظ أن الطلب الكلى خلال فترة الابطاء هو د ف . وطالما أن حجم المخزون فى نهاية الفترة يجب أن يكون صفرا فانه يجب البدء فى انتاج الدفعة الجديدة من المنتجات ـ وحجمها $\hat{ص}$ ـ عندما يصل المخزون الى المستوى د ف .

ويمكن توضيح ذلك بالشكل البيانى التالى :



ويلاحظ أن النموذج الأول ما هو الا حالة خاصة من النموذج الثانى ، تكون فيه ف = صفر .

مثال (١) :

منتج يبيع سنويا الى أحد العملاء ٢٤٠٠٠ وحدة من سلعة معينة بشرط أن يتم تسليم هذه المنتجات بمعدل شهرى ثابت . فاذا كانت نفقة الاحتفاظ بوحدة من السلعة فى المخزن لمدة شهر هى ١٠ قروش بينما كانت النفقة الثابتة لبدء الانتاج هى ٤٠٠ جنيه ونفقة انتاج الوحدة هى ٢٠ قرشا ـ فما هو الجدول الانتاجى الذى يجب أن يتبعه المنتج حتى يتحمل أقل نفقات ممكنة خلال السنة وما قيمة هذه النفقات (بافتراض أنه ملزم بتسليم جميع الوحدات المطلوبة) ؟

واذا علمت أن الفترة التى تمر بين بدء الانتاج والحصول على السلعة هى نصف شهر ـ فما هى السياسة المثلى للتخزين ؟

الحل : م = ١٢ شهر ، ط = ٢٤٠٠٠ وحدة

$$\therefore \text{د} = \frac{٢٤٠٠٠}{١٢} = ٢٠٠٠ \text{ وحدة شهريا}$$

$$\text{ك} = \overrightarrow{٤٠٠} \quad ، \quad \text{هـ} = \overrightarrow{٠٫١٠} \quad ، \quad \text{ح} = \infty$$

$$، \quad \text{ى} = \overrightarrow{٠٫٢٠}$$

$$\therefore \hat{\text{ص}} = \sqrt{\frac{٢\text{ك}}{\text{هـ}} \cdot \text{د}} = ٤٠٠٠ \text{ وحدة}$$

$$\hat{\text{ت}} = \frac{\hat{\text{ص}}}{\text{د}} = \sqrt{\frac{٢\text{ك}}{\text{هـ}} \cdot \frac{١}{\text{د}}} = ٢ \text{ شهرا}$$

$$\hat{\text{ن}} = \frac{\text{م}}{\hat{\text{ت}}} = \sqrt{\frac{\text{م ط}}{٢\text{ك}} \cdot \text{هـ}} = ٦$$

$$\therefore \hat{\text{ق}} = \hat{\text{ن}} \left(\text{ك} + \text{ى} \hat{\text{ص}} + \text{هـ} \frac{\hat{\text{ص}}}{٢} \hat{\text{ت}} \right)$$

$$= ٦ \left(٤٠٠ + ٠٫٢ \times ٤٠٠٠ + ٠٫١ \times \frac{٤٠٠٠}{٢} \times ٢ \right) = \overrightarrow{٩٦٠٠}$$

وحيث أن فترة الابطاء ف = ½ شهر ∴ د ف = $\frac{٢٠٠٠}{٢}$ = ١٠٠٠ وحدة

أى أن السياسة المثلى تكون :

يجب تقسيم السنة الى ٦ فترات متساوية ، طول كل منها شهرين ، وفى كل فترة ـ عندما يصل حجم المخزون الى ١٠٠٠ وحدة فان المنتج يجب أن يبدأ فى انتاج كمية جديدة حجمها ٤٠٠٠ وحدة ويتسلمها فى بداية الفترة التالية ـ أى بعد أن يكون حجم المخزون قد انخفض الى الصفر . واذا اتبع هذه السياسة فان اجمالى النفقات التى سيتحملها يكون ٩٦٠٠ ح .

النموذج الثالث :

سنفترض الآن أن المنتج يمكنه تجاهل جزء من الطلب حين حدوثه على أن يقوم بتلبيته فيما بعد عندما تتوفر لديه السلعة* وذلك مقابل دفع النفقة ج عن كل وحدة من الطلب الغير مجاب ولكل وحدة زمنية يظل فيها هذا الطلب غير مجاب . ونظرا لأن مستوى المخزون خلال أى فترة زمنية يتناقص نتيجة تلبية الطلبات المتتالية فان هذا المستوى يصل الى الصفر عندما يتساوى الطلب الاجمالى مع الحجم الكلى للمخزون كما أنه يأخذ قيما سالبة اذا كانت الكمية المطلوبة أكبر من الكمية المتوفرة ، وفى هذه الحالة فان مستوى المخزون (السالب) يمثل حجم الطلب الغير مجاب .

ولبناء نموذج تخزين فى ظل الفرض الجديد سنفرق بين مستويين للمخزون فى بداية أى فترة زمنية :

مستوى التخزين قبل استلام الدفعة الجديدة من الانتاج وسنرمز له بالرمز

س ر ، ر = ١ ، ... ، ن (س ر ⩽ صفر)**

ومستوى التخزين بعد استلام الدفعة الجديدة من الانتاج وسنرمز له بالرمز

ص ر ، ر = ١ ، ... ، ن (ص ر ⩾ س ر)

---

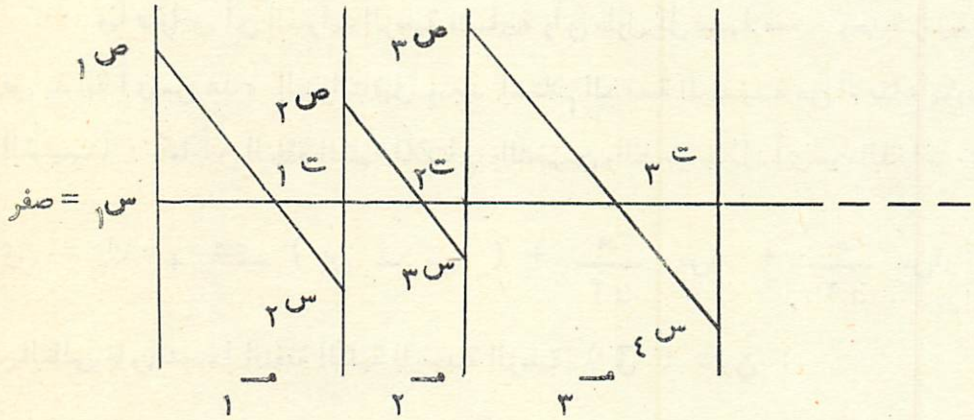
* هذه الحالة تسمى Backlog Case

** طالما أن الطلب معلوم فان س ر يجب أن لا تأخذ قيما موجبة .

وعلى ذلك فان $ص_ر - س_ر$ تكون دائما اما موجبة أو تساوى الصفر وهى تمثل حجم الدفعة الجديدة من الانتاج التى يتم استلامها فى بداية الفترة ر .

كذلك سنرمز الى الجزء من الفترة الزمنية ر الذى يكون فيه مستوى المخزون سالبا بالرمز $ت_ر$ ، ر = ١ ... ن

ويمكن توضيح هذه الحالة بالشكل البيانى التالى



ويلاحظ أن $س_ر$ ، $ص_ر$ ، $\bar{م}_ر$ يجب أن تحقق العلاقات التالية :

$$\sum_{ر=1}^{ن} (ص_ر - س_ر) = ط \quad ، \quad \sum_{ر=1}^{ن} \bar{م}_ر = م$$

كما أن متوسط مستوى المخزون فى الفترة $(\bar{م}_ر - ت_ر)$ هو $\frac{ص_ر}{2}$

أى أن نفقة الاحتفاظ بالمخزون فى الفترة رقم ر $= هـ \cdot \frac{ص_ر}{2} \cdot (\bar{م}_ر - ت_ر)$

بينما يكون متوسط مستوى المخزون (السالب) فى الفترة $ت_ر$ هو $\frac{س_{ر+1}}{2}$

أى أن نفقة العجز فى المخزون فى الفترة رقم ر $= جـ \cdot \frac{\bar{س}_{ر+1}}{2} \cdot ت_ر$

وبالتالى فان نفقات الانتاج والتخزين والعجز فى الفترة رقم ر

$$= \text{ك} + \text{ى}\,(\text{ص}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}}) + \frac{\text{هـ}}{٢}\,\text{ص}_{\text{ر}}\,(\text{م}_{\text{ر}} - \text{ت}_{\text{ر}}) - \frac{\text{ح}}{٢}\,\text{س}_{\text{ر}+١}\,\text{ت}_{\text{ر}}$$

$$= \text{ك} + \text{ى}\,(\text{ص}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}}) + \frac{\text{هـ}}{٢\text{د}}\,\text{ص}^{٢}_{\text{ر}} + \frac{\text{ح}}{٢\text{د}}\,\text{س}^{٢}_{\text{ر}+١} \qquad \text{ر} = ١ \cdots \text{ن}$$

وذلك لأن $\text{د} = \frac{\text{ط}}{\text{م}} = \frac{\text{ص}_{\text{ر}}}{\text{م}_{\text{ر}} - \text{ت}_{\text{ر}}} = \frac{-\text{س}_{\text{ر}+١}}{\text{ت}_{\text{ر}}}$ لجميع قيم ر .

وبافتراض أن الفترات الزمنية متساوية وأن طول كل منها م وحدة زمنية فان مستوى المخزون في بداية أى من هذه الفترات قبل وبعد استلام الدفعة الجديدة من الانتاج يكون س ، ص (على الترتيب) . كما أن النفقة الكلية للانتاج والتخزين والعجز خلال أى من الفترات تكون :

$$\text{ق} = \text{ك} + \text{ى}\,(\text{ص} - \text{س}) + \frac{\text{هـ}}{٢\text{د}}\,\text{ص}^{٢} + \frac{\text{ح}}{٢\text{د}}\,\text{س}^{٢}$$

وبالتالى فان متوسط النفقة الكلية للوحدة الزمنية ($\bar{\text{ق}}$) تكون :

$$\bar{\text{ق}} = \frac{\text{ق}}{\text{م}} = \frac{\text{ك}}{\text{م}} + \text{ى}\,\frac{\text{ص} - \text{س}}{\text{م}} + \frac{\text{هـ}}{٢\text{د}}\,\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{م}} + \frac{\text{ح}}{٢\text{د}}\,\frac{\text{س}^{٢}}{\text{م}}$$

ويصبح المطلوب هو ايجاد قيم م ، س ، ص التى تحقق النهاية الصغرى للدالة $\bar{\text{ق}}$.

وبحل هذه المشكلة الرياضية* نجد أن هذه القيم هى :

$$\hat{\text{ص}} = \sqrt{\frac{٢\text{ك}}{\text{هـ}} \cdot \frac{\text{ح}}{\text{هـ} + \text{ح}} \cdot \text{د}}$$

$$\hat{\text{س}} = -\sqrt{\frac{٢\text{ك}}{\text{ح}} \cdot \frac{\text{هـ}}{\text{هـ} + \text{ح}} \cdot \text{د}}$$

$$\hat{\text{ص}} - \hat{\text{س}} = \sqrt{\frac{٢\text{ك}}{\text{هـ}} \cdot \frac{\text{هـ} + \text{ح}}{\text{ح}} \cdot \text{د}}$$

$$\hat{\text{م}} = \frac{\hat{\text{ص}} - \hat{\text{س}}}{\text{د}} = \sqrt{\frac{٢\text{ك}}{\text{هـ}} \cdot \frac{\text{هـ} + \text{ح}}{\text{ح}} \cdot \frac{١}{\text{د}}}$$

---

* انظر الملحق الرياضى رقم (٢)

$$\hat{ن} = \frac{م}{\hat{م}} = \sqrt{\frac{أ ط}{٢ ك} \cdot \frac{هـ ح}{هـ + ح}}$$

ويمكن وصف السياسة المثلى للانتاج والتخزين كما يلى :

يجب تقسيم الزمن م الى $\hat{ن}$ من الفترات الزمنية المتساوية* طول كل منها $\hat{م}$ وفى بداية كل فترة سيكون هناك $-\hat{س}$ وحدة من الطلب الغير مجاب . ولكن مستوى المخزون سيرتفع الى $\hat{ص}$ ـ فى بداية الفترة أيضا ـ نتيجة تسلم الكمية ($\hat{ص}$ ـ $\hat{س}$) من المنتجات الجديدة .

واذا كانت فترة الابطاء طولها ف وحدة زمنية فان الطلب خلال هذه الفترة يكون د ف ـ ويكون على المنتج أن يبدأ فى انتاج الدفعة الجديدة من المنتجات (وحجمها $\hat{ص}$ ـ $\hat{س}$) عندما يصل المخزون الى المستوى ($\hat{س}$ + د ف) .

ونلاحظ أيضا أنه اذا كانت ح $\longrightarrow \infty$ فانه $\frac{هـ + ح}{ح} = \frac{هـ}{ح} + ١ \longrightarrow ١$

وبالتالى فان $\hat{س} \longrightarrow$ صفر ،

$$\hat{ص} - \hat{س} \longrightarrow \sqrt{\frac{٢ ك}{هـ} \cdot د}$$

أى أننا نحصل على السياسة المثلى الخاصة بالنموذجين الأول والثانى . وهذا بديهى لأن ح $\longrightarrow \infty$ تعنى زيادة نفقات العجز بدرجة كبيرة يجب معها تجنب حدوث أى عجز فى اجابة الطلب .

يلاحظ أيضا أن نفقة انتاج الوحدة (ك) لا تظهر فى المعادلات التى تحدد السياسة المثلى فى جميع النماذج السابقة . وهذا أيضا بديهى اذ أن جميع النماذج السابقة تفترض أنه لا بد من انتاج الكمية ط حتى يمكن تلبية جميع الطلبات سواء بصورة فورية او بالتأخير بعض الوقت .

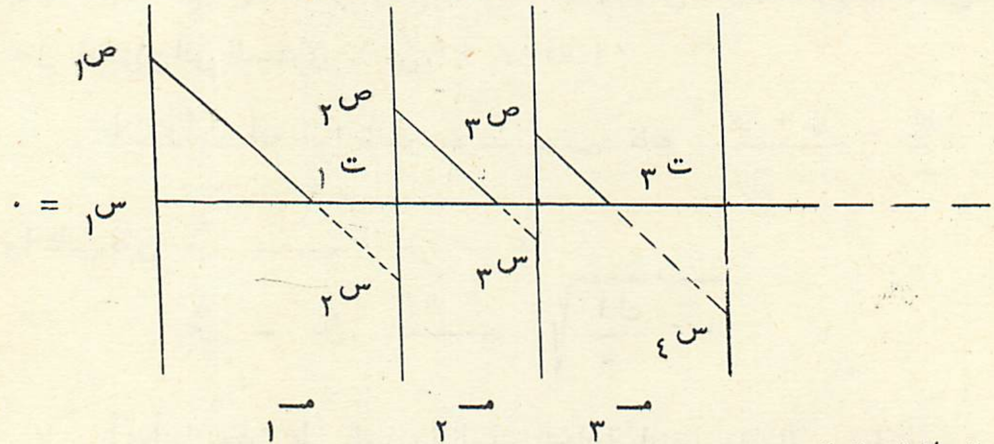
---

* انظر الملحق الرياضى رقم (٣) لاثبات أن الفترات الزمنية يجب أن تكون متساوية وأن القيم $\hat{ص}$ ، $\hat{س}$ ، $\hat{م}$ تحقق النهاية الصغرى لاجمالى نفقات الانتاج والعجز والتخزين خلال الزمن م

النمـوذج الرابـــع :

نفترض الآن أن المنتج يستطيع تجاهل جزء من الطلب وكنتيجة لذلك فانه سيفقد هذا الجزء كليـــة ولن يستطيع تلبيته فيما بعد* . ومقابل ذلك فانه سيتحمل النفقة ح عن كل وحدة طلب يفقدهـا (ولكل وحدة زمنية) .

وباستخدام نفس رموز النموذج السابق مع اعتبار أن ($-س_ر$) تمثل الآن كمية الطلب التى يتم فقدها فى نهاية الفترة ر ـ ١ (أى بداية الفترة ر) فان $ص_ر$ تمثل حجم الدفعة من الانتاج التى يـتم تسلمها فى بداية الفترة ر . ويمكن تمثيل هذا النموذج بيانيا كما يلى :



ويكون لدينا العلاقات التالية

$$م = \sum_{ر=١}^{ن} \bar{م}_ر$$

$$ط = \sum_{ر=١}^{ن} (ص_ر - س_ر)$$

كما أن نفقة الانتاج فى الفترة ر تكون ك + ڪ $ص_ر$. وبالتالى فانه يمكن التعبير عن اجمالـــى نفقات الانتاج والمخزون والعجز خلال الزمن م بالدالة :

---

* هذه الحالة تسمى Lost Sales Case

$$ق_{م} \left(ن ، ص_{ر} ، س_{ر+1} : ر = 1 ، \dots\dots ، ن \right) =$$

$$= \sum_{ر=1}^{ن} \left(ك + ى\, ص_{ر} + \frac{هـ}{2د} ص_{ر}^{2} + \frac{ح}{2د} س_{ر+1}^{2} \right)$$

$$= ن\, ك + ى \sum_{ر=1}^{ن} ص_{ر} + \frac{هـ}{2د} \sum_{ر=1}^{ن} ص_{ر}^{2} + \frac{ح}{2د} \sum_{ر=1}^{ن} س_{ر+1}^{2}$$

والمطلوب هو ايجاد قيم $ن ، ص_{ر} ، س_{ر+1}$ التى تحقق النهاية الصغرى لهذه الدالة بشرط أن يكون $\sum_{ر=1}^{ن} \left(ص_{ر} - س_{ر} \right) = ط$

وبحل هذه المشكلة الرياضية* نجد أن هذه القيم** هى :

$$\hat{ن} = \sqrt{\frac{م\, ط \cdot هـ\, ح}{2ك\,(ح + هـ) - ى^{2} د}}$$

$$\hat{ص} = - \frac{ى}{ح + هـ} \cdot د + \sqrt{\frac{2ح\,ك}{هـ\,(هـ + ح)} د - \frac{ى^{2} ح}{هـ\,(هـ + ح)^{2}} د^{2}}$$

$$\hat{س} = - \frac{ى}{ح + هـ} \cdot د - \sqrt{\frac{2\,هـ\,ك}{ح\,(هـ + ح)} د - \frac{ى^{2} هـ}{ح\,(هـ + ح)^{2}} د^{2}} \;.$$

وعلى ذلك فان السياسة المثلى تقتضى تقسيم الزمن م الى $\hat{ن}$ من الفقرات المتساوية وفى بداية كل فترة يكون مستوى المخزون هو الصفر - ويكون قد تم فقد ($-\hat{س}$) وحدة من الطلب - ويرتفع هذا المستوى الى $\hat{ص}$ نتيجة استلام دفعة من المنتجات حجمها $\hat{ص}$.

---

* انظر الملحق الرياضى رقم (٤)

** اذا فرضنا أن الفترات الزمنية متساوية فانه يمكن اتباع نفس الخطوات المستخدمه فى الملحق الرياضى رقم (٢) لاثبات أن هذه القيم تحقق النهاية الصغرى لمتوسط النفقات الكلية للوحدة الزمنية .

ويلاحظ فى هذا الحل أن نفقة انتاج الوحدة ى قد ظهرت كأحد العوامل التى تحدد قيمة $\hat{\text{ص}}$ وبالتالى تحدد السياسة المثلى . كما أنه بوضع ى = صفر نحصل على نفس القيم التى حصلنا عليها فى النموذج الثالث . وهذا يرجع الى أن ى = صفر تعنى أن نفقة انتاج الوحدة لن تؤثر على قرارات الانتاج وبالتالى على قرارات التخزين وهذا هو ما يفترض حدوثه فى النموذج الثالث .

مثال ٢ :

بالرجوع الى مثال (١) مع افتراض أن المنتج يستطيع تجاهل جزء من الطلب مقابل دفع ٢٣ قرشا عن كل وحدة طلب تظل غير مجابة لمدة شهر .

ما هى السياسة المثلى للتخزين وما هى النفقات الكلية اذا اتبع هذه السياسة :

أولا : اذا كان الطلب الذى لا يجاب فورا يمكن تلبيته فيما بعد عندما تتوافر السلعة .

ثانيا : اذا كان الطلب الذى لا يجاب فورا يفقد نهائيا .

الحل :

م = ١٢ شهر   ط = ٢٤٠٠٠ وحدة   ∴ د = ٢٠٠٠ وحدة شهريا

ك = ٤٠٠ جنيها   هـ = $\overset{\text{ح}}{\text{٠٫١}}$ ح = $\overset{\text{ح}}{\text{٠٫٢٣}}$ ى = $\overset{\text{ح}}{\text{٠٫٢}}$

أولا :

$$\hat{\text{ن}} = \sqrt{\frac{\text{م ط}}{\text{٢ ك}} \cdot \frac{\text{هـ ح}}{\text{هـ + ح}}} = \text{٥ فترة (تقريبا)}$$

$$\therefore \hat{\text{م}} = \frac{\text{م}}{\hat{\text{ن}}} = \text{٢٫٤ شهرا}$$

$$\therefore \hat{\text{ص}} - \hat{\text{س}} = \frac{\text{ط}}{\hat{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{\text{٢ ك}}{\text{هـ}} \cdot \frac{\text{هـ + ح}}{\text{ح}} \cdot \text{د}} = \text{٤٨٠٠ وحدة}$$

$$\hat{ص} = \sqrt{\frac{٢ك}{هـ} \cdot \frac{ح}{هـ + ح} \cdot د} = ٣٣٤٠ \text{ وحدة (تقريبا)}$$

$$\hat{س} = - \sqrt{\frac{٢ك}{ح} \cdot \frac{هـ}{هـ + ح} \cdot د} = - ١٤٦٠ \text{ وحدة (تقريبا) .}$$

وعلى ذلك فان السياسة المثلى هى :

يجب أن تقسم السنة الى خمس فترات متساوية طول كل منها ٢٫٤ شهرا . وفى بداية كل فترة يكون اجمالى العجز فى المخزون (أى اجمالى الطلب الغير مجاب) هو ١٤٦٠ وحدة ويتم استلام الدفعة الجديدة من الانتاج (وحجمها ٤٨٠٠ وحدة) فتستخدم لتلبية الطلبات المتأخرة ثم يصبح مستوى المخزون هو ٣٣٤٠ وحدة .

واذا أتبعت هذه السياسة فان النفقات الكلية تكون :

$$\text{النفقات الكلية} = \hat{ن} \left[ك + \underline{ك} (\hat{ص} - \hat{س}) + \frac{هـ}{٢د} \hat{ص}^٢ + \frac{ح}{٢د} \hat{س}^٢ \right]$$

$$= ٥ \times ١٧٦١ = \overline{٨٨٠٥}$$

<u>ثانيا</u> :

$$\hat{ن} = \sqrt{\frac{م ط \cdot هـ ح}{٢ك (هـ + ح) - \underline{ك}^٢ د}} = ٦ \text{ فترات}$$

$$\therefore \hat{م} = \frac{م}{\hat{ن}} = ٢ \text{ شهرا}$$

$$\hat{ص} = - \frac{\underline{ك}}{هـ + ح} \cdot د + \sqrt{\frac{٢ ح ك}{هـ (هـ + ح)} \cdot د - \frac{\underline{ك}^٢ ح}{هـ (هـ + ح)^٢} \cdot د^٢}$$

$$= ١٥٧٦ \text{ وحدة}$$

$$\hat{س} = - \frac{\underline{ك}}{هـ + ح} \cdot د - \sqrt{\frac{٢ هـ ك}{ح (هـ + ح)} \cdot د - \frac{\underline{ك}^٢ هـ}{ح (هـ + ح)^٢} \cdot د^٢}$$

$$= - ٢٤٢٤ \text{ وحدة}$$

أى أن السياسة المثلى هى :

تقسم السنة الى ٦ فترات متساوية طول كل منها شهرين . وفى نهاية كل فترة يكون اجمالى الطلب الغير مجاب (أى الذى فقده المنتج نهائيا) هو ٢٤٢٤ وحدة ويجب أن يتسلم المنتج فى بداية كل فترة كمية جديدة من الانتاج حجمها ١٥٧٦ وحدة .

واذ اتبعت هذه السياسة فان اجمالى النفقات يكون :

$$\text{اجمالى النفقات} = \hat{\text{ن}} \left[\text{ك} + \text{ك}\,\hat{\text{ص}} + \frac{\text{هـ}}{\text{٢د}}\,\hat{\text{ص}}^{2} + \frac{\text{ح}}{\text{٢د}}\,\hat{\text{س}}^{2} \right]$$

$$= ٦ \times ١١١٥ = \overset{\text{ح}}{٦٦٩٠}$$

النموذج الخامس :

فى جميع النماذج السابقة كان المنتج يستطيع أن يحصل على أى كمية من المنتجات كدفعة واحدة ومن الواضح أن هذا الفرض قد لا يكون واقعيا فى بعض الأحيان . ولذلك سنحاول بناء نموذجا جديدا يأخذ فى الاعتبار وجود معدل ثابت ومحدود للانتاج .

فاذا فرضنا أن المنتج لا بد أن يلبى جميع الطلبات عند حدوثها وأن المعدل الثابت للانتاج هو ل ($\text{ل} = \frac{\text{الكمية المنتجة فى فترة زمنية معينة}}{\text{طول الفترة الزمنية}}$) وأن الفترات الزمنية التى تمر بين القرارات الانتاجية وبالتالى قرارات التخزين المتتالية متساوية * وطول كل منها هو م وحدة زمنية فان مستوى التخزين فى أى من هذه الفترات سيبدأ من الصفر ** ويتزايد بمعدل ثابت يساوى الفرق بين معدل الانتاج ومعدل الطلب (أى ل ـ د) *** . ويستمر مستوى المخزون فى

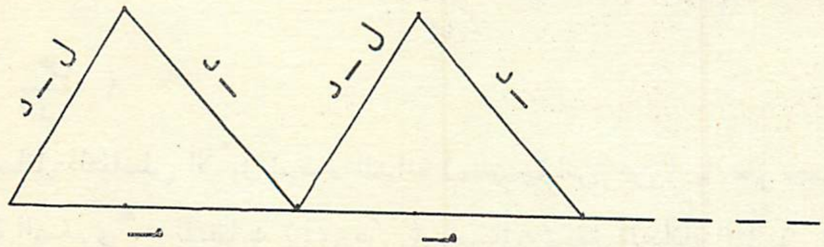
---

* من الممكن اتباع نفس أسلوب التحليل المستخدم فى النموذج الاول وفى الملحق الرياضى رقم (١) لاثبات أن سياسة الانتاج والتخزين التى تحقق النهاية الصغرى لاجمالى النفقات فى الزمن م تتطلب أن تكون الفترات الزمنية متساوية .

** طالما أن الطلب معلوم وأنه من غير المسموح به وجود أى عجز فى المخزون فان المنتج يجب أن لا يصدر أمرا جديدا بالانتاج الا اذا كان مستوى المخزون مساويا للصفر .

*** يلاحظ أن معدل الانتاج يجب أن يكون أكبر (أو مساويا) معدل الطلب وذلك حتى لا يأخذ مستوى المخزون قيما سالبة ، أى أن ل $\geqslant$ د .

التزايد بهذا المعدل الى أن يتم انتاج الكمية المطلوبة (ص) فيتوقف الانتاج ويبدأ مستـــوى المخزون فى التناقص بمعدل ثابت هو معدل الطلب د الى أن يصل الى الصفر فى نهاية الفـــترة ويمكن توضيح ذلك بالشكل البيانى التالى :



والمشكلة التى يواجهها المنتج الآن هى تحديد الكمية التى يجب البدأ فى انتاجها مع بداية كل فترة (وبالتالى تحديد طول كل فترة) حتى يحقق النهاية الصغرى لمتوسط النفقات الكلية للوحـــدة الزمنية .

ولايجاد قيمة النفقات الكلية للانتاج والتخزين خلال أى من الفترات الزمنية نلاحظ أن أقصى مستوى للمخزون خلال الفترة هو عبارة عن الانتاج الكلى ص مطروحا منه اجمالى الطلب خـــلال الفترة التى يتم فيها الانتاج . ولكن طول الفترة التى يتم فيها انتاج حجمه ص هو $\frac{ص}{ل}$ ،

وبالتالى فان حجم الطلب خلال هذه الفترة هـو د . $\frac{ص}{ل}$. أى أن :

أقصى مستوى للمخزون خلال الفترة $= ص - د . \frac{ص}{ل}$

$= ص \left(١ - \frac{د}{ل} \right)$

وعلى ذلك فان متوسط المخزون خلال الفترة $= \frac{ص}{٢} \left(١ - \frac{د}{ل} \right)$

أى أن نفقة الاحتفاظ بالمخزون خلال الفترة التى طولها ـ وحدة زمنية $= هـ . ـ . \frac{ص}{د} \left(١ - \frac{د}{ل} \right)$

وعلى ذلك تكون النفقة الكلية للانتاج والتخزين خلال الفترة

$= ك + كـ ص + هـ ـ \frac{ص}{د} \left(١ - \frac{د}{ل} \right)$

أى أن متوسط النفقة الكلية للوحدة الزمنية $= \frac{ك}{مـ} + \frac{كـ ص}{مـ} + هـ \frac{ص}{٢} (١ - \frac{د}{ل})$

$$= \frac{ك د}{ص} + كـ د + هـ \frac{ص}{٢} (١ - \frac{د}{ل})$$

(لأن $مـ = \frac{ص}{د}$)

وبمساواه المعامل التفاضلى الأول لهذه الدالة (بالنسبة الى ص) بالصفر نجد أن قيمة ص التى تحقق النهاية الصغرى* للنفقات (أى $\hat{ص}$) يجب أن تحقق العلاقة التالية :

$$- \frac{ك د}{\hat{ص}^٢} + \frac{هـ}{٢} (١ - \frac{د}{ل}) = صفر$$

أى أن

$$\hat{ص} = \sqrt{\frac{٢ك}{هـ} \cdot \frac{ل د}{ل - د}}$$

وبالتالى فان $\hat{مـ} = \frac{\hat{ص}}{د} = \sqrt{\frac{٢ك}{هـ} \cdot \frac{ل}{د (ل - د)}}$

كما أن عدد الفترات الزمنية خلال الزمن م هو :

$$\hat{ن} = \frac{م}{\hat{مـ}} = م \sqrt{ط \cdot \frac{هـ}{٢ك} \cdot \frac{ل}{ل - د}}$$

ويكن وصف السياسة المثلى للانتاج والتخزين كما يلى :

يقسم الزمن م الى $\hat{ن}$ من الفترات الزمنية المتساوية ، طول كل منها $\hat{مـ}$ وحدة زمنية . وفى بداية كل فترة يكون مستوى المخزون مساويا للصفر ويبدأ المنتج فى انتاج الكمية $\hat{ص}$ (بمعدل ل) فيزداد مستوى المخزون بمعدل ل ـ د . وحين يصل مستوى المخزون الى المستوى $\hat{ص} (١ - \frac{د}{ل})$ يكون قد تم انتاج الكمية المطلوبة فيتوقف الانتاج ويبدأ مستوى المخزون فى التناقص بمعدل د الى أن يصل الى الصفر فى نهاية الفترة .

* المعامل التفاضلى الثانى لهذه الدالة بالنسبة الى ص يساوى $\frac{ك د}{ص^٣} >$ صفر . أى أن الدالة محدبة وتصل الى نهايتها الصغرى عندما تكون ص $= \hat{ص}$

٢ - نماذج التخزين ذات الطلب العشوائى

Stochastic Models

لقد اعتمدت النماذج السابقة على افتراض أن الطلب محدد ومعلوم ۰ ونظرا لعدم واقعية هذا الفرض فاننا سنفترض فى النماذج التالية أن الطلب على السلعة متغير عشوائى يتبع توزيعا احتماليا معلوما وأنه من الممكن عدم تلبية جزء من الطلب حين حدوثه - وذلك مقابل دفع نفقة العجز ، كما سنفترض أن فترة الابطاء قصيرة ويمكن تجاهلها وأن الفترات الزمنية بين اتخاذ القرارات المتتالية للانتاج والتخزين هى فترات متساوية طولها ثابت ومعلوم وبالتالى فانه يمكن اعتبار أن طول كل منها يساوى الوحدة ۰

وطالما أن النفقات الكلية تعتمد على حجم الطلب ، الذى نفترض الآن أنه متغير عشوائى ، فان المنتج لن يستطيع تحديد سياسة الانتاج والتخزين التى تحقق النهاية الصغرى للنفقات الكلية ولكنه يحاول معرفة السياسة التى تحقق النهاية الصغرى للقيمة المتوقعة للنفقات الكلية ۰

النموذج الأول :

سنفترض فى هذا النموذج أن الفترات الزمنية المتتالية مستقلة عن بعضها البعض بمعنى أن القرار الذى يتخذه المنتج فى أى من الفترات لن يؤثر على مستويات المخزون أو النفقات فى الفترات التالية ۰ وهذا الفرض يكون واقعيا فى الحالات التى لا يمكن فيها الاحتفاظ بالسلعة من فترة الى أخرى ۰ فمثلا الكمية المنتجة فى احدى الفترات من سلعة استهلاكية قابلة للتلف تكون مستقلة عن الكمية المنتجة من نفس السلعة فى الفترات السابقة والفترات التالية لأنها تعتمد على الطلب المتوقع على هذه السلعة فى تلك الفترة فقط ۰

وعلى ذلك فاننا نستطيع أن نجعل التحليل قاصرا على فترة زمنية واحدة وبالتالى نحاول بناء نموذج

يعالج مشكلة المنتج الذى يريد أن يتخذ قرارا واحدا* يحدد به مستوى الانتاج والمخزون في بداية فترة زمنية معلومة بحيث يحقق أقل قيمة للنفقات الكلية المتوقعة خلال هذه الفترة .

ولبناء هذا النموذج سنفترض أن طول الفترة الزمنية هو الوحدة وأن :

• $\tilde{\text{ط}}$ ترمز الى الكمية المطلوبة ، وهى متغير عشوائى متقطع يمكن أن يأخذ القيم ط (ط = ١، ٢، ...) وسنرمز الى دالة الاحتمال لهذا المتغير بالرمز ح (ط) ، أى أن احتمال أن يأخذ المتغير $\tilde{\text{ط}}$ القيمة ط هو ح (ط) . وسنفترض أن الطلب يتحقق كدفعة واحدة خلال الفترة الزمنية .

• ص (ص ⩾ صفر) هى مستوى المخزون فى بداية الفترة بعد اتخاذ القرار وتسلم المنتجات . فاذا فرضنا أن مستوى المخزون فى بداية الفترة قبل اتخاذ قرار هو الصفر (أى أن ص تمثل الكمية المنتجة) وأن النفقة الثابتة للتجهيز هى أيضا مساوية للصفر (ك = صفر) فان :

نفقة الانتاج خلال الفترة = ك ص

ولايجاد القيمة المتوقعة للنفقات الكلية يجب ايجاد كل من نفقات التخزين ونفقات العجز . ولكن هذه النفقات تتوقف على العلاقة بين كمية الطلب المحققة (ط) وكمية المخزون (ص) :

• فاذا كانت ط ⩽ ص فان المنتج لن يتحمل أى نفقات عجز وستكون نفقات التخزين هى :
هـ (ص ـ ط)

• واذا كانت ط > ص فان المنتج سيتحمل نفقات عجز قدرها : حـ (ط ـ ص)

وعلى ذلك فان النفقة المتوقعة للتخزين والعجز خلال الفترة ، وسنرمز لها بالرمز ل (ص) تكون :

$$\text{ل}\,(\text{ص}) = \text{هـ} \sum_{\text{ط}=0}^{\text{ص}} (\text{ص} - \text{ط})\,\text{ح}\,(\text{ط}) + \text{حـ} \sum_{\text{ط}=\text{ص}+1}^{\infty} (\text{ط} - \text{ص})\,\text{ح}\,(\text{ط})$$

أى أن النفقة الكلية المتوقعة خلال الفترة هى :

$$\text{ق}\,(\text{ص}) = \text{ك}\,\text{ص} + \text{ل}\,(\text{ص})$$

وتصل هذه الدالة الى نهايتها الصغرى عند القيمة $\hat{\text{ص}}$ التى تحقق العلاقة** :

---

* مثـــال (٣) يمثل مشكلة " واقعية " تتطلب من المنتج اتخاذ قرار واحد فقط .

** للاثبات انظر الملحق الرياضى رقم (٥)

$$\sum_{\text{ط}=\cdot}^{\hat{\text{ص}}-١} \text{ح}\,(\text{ط}) < \frac{\text{ح}-\text{ك}}{\text{ح}+\text{هـ}} < \sum_{\text{ط}=\cdot}^{\hat{\text{ص}}} \text{ح}\,(\text{ط})$$

وبالتالى فان السياسة المثلى للانتاج والتخزين تتلخص فى رفع مستوى المخزون فى بداية الفترة من الصفر الى $\hat{\text{ص}}$ (أى انتاج الكمية $\hat{\text{ص}}$) .

مثال ٣ : يريد أحد المصانع شراء آلة معينة . وقد وجد أن أحد اجزاء هذه الآلة معرض دائما للتعطل وأنه من الممكن ـ اثناء شراء الالة ـ شراء أى عدد من هذا الجزء ليستخدمها كقطع غيار .

فاذا كانت نفقة شراء الوحدة من هذا الجزء (فى نفس وقت شراء الالة) هى $\overline{٥}$ بينما كانت النفقات التى يتحملها المصنع نتيجة تعطل هذا الجزء وتوقف الالة دون توفر قطعة غيار هى $\overline{١٠٠}$. فما هو العدد الأمثل لقطع الغيار التى يجب شراءها مع الالة ، علما بأن العدد المطلوب من قطع الغيار-أى عدد مرات تعطل الالة-هو متغير عشوائى يتبع التوزيع الاحتمالى التالى :

عدد مرات تعطل الالة (ط)	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦ فأكثر
احتمال أن تتعطل الالة ط من المرات : ح (ط)	٠ر٩	٠ر٠٥	٠ر٠٢	٠ر٠١	٠ر٠١	٠ر٠١	٠

وما هى القيمة المتوقعة للنفقات اذا اتبع المنتج السياسة المثلى ؟

الحل :

فى هذا المثال نجد أن نفقة العجز للوحدة هى $\overline{١٠٠}$ أى أن ح = $\overline{١٠٠}$

كما يمكن اعتبار أن نفقة التخزين هى نفسها نفقة شراء الوحدة أى أن هـ = $\overline{٥}$

وذلك بينما أن نفقة انتاج الوحدة تساوى الصفر أى أن ك = صفر

وبالتالى فان العدد الأمثل الذى يجب شراءه من قطع الغيار ($\hat{\text{ص}}$) هو القيمة التى تحقق العلاقة :

$$\sum_{\text{ط}=\cdot}^{\hat{\text{ص}}-١} \text{ح}\,(\text{ط}) < \frac{\text{ح}}{\text{ح}+\text{هـ}} < \sum_{\text{ط}=\cdot}^{\hat{\text{ص}}} \text{ح}\,(\text{ط})$$

ولايجاد هذه القيمة يجب حساب التوزيع الاحتمالى المتجمع :

ص ٥

ص	٠	١	٢	٣	٤	٥
مجـ (ط = ٠ إلى ص) ح (ط)	٠ر٩	٠ر٩٥	٠ر٩٧	٠ر٩٨	٠ر٩٩	١ر٠

وحيث أن حـ / (هـ + حـ) = ١٠٠ / ١٠٥ = ٠ر٩٥٢٤

فان ص^٨ = ٢

أى أنه يجب شراء ٢ عدد من قطع الغيار أثناء شراء الآلة ٠ واذا اتبعت هذه السياسة فان :

النفقات الكلية المتوقعة = ٥ مجـ (ط = ٠ إلى ٢) (٢ ـ ط) ح (ط) + ١٠٠ مجـ (ط = ٣ إلى ٥) (ط ـ ٢) ح (ط)

= ٥ (٢ × ٠ر٩ + ١ × ٠ر٠٥ + ٠) + ١٠٠ (١ × ٠ر٠١ + ٢ × ٠ر٠١ + ٣ × ٠ر٠١)

= ١٥ر٢٥ حـ

النموذج الثانى :

سنفترض فى هذا النموذج أن الطلب متغير متصل وأن ح (ط) هى دالة كثافة الاحتمال له كما سنأخذ ك ⩽ صفر ونفترض أن س تمثل مستوى المخزون فى بداية الفترة قبل اتخاذ قرار وأن ص ⩾ س (وبالتالى فان ص ـ س تمثل الكمية المنتجة فى هذه الفترة) وفيما عدا ذلك فان باقى رموز وفروض النموذج الاول ستظل قائمة ٠ وفى ظل الفروض الجديدة تكون النفقة المتوقعة للعجز والتخزين هى :

ل (ص) =
- هـ ∫ (من ٠ إلى ص) (ص ـ ط) ح (ط) ى ط + حـ ∫ (من ص إلى ∞) (ط ـ ص) ح (ط) ى ط ‏ اذا كانت ص > صفر
- حـ ∫ (من ٠ إلى ∞) (ص ـ ط) ح (ط) د ط ‏ اذا كانت ص ⩽ صفر

كما أن نفقة الانتاج = ك δ (ص ـ س) + كـ (ص ـ س)

حيث δ (ص ـ س) = { ١ اذا كانت ص > س ؛ . اذا كانت ص = س

وعلى ذلك فان النفقة الكلية المتوقعة اذا كان مستوى المخزون فى بداية الفترة وقبل استلام الدفعة الجديدة من الانتاج هو س ثم ارتفع الى ص بعد تسلم الانتاج الجديد (وسنرمز لها بالرمز $ق_{س}$(ص)) تكون :

$$ق_{س}\,(ص) = ك\ \delta\ (ص - س) + ى\ (ص - س) + ل\ (ص)$$

$$= ك\ \delta\ (ص - س) - ى\ س + ى\ (ص)$$

حيث ى (ص) = ى ص + ل (ص)

وتصل الدالة ى (ص) الى نهايتها الصغرى عند القيمة $\hat{ص}$ ، حيث تعرف $\hat{ص}$ بالعلاقة التالية* :

$$\int^{\hat{ص}} ح\ (ط)\ د\,ط = \frac{ح - ى}{ح + هـ}$$

أما السياسة المثلى فانها تتوقف على قيمة ك :

أولا : اذا كانت ك = صفر فانه يمكن وصف السياسة المثلى كما يلى :

اذا كانت س < $\hat{ص}$ فيجب رفع مستوى المخزون الى $\hat{ص}$ (أى انتاج الكمية $\hat{ص}$ ـ س)

واذا كانت س ≥ $\hat{ص}$ فان المنتج لن يستطيع تخفيض المخزون الى المستوى $\hat{ص}$ وبالتالى فانه سيترك المخزون كما هو (أى ينتج الكمية صفر)

أى أن :

المستوى الأمثل للمخزون = { $\hat{ص}$ اذا كانت س < $\hat{ص}$ ؛ س اذا كانت س ≥ $\hat{ص}$

أى أن :

الكمية المثلى للانتاج = { $\hat{ص}$ ـ س اذا كانت س < $\hat{ص}$ ؛ . اذا كانت س ≥ $\hat{ص}$

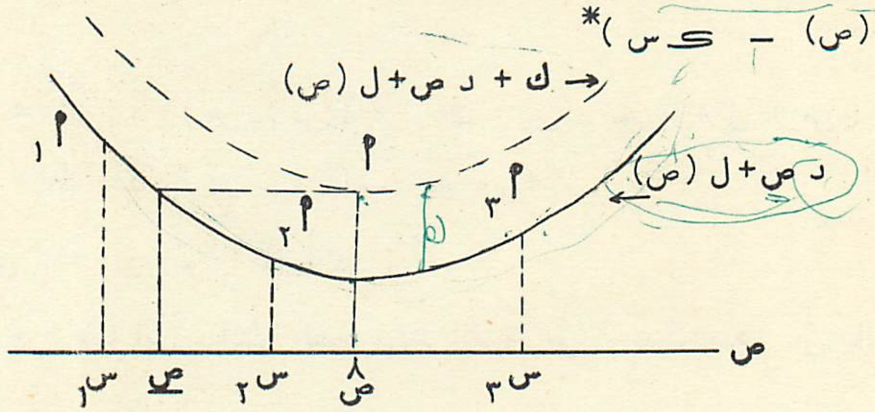
---

* انظر الاثبات بالملحق الرياضى رقم (٦)

ثانيا : اذا كانت ك > صفر فاننا سنعرف القيمة الجديد $\underline{\text{ص}}$ كما يلى :

$\underline{\text{ص}} \leqslant \hat{\text{ص}}$ ، د $\underline{\text{ص}}$ + ل ($\underline{\text{ص}}$) = د $\hat{\text{ص}}$ + ل ($\hat{\text{ص}}$) + ك .

ويمكن استنتاج السياسة المثلى للتخزين من الشكل البيانى التالى الذى تظهر فيه الدالة ($\text{ق}_{\text{س}}$ (ص) — د س)*



- فاذا كانت س < $\underline{\text{ص}}$ وتساوى س_1 مثلا فان مستوى المخزون يجب أن يرتفع الى المستوى $\hat{\text{ص}}$ حتى تتحقق النهاية الصغرى للنفقات ، وذلك لأن اجمالى النفقات المتوقعة عند المستوى $\hat{\text{ص}}$ (أى أ) أقل من اجمالى النفقات المتوقعة عند المستوى س_1 (أى أ_1) .

- أما اذا كانت $\hat{\text{ص}}$ > س $\geqslant$ $\underline{\text{ص}}$ ، وتساوى س_2 مثلا ، فان رفع مستوى المخزون الى $\hat{\text{ص}}$ لن يؤدى الى تخفيض النفقات (لأن أ $\geqslant$ أ_2) كما أنه ليس من الممكن تخفيض المخزون وبالتالى فان التصرف الأمثل هو ترك المخزون كما هو أى انتاج الكمية صفر .

- أما اذا كانت س $\geqslant$ $\hat{\text{ص}}$ ، وتساوى س_3 مثلا ، فهنا أيضا يجب ترك المخزون كما هو لأن زيادته ستؤدى الى زيادة النفقات كما أن تخفيضه غير مسموح به .

وعلى ذلك يمكن تلخيص السياسة المثلى** كما يلى :

---

* الدالة $\text{ق}_{\text{س}}$ (ص) دالة محدبة فى ص كما هو موضح فى الملحق الرياضى رقم (٦) ولذلك فانه يمكن رسم الدالة ($\text{ق}_{\text{س}}$ (ص) — د س) كما هو موضح بالشكل البيانى .

** هذه السياسة تعرف باسم The (S,s) Policy, or The Two-Bin, Policy

المستوى الأمثل للمخزون (بعد تسلم الانتاج الجديد) = $\begin{cases} \hat{ص} & \text{اذا كانت } س < \underline{ص} \\ س & \text{اذا كانت } س \geqslant \underline{ص} \end{cases}$

أو بمعنى آخر فان :

الكمية المثلى للانتاج = $\begin{cases} \hat{ص} - س & \text{اذا كانت } س < \underline{ص} \\ \text{صفر} & \text{اذا كانت } س \geqslant \underline{ص} \end{cases}$

ويلاحظ أن هذه النتيجة تبين أثر وفورات الحجم (economies of scale) على سياسة الانتاج والتخزين ، فهى تبين أن أصغر حجم يمكن انتاجه هو ($\hat{ص} - \underline{ص}$) وان هذا الحجم يتوقف على قيمة النفقة الثابتة ك كما هو واضح من تعريف $\underline{ص}$.

مثال (٤) :

اذا كان الطلب على احدى السلع متغيرا عشوائيا يتبع توزيعا احتماليا دالة كثافة الاحتمال له هى :

$$ح(ط) = \begin{cases} \frac{١}{٥٠} هـ^{-\frac{ط}{٥٠}} & ط \geqslant \text{صفر} \\ \text{صفر} & ط < \text{صفر} \end{cases}$$

واذا كانت نفقة انتاج الوحدة من هذه السلعة هى ١٠٠ قرشا بينما أن نفقة الاحتفاظ بها فى المخزن هى ١٠ قروش ونفقة العجز هى ١٠٠٠ قرش . فما هى السياسة المثلى التى يجب اتباعها للانتاج والتخزين خلال فترة زمنية واحدة علما بأن الكمية المتوفرة من هذه السلعة فى بداية الفترة (وقبل اتخاذ أى قرار) هى ٨٠ وحدة ؟

واذا كانت هناك نفقة ثابتة للتجهيز قدرها ٢٠٠ قرش . فما هى السياسة المثلى فى هذه الحالة ؟

الحل : $ك = ١٠٠$ ، $هـ = ١٠$ ، $ح = ١٠٠٠$

أولا : اذا كانت ك = صفر :

$$\int_{0}^{\hat{\text{ص}}} \frac{1}{50}\, \text{هـ}^{-\frac{\text{ط}}{50}}\, \text{ء}\text{ط} = \frac{1000 - 100}{1000 + 10}$$

$$\therefore\quad 1 - \text{هـ}^{-\frac{\hat{\text{ص}}}{50}} = \frac{90}{101}$$

$$\text{هـ}^{-\frac{\hat{\text{ص}}}{50}} = \frac{11}{101} = 0.109$$

$$\therefore\quad \hat{\text{ص}} = 111 \text{ وحدة}$$

وحيث أن س = ٨٠ وحدة ، فان السياسة المثلى هى :

يجب رفع مستوى المخزون الى ١١١ أى أنه يجب انتاج الكمية ١١١ ـ ٨٠ = ٣١ وحدة

ثانيا : اذا كانت ك = ٢٠٠ :

فى هذه الحالة يجب ايجاد قيمة $\underline{\text{ص}}$ وذلك من المعادلة التالية :

$$100\,\underline{\text{ص}} + 1000 \int_{\underline{\text{ص}}}^{\infty} (\text{ط} - \underline{\text{ص}})\, \frac{1}{50}\, \text{هـ}^{-\frac{\text{ط}}{50}}\, \text{ء}\text{ط}$$

$$+\,10 \int_{0}^{\underline{\text{ص}}} (\underline{\text{ص}} - \text{ط})\, \frac{1}{50}\, \text{هـ}^{-\frac{\text{ط}}{50}}\, \text{ء}\text{ط}$$

$$= 200 + 100 \times 111 + 1000 \int_{111}^{\infty} (\text{ط} - 111)\, \frac{1}{50}\, \text{هـ}^{-\frac{\text{ط}}{50}}\, \text{ء}\text{ط}\; +$$

$$+\,10 \int_{0}^{111} (111 - \text{ط})\, \frac{1}{50}\, \text{هـ}^{-\frac{\text{ط}}{50}}\, \text{ء}\text{ط}\,.$$

وبحل هذه المعادلة نجد أن :

$ص = ٩٧$

وطالما أن س = ٨٠ < ٩٧ فان السياسة المثلى تتطلب رفع مستوى المخزون الى ١١١

أى أنتاج الكمية (١١١ ـ ٨٠) = ٣١ وحدة .

النموذج الثالث :

لنفرض الآن أن هناك ن من الفترات الزمنية المتساوية وأن الكميات المطلوبة من السلعة فى الفترات المتتالية هى متغيرات عشوائية متصلة ومستقلة عن بعضها البعض ولكن تتبع نفس التوزيع الاحتمالى المعلوم . ولنفرض أيضا أنه من المسموح به عدم اجابة جزء من الطلب حين حدوثه بشرط أن تتم تلبيته فيما بعد عندما تتوفر السلعة . فاذا كانت :

$س_ر$ ، ر = ١ ... ن ، تمثل مستوى المخزون فى بداية الفترة رقم ر قبل وصول الدفعة الجديدة من الانتاج ،

$ص_ر$ ، ر = ١ ... ن ، تمثل مستوى المخزون فى بداية الفترة رقم ر بعد وصول الدفعة الجديدة من الانتاج ($ص_ر \geqslant س_ر$) ،

ل ($ص_ر$) ، ر = ١ ... ن ، تمثل القيمة المتوقعة لنفقات العجز والتخزين فى الفترة رقم ر اذا كان مستوى المخزون فى بداية تلك الفترة وبعد استلام الانتاج الجديد هو $ص_ر$

فان :

$ص_ر - س_ر$ ($\geqslant$ صفر) تمثل حجم الدفعة الجديدة من الانتاج التى يتسلمها المنتج فى بداية الفترة رقم ر . كما أن :

ك δ ($ص_ر - س_ر$) + ک ($ص_ر - س_ر$) تمثل نفقة الانتاج خلال الفترة رقم ر .

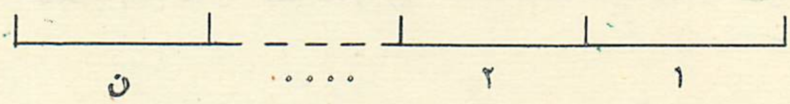
وبالتالى فان :

القيمة المتوقعة للنفقات الكلية خلال الفترة رقم ر = ك δ ($ص_ر - س_ر$) + ک ($ص_ر - س_ر$) + ل ($ص_ر$)

وذلك علما بأن :

$$ل(ص_ر) = \begin{cases} هـ \int_{0}^{ص_ر} (ص_ر - ط)\, ح(ط)\, ء ط + جـ \int_{ص_ر}^{\infty} (ط - ص_ر)\, ح(ط)\, ء ط & \text{اذا كانت } ص_ر > \text{صفر} \\ جـ \int_{0}^{\infty} (ط - ص_ر)\, ح(ط)\, ء ط & \text{اذا كانت } ص_ر \leq \text{صفر} \end{cases}$$

والمشكلة التى يواجهها المنتج الآن هى معرفة سياسة التخزين التى يجب اتباعها فى بداية كل فترة بحيث تصل القيمة الحالية* للنفقات الكلية المتوقعة الى نهايتها الصغرى . وهذا يعنى أن المنتج عليه أن يحدد القيم المثلى للمتغيرات $ص_ر$ ($ر = ١ ، ... ، ن$) . ونظرا لأن ما يتبقى لدى المنتج من مخزون فى نهاية الفترة $ر$ (أى مستوى المخزون فى بداية الفترة $ر + ١$: $س_{ر+١}$) يعتمد على حجم الطلب خلال هذه الفترة (وهو متغير عشوائى) كما يعتمد على حجم المخزون $ص_ر$ الذى يختاره المنتج فى بدايتها . فان ما يتخذه المنتج من قرار يحدد قيمة $ص_ر$ سوف يؤثر على مستوى المخزون وبالتالى القيمة الحالية للنفقات المتوقعة فى الفترات التالية . وهذا يبين أن الفترات المتتالية ليست مستقلة عن بعضها البعض، وبناء على ذلك فان المنتج لا يستطيع حل المشكلة لفترة زمنية واحدة ثم تكرار الحل ن من المرات . بل لا بد من استخدام طريقة البرمجة الديناميكية Dynamic Programming لحل هذه المشكلة . وتبدأ هذه الطريقة بترتيب الفترات الزمنية بطريقة عكسية بحيث تكون الفترة الأخيرة ـ زمنيا ـ هى الفترة رقم ١ بينما تكون الفترة الأولى ـ زمنيا ـ هى الفترة رقم ن . ويمكن توضيح ذلك بالشكل البيانى التالى :



فاذا كانت α (صفر $< \alpha <$ ١) هى معامل الخصم** Discount factor

واذا كانت $ق_ر(س_ر)$ ترمز الى القيمة الحالية للنفقات الكلية المتوقعة خلال $ر$ من الفترات اذا اتبعت السياسة المثلى ، واذا كان مستوى المخزون فى بداية الفترة $ر$ هو $س_ر$ فان :

---

* اذا كانت أ هى القيمة الحالية للمقدار ب فان معنى ذلك أن الفرد سيقبل الحصول على المقدار أ الان بدلا من الحصول على المقدار ب بعد مرور ه من الفترات الزمنية

** معامل الخصم هو القيمة التى يقبل الفرد الحصول عليها الان بدلا من الحصول على جنيه واحد بعد مرور وحدة زمنية واحدة (سنة مثلا) .

$$\text{ق}_\text{ر}(\text{س}_\text{ر}) = \underset{\text{ص}_\text{ر} \geqslant \text{س}_\text{ر}}{\text{نهـا}^{*}} \Big[\text{ك}\ \delta\ (\text{ص}_\text{ر} - \text{س}_\text{ر}) + \text{ک}\ (\text{ص}_\text{ر} - \text{س}_\text{ر}) + \text{ل}\ (\text{ص}_\text{ر})$$

$$+ \ \alpha \int_{0}^{\infty} \text{ق}_{\text{ر}-1} (\text{ص}_\text{ر} - \text{ط})\ \text{ح}\ (\text{ط})\ \text{ء ط} \Big] \ ، \ \text{ر} = 1 \ \ldots \ \text{ن}$$

واذا عرفنا الدالة $\text{ى}(\text{ص}_\text{ر})$ بالمعادلة :

$$\text{ى}\ (\text{ص}_\text{ر}) = \text{ک ص}_\text{ر} + \text{ل}\ (\text{ص}_\text{ر}) + \alpha \int \text{ق}_{\text{ر}-1} (\text{ص}_\text{ر} - \text{ط})\ \text{ح}\ (\text{ط})\ \text{ء ط}$$

$$\text{ر} = 1 \ \ldots \ \text{ن}$$

$$\text{فان : ق}_\text{ر}(\text{س}_\text{ر}) = \underset{\text{ص}_\text{ر} \geqslant \text{س}_\text{ر}}{\text{نهـا}} \Big[\text{ك}\ \delta\ (\text{ص}_\text{ر} - \text{س}_\text{ر}) - \text{ک س}_\text{ر} + \text{ى}_\text{ر}(\text{ص}_\text{ر}) \Big]$$

$$\text{ر} = 1 \ \ldots \ \text{ن}$$

(سنعتبر أن $\text{ق}_{.}\ (\text{س}_{.}) = \text{صفر}$)

ولتحديد السياسة المثلى سنفرق بين حالتين :

١ ـ اذا كانت $\text{ك} = \text{صفر}$ ٢ ـ اذا كانت $\text{ك} > \text{صفر}$

١ ـ <u>اذا كانت ك = صفر</u>

فى هذه الحالة نجد أن :

$$\text{ق}_\text{ر}(\text{س}_\text{ر}) = \underset{\text{ص}_\text{ر} \geqslant \text{س}_\text{ر}}{\text{نهـا}} \Big[- \text{ک س}_\text{ر} + \text{ى}_\text{ر}(\text{ص}_\text{ر}) \Big] \ . \qquad \text{ر} = 1 ، \ldots ، \text{ن}$$

فاذا أخذنا $\text{ر} = 1$ (أى الفترة الأخيرة) فاننا نجد أمامنا النموذج ذا الطلب العشوائى ولفترة واحدة ـ أى نفس النموذج السابق تحليله (النموذج الثانى) وبالتالى فان السياسة المثلى فى الفترة الأخيرة تتلخص فى :

$*\ \underset{\text{ص}_\text{ر} \geqslant \text{س}_\text{ر}}{\text{نهـا}}$ (أ) تعنى النهاية الصغرى للدالة أ. وذلك لجميع قيم $\text{ص}_\text{ر} \geqslant \text{س}_\text{ر}$.

الكمية المثلى للانتاج فى بداية الفترة الاخيرة =

$$\begin{cases} \hat{\text{ص}}_{١} - \text{س}_{١} & \text{اذا كانت } \text{س}_{١} < \hat{\text{ص}}_{١} \\ \text{صفر} & \text{اذا كانت } \text{س}_{١} \geq \hat{\text{ص}}_{١} \end{cases}$$

حيث $\hat{\text{ص}}_{١}$ هى النقطة التى تصل عندها الدالة $\text{ى}_{١}(\text{ص}_{١})$ الى نهايتها الصغرى . واذا اتبعت السياسة المثلى فان :

$$\text{ق}_{١}(\text{س}_{١}) = \begin{cases} \text{ك}(\hat{\text{ص}}_{١} - \text{س}_{١}) + \text{ل}(\hat{\text{ص}}_{١}) & \text{اذا كانت } \text{س}_{١} < \hat{\text{ص}}_{١} \\ \text{ل}(\text{س}_{١}) & \text{اذا كانت } \text{س}_{١} \geq \hat{\text{ص}}_{١} \end{cases}$$

ونظرا لأن الدالة $\text{ل}(\text{س}_{١})$ هى دالة محدبة* فان $\text{ق}_{١}(\text{س}_{١})$ تكون دالة محدبة أيضا .

ولكن :

$$\text{ى}_{٢}(\text{ص}_{٢}) = \text{ك}\,\text{ص}_{٢} + \text{ل}(\text{ص}_{٢}) + \alpha \int_{0}^{\infty} \text{ق}_{١}(\text{ص}_{٢} - \text{ط})\, \text{ح}(\text{ط})\, \text{ء}\,\text{ط}$$

أى أن $\text{ى}_{٢}(\text{ص}_{٢})$ هى أيضا دالة محدبة وتصل الى نهايتها الصغرى عند النقطة $\text{ص}_{٢} = \hat{\text{ص}}_{٢}$

حيث تعرف $\hat{\text{ص}}_{٢}$ بالمعادلة :

$$\left. \frac{\text{ء}\,\text{ى}_{٢}(\text{ص}_{٢})}{\text{ء}\,\text{ص}_{٢}} \right|_{\text{ص}_{٢} = \hat{\text{ص}}_{٢}} = \text{صفر}$$

أى أن $\text{ى}_{٢}(\hat{\text{ص}}_{٢}) \leq \text{ى}_{٢}(\text{ص}_{٢})$ لجميع قيم $\text{ص}_{٢}$

ونظرا لأن $\text{ق}_{٢}(\text{ص}_{٢}) = \underset{\text{ص}_{٢} \geq \text{س}_{٢}}{\text{نها}} \left[-\text{ك}\,\text{س}_{٢} + \text{ى}_{٢}(\text{ص}_{٢}) \right]$

$$= \begin{cases} -\text{ك}\,\text{س}_{٢} + \text{ى}_{٢}(\hat{\text{ص}}_{٢}) & \text{اذا كانت } \text{س}_{٢} < \hat{\text{ص}}_{٢} \\ -\text{ك}\,\text{س}_{٢} + \text{ى}_{٢}(\text{س}_{٢}) & \text{اذا كانت } \text{س}_{٢} \geq \hat{\text{ص}}_{٢} \end{cases}$$

---

* انظر الملحق الرياضى رقم ٦

فان السياسة المثلى فى الفترة رقم ٢ هى : رفع مستوى المخزون الى $\hat{ص}_{٢}$ اذا كانت $س_{٢} < \hat{ص}_{٢}$ وترك المخزون عند المستوى $س_{٢}$ اذا كانت $س_{٢} \geq \hat{ص}_{٢}$ ،

أى أن :

$$\text{الكمية المثلى للانتاج فى بداية الفترة رقم ٢} = \begin{cases} \hat{ص}_{٢} - س_{٢} & \text{اذا كانت } س_{٢} < \hat{ص}_{٢} \\ \text{صفر} & \text{اذا كانت } س_{٢} \geq \hat{ص}_{٢} \end{cases}$$

فاذا فرضنا أن السياسة المثلى فى جميع الفترات حتى الفترة رقم ر تأخذ نفس الشكل السابق فانه باستخدام نفس طريقة الاثبات السابقة يمكن اثبات أن السياسة المثلى فى الفترة ر + ١ تأخذ نفس الشكل .

وبذلك نكون قد أثبتنا أنه اذا كانت ك = صفر فان السياسة المثلى فى الفترة رقم ر (ر = ١ ، ... ، ن) تأخذ الشكل التالى :

$$\text{المستوى الأمثل للمخزون فى بداية الفترة} = \begin{cases} \hat{ص}_{ر} & \text{اذا كانت } س_{ر} < \hat{ص}_{ر} \\ س_{ر} & \text{اذا كانت } س_{ر} \geq \hat{ص}_{ر} \end{cases}$$

(بعد استلام الانتاج الجديد)

حيث $\hat{ص}_{ر}$ هى القيمة التى يتساوى عندها المعامل التفاضلى الاول للدالة $ى_{ر}(ص_{ر})$ بالصفر .

٢ ـ اذا كانت ك > صفر :

سنبدأ بتعريف معلمه جديدة $\underline{ص}_{ر}$ كما يلى :

$$\underline{ص}_{ر} \geq \hat{ص}_{ر} \quad ، \quad ى_{ر}(\underline{ص}_{ر}) = ى_{ر}(\hat{ص}_{ر}) + ك$$

حيث $\hat{ص}_{ر}$ هى النقطة التى تصل عندها الدالة $ى_{ر}(ص_{ر})$ الى نهايتها الصغرى .

(سنفرض للتبسيط أن هناك قيمة واحدة $\underline{\text{ص}}_1$ تحقق هذه العلاقة واذا كان هناك أكثر من قيمة فاننا سنستخدم أصغرها)، واذا نظرنا الى الفترة رقم ١ فاننا سنجد أنها تمثل النموذج السابق تحليله (النموذج الثانى) أى أن السياسة المثلى لهذه الفترة هى :

$$\text{المستوى الأمثل للمخزون فى بداية الفترة بعد استلام الانتاج الجديد} = \begin{cases} \hat{\text{ص}}_1 & \text{اذا كانت } \text{س}_1 < \underline{\text{ص}}_1 \\ \text{س}_1 & \text{اذا كانت } \text{س}_1 \geqslant \underline{\text{ص}}_1 \end{cases}$$

وبالتالى فان :

$$\text{ق}_1(\text{س}_1) = \begin{cases} \text{ك} - \text{ج}\,\text{س}_1 + \text{ى}_1(\hat{\text{ص}}_1) & \text{اذا كانت } \text{س}_1 < \underline{\text{ص}}_1 \\ -\text{ج}\,\text{س}_1 + \text{ى}_1(\text{س}_1) & \text{اذا كانت } \text{س}_1 \geqslant \underline{\text{ص}}_1 \end{cases}$$

وهذه الدالة ك محدبة من اليمين* (لن نذكر الاثبات هنا)

وبالتالى فان الدالة $\text{ى}_2(\text{ص}_2)$ هى أيضا ك محدبة من اليمين وتصل الى نهايتها الصغرى عند النقطة $\hat{\text{ص}}_2$، وهذا يكفى لاثبات أن :

$$\text{ق}_2(\text{س}_2) = \begin{cases} \text{ك} - \text{ج}\,\text{س}_2 + \text{ى}_2(\hat{\text{ص}}_2) & \text{اذا كانت } \text{س}_2 < \underline{\text{ص}}_2 \\ -\text{ج}\,\text{س}_2 + \text{ى}_2(\text{س}_2) & \text{اذا كانت } \text{س}_2 \geqslant \underline{\text{ص}}_2 \end{cases}$$

وبالتالى فان السياسة المثلى فى الفترة رقم ٢ هى :

---

* الدالة ف (س) تسمى ك محدبة من اليمين right-hand-K-convex اذا كانت :

$$\text{ف}(\text{س} + \text{م}) - \text{ف}(\text{س}) - \text{م}\,\text{ف}'(\text{س}) + \text{ك} \geqslant \text{صفر}$$

حيث $\text{ف}'(\text{س})$ هى المعامل التفاضلى الأيمن للدالة ف (س) عند النقطة س .

ونلاحظ أن ف (س) تكون محدبة اذا كانت ك = صفر .

المستوى الامثل للمخزون فى بداية الفترة رقم ٢ وبعد استلام الانتاج الجديد

$$= \begin{cases} \hat{ص}_{٢} & \text{اذا كانت } س_{٢} < \underline{ص}_{٢} \\ س_{٢} & \text{اذا كانت } س_{٢} \geqslant \underline{ص}_{٢} \end{cases}$$

وبافتراض أن السياسة المثلى تأخذ نفس الصورة لجميع الفترات حتى الفترة رقم $ر$ فانه يمكن ـ باستخدام نفس الطريقة السابقة ـ اثبات أن السياسة المثلى فى الفترة $ر + ١$ ستأخذ نفس الصورة ٠

وهذا يثبت أن :

السياسة المثلى لأى فترة $ر$ ($ر = ١ ، \cdots ، ن$) هى :

المستوى الامثل للمخزون فى بداية الفترة رقم $ر$ وبعد استلام الانتاج الجديد

$$= \begin{cases} \hat{ص}_{ر} & \text{اذا كانت } س_{ر} < \underline{ص}_{ر} \\ س_{ر} & \text{اذا كانت } س_{ر} \geqslant \underline{ص}_{ر} \end{cases}$$

ويلاحظ أن ايجاد قيم $\hat{ص}_{ر}$ ، $\underline{ص}_{ر}$ عدديا يتطلب الكثير من العمليات الحسابية الطويلة والمعقدة ولذلك فان أهمية النموذج الاخير ترجع الى أنه يبين خصائص السياسة المثلى ويثبت أن هذه السياسة تعتمد على قيمتين ($\hat{ص}_{ر}$ ، $\underline{ص}_{ر}$) وذلك فى جميع الفترات (وفى ظل الفروض المعطاه) ٠

الملاحـــــق الرياضيـــــــة

ملحق رياضى رقم (١)

• ايجاد قيم ن ، $\text{ص}_{\text{ر}}$: ر = ١ ... ن التى تحقق النهاية الصغرى للدالة :

$$\text{ق}_{\text{م}}\left(\text{ن}\,،\,\text{ص}_{\text{ر}} : \text{ر} = ١ \cdots \text{ن}\right) = \text{ن ك} + \text{ى} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}} + \frac{\text{هـ}}{٢\,\text{د}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}}^{٢}$$

بشرط أن يكون $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}} = \text{ط}$:

• سنبدأ بافتراض أن ن معلومة ونوجد القيم المثلى للمتغيرات $\text{ص}_{\text{ر}}$ بدلالة ن وبعد ذلك نوجد القيمة المثلى للمتغير ن .

ولايجاد القيم المثلى للمتغيرات $\text{ص}_{\text{ر}}$ بدلالة ن نستخدم طريقة لاجرانج لايجاد النهاية الصغرى لدالة مشروطة فنعرف الدالة $\tilde{\text{ق}}$ كما يلى :

$$\tilde{\text{ق}} = \text{ق}_{\text{م}}\left(\text{ن}\,،\,\text{ص}_{\text{ر}} : \text{ر} = ١ \cdots \text{ن}\right) - \lambda\left[\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}} - \text{ط}\right]$$

$$= \text{ن ك} + \text{ى} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}} + \frac{\text{هـ}}{٢\,\text{د}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}}^{٢} - \lambda\left[\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}} - \text{ط}\right]$$

حيث λ هى معامل لاجرانج .

وهذه الدالة تصل الى نهايتها الصغرى* عندما تتساوى معاملاتها التفاضلية الجزئية الأولى (بالنسبة الى المتغيرات $\text{ص}_{\text{ر}}$) بالصفر .

---

* اذا كانت $\text{ق}(\text{ص}_{\text{ر}}) = \text{ك} + \text{ى}\,\text{ص}_{\text{ر}} + \frac{\text{هـ}}{٢\,\text{د}}\,\text{ص}_{\text{ر}}^{٢}$ (أى النفقة الكلية فى الفترة رقم ر)

فان $\frac{\text{ى}\,\text{ق}(\text{ص}_{\text{ر}})}{\text{ى}\,\text{ص}_{\text{ر}}} = \text{ى} + \frac{\text{هـ}}{\text{د}}\,\text{ص}_{\text{ر}}$

كما أن $\frac{\text{ى}^{٢}\,\text{ق}(\text{ص}_{\text{ر}})}{\text{ى}\,\text{ص}_{\text{ر}}^{٢}} = \frac{\text{هـ}}{\text{د}} \geqslant \text{صفر}$

وهذا يعنى أن $\text{ق}(\text{ص}_{\text{ر}})$ هى دالة محدبة Convex فى $\text{ص}_{\text{ر}}$ وبالتالى فان $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{ص}_{\text{ر}})$ [أى الدالة $\text{ق}_{\text{م}}$] هى أيضا محدبة أى أن $\tilde{\text{ق}}$ دالة محدبة . وعلى ذلك فان $\tilde{\text{ق}}$ تصل الى نهايتها الصغرى عندما تتلاشى معاملاتها التفاضلية الاولى .

وحيث أن : $\frac{\partial \text{ق}}{\partial \text{ص}_{\text{ر}}} = \text{ى} + \frac{\text{هـ}}{\text{د}}\,\text{ص}_{\text{ر}} - \lambda$ ر = ١ ... ن

فان القيم المثلى للمتغيرات ص$_{\text{ر}}$ – بدلالة ن – وسنرمز لها بالرمز $\hat{\text{ص}}_{\text{ر}}(\text{ن})$ يجب أن تحقق العلاقة :

$$\text{ى} + \frac{\text{هـ}}{\text{د}}\,\hat{\text{ص}}_{\text{ر}}(\text{ن}) - \lambda = \text{صفر} \qquad \text{ر} = ١ \cdots \text{ن}$$

أى أن

$$\hat{\text{ص}}_{\text{ر}}(\text{ن}) = \frac{\text{هـ}}{\text{د}}(\lambda - \text{ى}) \qquad \text{ر} = ١ \cdots \text{ن}$$

$$\therefore \text{ط} = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \hat{\text{ص}}_{\text{ر}}(\text{ن})$$

$$= \text{ن}\,\frac{\text{هـ}}{\text{د}}(\lambda - \text{ى})$$

$$\therefore \lambda - \text{ى} = \frac{\text{ط}}{\text{ن}}\,\frac{\text{د}}{\text{هـ}}$$

ومن ذلك نجد أن

$$\hat{\text{ص}}_{\text{ر}}(\text{ن}) = \frac{\text{ط}}{\text{ن}} \qquad \text{لجميع قيم ر}$$

وبالتالى فان

$$\hat{\text{م}}_{\text{ر}}(\text{ن}) = \frac{\hat{\text{ص}}_{\text{ر}}(\text{ن})}{\text{د}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} \qquad \text{لجميع قيم ر}$$

أى أن جميع الفترات يجب أن تكون متساوية كما أن مستوى المخزون فى بداية الفترات المختلفة يكون متساويا .

وعلى ذلك فان :

$$\text{ق}_{\text{م}}(\text{ن}\,،\,\hat{\text{ص}}(\text{ن})) = \text{ن ك} + \text{ى ط} + \text{هـ}\,\frac{\text{ط}^{٢}}{٢\,\text{د ن}}$$

$$= \text{ن ك} + \text{ى ط} + \text{هـ}\,\frac{\text{ط م}}{٢\,\text{ن}} \quad \text{، حيث ن معلومة}$$

وللحصول على القيمة المثلى للمتغير ن نضع $\frac{\partial \text{ق}_{\text{م}}}{\partial \text{ن}}$ مساويا للصفر .

ولكن $\frac{\partial \text{ق}_{\text{م}}}{\partial \text{ن}} = \text{ك} - \text{هـ} \, \frac{\text{ط م}}{\text{٢ ن}^{٢}}$

أى أن قيمة ن التى تحقق النهاية الصغرى* للدالة $\text{ق}_{\text{م}}$ — وسنرمز لها بالرمز $\hat{\text{ن}}$ — يجب أن تحقق العلاقة

$$\text{ك} - \text{هـ} \, \frac{\text{ط م}}{\text{٢} \, \hat{\text{ن}}^{٢}} = \text{صفر}$$

أى أن $\hat{\text{ن}} = \sqrt{\frac{\text{ط م}}{\text{٢ ك}} \cdot \text{هـ}}$

وحيث أن $\hat{\text{ص}}(\text{ن}) = \frac{\text{ط}}{\text{ن}}$

فان $\hat{\text{ص}} = \frac{\text{ط}}{\hat{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{\text{٢ ك}}{\text{هـ}} \cdot \text{د}}$

وكذلك $\hat{\text{م}} = \frac{\text{م}}{\hat{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{\text{٢ ك}}{\text{هـ}} \cdot \frac{\text{١}}{\text{د}}}$

وهذه هى القيم المثلى المطلوبة .

---

* حيث أن $\frac{\partial^{٢} \text{ق}_{\text{م}}}{\partial \text{ن}^{٢}} = \text{٢ هـ} \, \frac{\text{ط م}}{\text{٢ ن}^{٣}} \geqslant \text{صفر}$ فان الدالة $\text{ق}_{\text{م}}$ هى دالة محدبةفى المتغير ن وتصل الى نهايتها الصغرى عندما يتساوى معاملها التفاضلى الاول (بالنسبة الى ن) بالصفر .

ملحق رياضى رقم (٢) :

• ايجاد قيم ص ، س ، مـ التى تحقق النهاية الصغرى* للدالة :

$$: \quad \frac{س^٢}{مـ}\,\frac{حـ}{٢\,د} + \frac{ص^٢}{مـ}\,\frac{هـ}{٢\,د} + \frac{ص - س}{مـ}\,ى + \frac{ك}{مـ} = \bar{ق}$$

• حيث أن $\frac{ص - س}{د} = مـ$

فان $مـ\,د - ص = -س$

وبالتالى فان :

$$\frac{(مـ\,د - ص)^٢}{مـ}\,\frac{حـ}{٢\,د} + \frac{ص^٢}{مـ}\,\frac{هـ}{٢\,د} + ى\,د + \frac{ك}{مـ} = \bar{ق}$$

$$\frac{حـ\,(مـ\,د - ص)}{د\,مـ} - \frac{هـ\,ص}{د\,مـ} = \frac{\partial\,\bar{ق}}{\partial\,ص} \quad \therefore$$

وبوضع $\frac{\partial\,\bar{ق}}{\partial\,ص}$ = صفر نحصل على : $\ldots\ د\,\hat{مـ}\,\frac{حـ}{هـ + حـ} = \hat{ص}$ (١)

وبالمثل فان $\frac{حـ\,(مـ\,د - ص)(مـ\,د + ص)}{٢\,د\,مـ^٢} + \frac{هـ\,ص^٢}{٢\,د\,مـ^٢} - \frac{ك}{مـ^٢} - = \frac{\partial\,\bar{ق}}{\partial\,مـ}$

وبوضع $\frac{\partial\,\bar{ق}}{\partial\,مـ}$ = صفر نحصل على :

$$\ldots\ldots\ldots \quad \frac{هـ + حـ}{حـ\,د\,٢}\,\hat{ص}^٢ + \frac{٢\,ك}{حـ\,د} = \hat{مـ}^٢ \qquad (٢)$$

---

* الدالة $\bar{ق}$ هى دالة محدبة فى كل من مـ ، ص وذلك لأن :

$$صفر \geqslant \frac{\partial^٢\,ق}{\partial\,مـ\,\partial\,ص} \quad ، \quad صفر \leqslant \frac{\partial^٢\,ق}{\partial\,ص^٢} \quad ، \quad صفر \leqslant \frac{\partial^٢\,ق}{\partial\,مـ^٢}$$

ومن (١) ، (٢) نجد أن

$$\hat{\text{م}} = \sqrt{\frac{\text{٢ ك}}{\text{ح}} \cdot \frac{(\text{هـ} + \text{ح})}{\text{هـ}} \cdot \frac{\text{١}}{\text{د}}}$$

$$\hat{\text{ص}} = \sqrt{\frac{\text{٢ ك}}{\text{هـ}} \cdot \frac{\text{ح}}{(\text{هـ} + \text{ح})} \cdot \text{د}}$$

وعلى ذلك فان

$$\hat{\text{س}} = \hat{\text{م}}\,\text{د} - \hat{\text{ص}} = \sqrt{\frac{\text{٢ ك}}{\text{ح}} \cdot \frac{\text{هـ}}{(\text{هـ} + \text{ح})} \cdot \text{د}}$$

كما أن :

$$\hat{\text{ن}} = \frac{\text{م}}{\hat{\text{م}}} = \sqrt{\frac{\text{م ط}}{\text{٢ ك}} \cdot \frac{\text{هـ ح}}{\text{هـ} + \text{ح}}}$$

$$\hat{\text{ص}} - \hat{\text{س}} = \frac{\text{ط}}{\hat{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{\text{٢ ك}}{\text{هـ ح}} (\text{هـ} + \text{ح}) \cdot \text{د}} \;.$$

ملحق رياضى رقم (٣) :

• ايجاد قيم ن ، ص$_{ر}$ ، س$_{ر+١}$ (ر = ١ ... ن) التى تحقق النهاية الصغرى للدالـــة :

$$\text{ق}_{\text{م}}\left(\text{ن}\,،\,\text{ص}_{\text{ر}}\,،\,\text{س}_{\text{ر}+١} \;:\; \text{ر} = ١ \cdots \text{ن}\right)^{*}$$

$$= \text{ن ك} + \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ص}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}}) + \frac{\text{هـ}}{٢\text{د}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}}^{٢} + \frac{\text{حـ}}{٢\text{د}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}+١}^{٢}$$

بشرط أن يكون $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ص}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}}) = \text{ط}$:

• لايجاد القيم المثلى للمتغيرات ص$_{ر}$ ، س$_{ر}$ بدلالة ن نفترض أن ن معلومة ونعرف الدالـة $\tilde{\text{ق}}$ كما يلى :

$$\tilde{\text{ق}} = \text{ق}_{\text{م}}\left(\text{ن}\,،\,\text{ص}_{\text{ر}}\,،\,\text{س}_{\text{ر}+١} \;:\; \text{ر} = ١ \cdots \text{ن}\right) - \lambda \left[\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ص}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}}) - \text{ط}\right]$$

$$= \text{ن ك} + \text{ى} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ص}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}}) + \frac{\text{هـ}}{٢\text{د}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}}^{٢} + \frac{\text{حـ}}{٢\text{د}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}+١}^{٢}$$

$$- \lambda \left[\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ص}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}}) - \text{ط}\right]$$

حيث λ هى معامل لاجرانج .

وتصل هذه الدالة الى نهايتها الصغرى** عندما تتساوى معاملاتها التفاضلية الجزئية الاولى بالصفر :

---

* ق$_{م}$ هى النفقة الاجمالية للانتاج والتخزين والعجز فى الزمن م فى ظل فروض النموذج الثالـث ذى الطلب المعلوم .

** ق$_{م}$ هى مجموع ن من الدوال ، كل منها محدبة وبالتالى فان ق$_{م}$ محدبة وبالمثل فان $\tilde{\text{ق}}$ تكون محدبــة .

$$\frac{\partial \tilde{ق}}{\partial ص_ر} = ى + \frac{هـ}{د} ص_ر - \lambda$$

$$\therefore \quad \hat{ص}_ر(ن) = \frac{د}{هـ}(\lambda - ى) \qquad \text{لجميع قيم ر ،}$$

$$\frac{\partial \tilde{ق}}{\partial س_ر} = - ى + \frac{ح}{د} س_ر + \lambda$$

$$\therefore \quad \hat{س}_ر(ن) = - \frac{د}{ح}(\lambda - ى) \qquad \text{لجميع قيم ر .}$$

$$\therefore \quad \hat{ص}_ر(ن) - \hat{س}_ر(ن) = \frac{ح + هـ}{ح هـ} \cdot د \cdot (\lambda - ى) \qquad \text{لجميع قيم ر .}$$

أى أن $ط = \sum_{ر=1}^{ن} \left[\hat{ص}_ر(ن) - \hat{س}_ر(ن)\right]$

$$= ن \cdot \frac{ح + هـ}{ح هـ} \cdot د \cdot (\lambda - ى)$$

$$\therefore \quad \lambda - ى = \frac{ط}{ن} \cdot \frac{ح هـ}{ح + هـ} \cdot \frac{1}{د}$$

$$\therefore \quad \hat{ص}_ر(ن) = \frac{ط}{ن} \cdot \frac{ح}{ح + هـ} \qquad \text{لجميع قيم ر}$$

$$\hat{س}_ر(ن) = - \frac{ط}{ن} \cdot \frac{هـ}{ح + هـ} \qquad \text{" " "}$$

$$\hat{ص}_ر(ن) - \hat{س}_ر(ن) = \frac{ط}{ن} \qquad \text{" " "}$$

وبالتالى فان $\hat{م}_ر(ن) = \frac{م}{ن}$ " " "

أى أن جميع الفترات يجب أن تكون متساوية كما أن حجم الكمية المنتجة فى الفترات المتتالية يكون متساويا ، وبالتالى فان :

$\text{ق}_{\text{م}}\left(\text{ن}\,،\,\hat{\text{ص}}(\text{ن})\,،\,\hat{\text{س}}(\text{ن})\right) \overset{*}{=} \text{ن ك} + \text{ى ط} + \dfrac{\text{هـ حـ}}{\text{هـ} + \text{حـ}}\;\dfrac{\text{ط م}}{\text{٢ ن}}$ ، حيث ن معلومة .

وللحصول على القيمة المثلى للمتغير ن نوجد $\dfrac{\text{ى ق}_{\text{م}}}{\text{ى ن}}$:

$$\frac{\text{ى ق}_{\text{م}}}{\text{ى ن}} = \text{ك} - \frac{\text{هـ حـ}}{\text{هـ} + \text{حـ}}\;\frac{\text{ط م}}{\text{٢ ن}^{٢}}$$

وبمساواه هذا المعامل التفاضلى بالصفر نحصل على القيمة $\hat{\text{ن}}$ التى تحقق النهاية الصغرى للدالـة $\text{ق}_{\text{م}}$:

$$\therefore\ \hat{\text{ن}} = \sqrt{\frac{\text{م ط}}{\text{٢ ك}} \cdot \frac{\text{هـ حـ}}{\text{هـ} + \text{حـ}}}$$

وعلى ذلك فان :

$$\hat{\text{ص}} - \hat{\text{س}} = \frac{\text{ط}}{\hat{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{\text{٢ ك}}{\text{هـ}} \cdot \text{د} \cdot \frac{\text{هـ} + \text{حـ}}{\text{حـ}}}$$

$$\hat{\text{م}} = \frac{\text{م}}{\hat{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{\text{٢ ك}}{\text{هـ}} \cdot \frac{١}{\text{د}} \cdot \frac{\text{هـ} + \text{حـ}}{\text{حـ}}}$$

كما أن :

$$\hat{\text{ص}} = \frac{\text{ط}}{\hat{\text{ن}}} \cdot \frac{\text{حـ}}{\text{هـ} + \text{حـ}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{٢ ك}}{\text{هـ}} \cdot \text{د} \cdot \frac{\text{حـ}}{\text{هـ} + \text{حـ}}}$$

$$\hat{\text{س}} = - = \sqrt{\frac{\text{٢ ك}}{\text{حـ}} \cdot \text{د} \cdot \frac{\text{هـ}}{\text{هـ} + \text{حـ}}}$$

وبذلك نكون قد حصلنا على القيم $\hat{\text{ص}}$ ، $\hat{\text{س}}$ ، $\hat{\text{ن}}$ ، $\hat{\text{م}}$ التى تحقق النهاية الصغرى للنفقات .

---

* $\dfrac{\text{ى}^{٢}\,\text{ق}_{\text{م}}}{\text{ى ن}^{٢}} = \dfrac{\text{هـ حـ}}{\text{هـ} + \text{حـ}} \cdot \dfrac{\text{ط م}}{\text{ن}^{٣}} \geqslant \text{صفر}$

أى أن $\text{ق}_{\text{م}}$ دالة محدبة فى ن .

ملحق رياضى رقم (٤) :

• ايجاد قيم ن ، $\text{ص}_{\text{ر}}$ ، $\text{س}_{\text{ر}+١}$ (ر = ١ ... ن) التى تحقق النهاية الصغرى للدالة :

$$\text{ق}_{\text{م}}\left(\text{ن}، \text{ص}_{\text{ر}}، \text{س}_{\text{ر}+١} : \text{ر} = ١ \cdots \text{ن}\right) = \text{ن ك} + \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}} + \frac{\text{هـ}}{٢\text{د}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}}^{٢}$$

$$+ \frac{\text{ح}}{٢\text{د}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}+١}^{٢}$$

بشرط أن يكون $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ص}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}}) = \text{ط}$:

• لايجاد القيم المثلى للمتغيرات $\text{ص}_{\text{ر}}$ ، $\text{س}_{\text{ر}}$ بدلالة ن نفترض أن ن معلومة ونعرف الدالة $\tilde{\text{ق}}$ كما يلى :

$$\tilde{\text{ق}} = \text{ق}_{\text{م}}\left(\text{ن}، \text{ص}_{\text{ر}}، \text{س}_{\text{ر}+١} : \text{ر} = ١ \cdots \text{ن}\right) - \lambda \left[\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ص}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}}) - \text{ط}\right]$$

$$= \text{ن ك} + \text{ك} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}} + \frac{\text{هـ}}{٢\text{د}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}}^{٢} + \frac{\text{ح}}{٢\text{د}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}+١}^{٢}$$

$$- \lambda \left[\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ص}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}}) - \text{ط}\right]$$

حيث λ هى معامل لاجرانج .

وتصل هذه الدالة الى نهايتها الصغرى* عندما تتساوى معاملاتها التفاضلية الجزئية الأولى بالصفر :

$$\frac{\partial \tilde{\text{ق}}}{\partial \text{ص}_{\text{ر}}} = \text{ك} + \frac{\text{هـ}}{\text{د}} \text{ص}_{\text{ر}} - \lambda$$

$$\therefore \hat{\text{ص}}_{\text{ر}}(\text{ن}) = \frac{\text{د}}{\text{هـ}} (\lambda - \text{ك}) \qquad \text{لجميع قيم ر}$$

* لأن الدالة $\tilde{\text{ق}}$ هى دالة محدبة .

$$\frac{\partial \text{ق}}{\partial \text{س}_\text{ر}} = \frac{\text{ح}}{\text{د}} \text{س}_\text{ر} + \lambda$$

$$\therefore \quad \hat{\text{س}}_\text{ر}(\text{ن}) = - \frac{\text{د}}{\text{ح}} \lambda$$

$$\therefore \quad \text{ط} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \left(\hat{\text{ص}}_\text{ر}(\text{ن}) - \hat{\text{س}}_\text{ر}(\text{ن}) \right)$$

$$= \text{ن} \left[\lambda \cdot \text{د} \cdot \frac{\text{هـ} + \text{ح}}{\text{هـ ح}} - \frac{\text{د}}{\text{هـ}} \text{ى} \right]$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{1}{\text{ن د}} \; \frac{\text{هـ ح}}{\text{هـ} + \text{ح}} \left[\text{ط} + \text{د ن} \frac{\text{ى}}{\text{هـ}} \right]$$

$$\therefore \quad \hat{\text{ص}}_\text{ر}(\text{ن}) = \frac{\text{ط}}{\text{ن}} \; \frac{\text{ح}}{\text{هـ} + \text{ح}} - \text{د} \; \frac{\text{ى}}{\text{هـ} + \text{ح}}$$ لجميع قيم ر

$$\hat{\text{س}}_\text{ر}(\text{ن}) = - \left[\frac{\text{ط}}{\text{ن}} \; \frac{\text{هـ}}{\text{هـ} + \text{ح}} + \text{د} \; \frac{\text{ى}}{\text{هـ} + \text{ح}} \right]$$ لجميع قيم ر

$$\therefore \quad \hat{\text{ص}}_\text{ر}(\text{ن}) - \hat{\text{س}}_\text{ر}(\text{ن}) = \frac{\text{ط}}{\text{ن}}$$ لجميع قيم ر

وبالتالى فان $\hat{\text{مـ}}_\text{ر}(\text{ن}) = \dfrac{\text{م}}{\text{ن}}$ لجميع قيم ر

أى أن جميع الفترات يجب أن تكون متساوية كما أن حجم الكمية المنتجة فى الفترات المتتالية يكـــون متساويا . وبالتالى فان :

$$\text{ق}_\text{م}\left(\text{ن} ، \hat{\text{ص}}(\text{ن}) ، \hat{\text{س}}(\text{ن})\right) = \text{ن ك} + \frac{\text{ى ح}}{\text{هـ} + \text{ح}} \text{ط} - \frac{\text{ى}^2}{\text{هـ} + \text{ح}} \; \frac{\text{ن د}}{2} + \frac{\text{هـ ح}}{\text{هـ} + \text{ح}} \; \frac{\text{ط}^2}{2 \text{ ن د}}$$

وللحصول على القيمة المثلى للمتغير ن نوجد $\dfrac{\partial \text{ق}_\text{م}}{\partial \text{ن}}$:

$$\frac{\partial \text{ق}_{\text{م}}}{\partial \text{ن}} = \text{ك} - \frac{\underline{\text{ك}}^{٢}\,\text{د}}{٢\,(\text{هـ}+\text{ح})} - \frac{\text{هـ}\text{ح}}{\text{هـ}+\text{ح}}\;\frac{\text{ط}^{٢}}{٢\,\text{ن}^{٢}\,\text{د}}$$

وبمساواه هذا المعامل التفاضلى بالصفر نحصل على القيمة $\hat{\text{ن}}$ التى تحقق النهاية الصغرى* للدالة $\text{ق}_{\text{م}}$:

$$\hat{\text{ن}} = \sqrt{\frac{\text{م}\,\text{ط}\,.\,\text{هـ}\,\text{ح}}{٢\,\text{ك}\,(\text{هـ}+\text{ح}) - \underline{\text{ك}}^{٢}\,\text{د}}}$$

وعلى ذلك فان :

$$\hat{\text{ص}} = -\text{د}\;\frac{\underline{\text{ك}}}{\text{هـ}+\text{ح}} + \sqrt{\frac{٢\,\text{ك}\,\text{ح}}{\text{هـ}\,(\text{هـ}+\text{ح})}\,\text{د} - \frac{\underline{\text{ك}}^{٢}\,\text{ح}}{\text{هـ}\,(\text{هـ}+\text{ح})^{٢}}\,\text{د}^{٢}}$$

$$\hat{\text{س}} = -\text{د}\;\frac{\underline{\text{ك}}}{\text{هـ}+\text{ح}} - \sqrt{\frac{٢\,\text{ك}\,\text{هـ}}{\text{ح}\,(\text{هـ}+\text{ح})}\,\text{د} - \frac{\underline{\text{ك}}^{٢}\,\text{هـ}}{\text{ح}\,(\text{هـ}+\text{ح})^{٢}}\,\text{د}^{٢}}\,,$$

---

* لأن $\text{ق}_{\text{م}}$ دالة محدبة Convex

ملحق رياضى رقم (٥) :

- ايجاد قيمة ص التى تحقق النهاية الصغرى للدالة :

$$\text{ق}(\text{ص}) = \text{ى}\,\text{ص} + \text{هـ}\sum_{\text{ط}=0}^{\text{ص}} (\text{ص}-\text{ط})\,\text{ح}(\text{ط}) + \text{حـ}\sum_{\text{ط}=\text{ص}+1}^{\infty} (\text{ط}-\text{ص})\,\text{ح}(\text{ط}) :$$

- نظرا لأن المتغير ص هو متغير متقطع (discrete) فان الدالة ق (ص) تصل الى نهايتها الصغرى* عند القيمة $\hat{\text{ص}}$ التى تحقق العلاقة :

$$\Delta\text{ق}(\hat{\text{ص}}-1) < \text{صفر} < \Delta\text{ق}(\hat{\text{ص}})$$

وذلك حيث $\Delta\,\text{ق}(\text{ص}) = \text{ق}(\text{ص}+1) - \text{ق}(\text{ص})$

ولكن $\text{ق}(\text{ص}+1) = \text{ى}(\text{ص}+1) + \text{هـ}\sum_{\text{ط}=0}^{\text{ص}+1} (\text{ص}+1-\text{ط})\,\text{ح}(\text{ط})$

$$+\ \text{حـ}\sum_{\text{ط}=\text{ص}+2}^{\infty} (\text{ط}-\text{ص}-1)\,\text{ح}(\text{ط})$$

$$= \text{ى} + \text{ى}\,\text{ص} + \text{هـ}\sum_{\text{ط}=0}^{\text{ص}} (\text{ص}+1-\text{ط})\,\text{ح}(\text{ط}) + \text{حـ}\sum_{\text{ط}=\text{ص}+1}^{\infty} (\text{ط}-\text{ص}-1)\,\text{ح}(\text{ط})$$

$$= \text{ى} + \text{ى}\,\text{ص} + \text{هـ}\sum_{\text{ط}=0}^{\text{ص}} (\text{ص}-\text{ط})\,\text{ح}(\text{ط}) + \text{هـ}\sum_{\text{ط}=0}^{\text{ص}} \text{ح}(\text{ط})$$

$$+\ \text{حـ}\sum_{\text{ط}=\text{ص}+1}^{\infty} (\text{ط}-\text{ص})\,\text{ح}(\text{ط}) - \text{حـ}\sum_{\text{ط}=\text{ص}+1}^{\infty} \text{ح}(\text{ط})$$

$$= \text{ى}\,\text{ص} + \text{هـ}\sum_{\text{ط}=0}^{\text{ص}} (\text{ص}-\text{ط})\,\text{ح}(\text{ط}) + \text{حـ}\sum_{\text{ط}=\text{ص}+1}^{\infty} (\text{ط}-\text{ص})\,\text{ح}(\text{ط})$$

$$+\ \text{ى} + \text{هـ}\sum_{\text{ط}=0}^{\text{ص}} \text{ح}(\text{ط}) - \text{حـ}\Big(1 - \sum_{\text{ط}=0}^{\text{ص}} \text{ح}(\text{ط})\Big)$$

---

* حيث أن : $\Delta^{2}\,\text{ق}(\text{ص}) = \Delta\,\text{ق}(\text{ص}+1) - \Delta\,\text{ق}(\text{ص})$

$$= \text{ى} - \text{حـ} + (\text{هـ}+\text{حـ})\sum_{\text{ط}=0}^{\text{ص}+1} \text{ح}(\text{ط}) - \text{ى} + \text{حـ} - (\text{هـ}+\text{حـ})\sum_{\text{ط}=0}^{\text{ص}} \text{ح}(\text{ط})$$

$$= (\text{هـ}+\text{حـ})\,\text{ح}(\text{ص}+1) \geq \text{صفر}$$

فان الدالة ق (ص) دالة محدبة وبالتالى فان $\hat{\text{ص}}$ تحقق النهاية الصغرى لها.

$$= \text{ق}\,(\text{ص}) + \text{ك} - \text{حـ} + (\text{هـ} + \text{حـ}) \sum_{\text{ط}=٠}^{\text{ص}} \text{ح}\,(\text{ط})$$

أى أن Δ ق (ص) $= \text{ك} - \text{حـ} + (\text{هـ} + \text{حـ}) \sum_{\text{ط}=٠}^{\text{ص}} \text{ح}\,(\text{ط})$

وبالمثل فان Δ ق (ص ـ ١) $= \text{ك} - \text{حـ} + (\text{هـ} + \text{حـ}) \sum_{\text{ط}=٠}^{\text{ص}-١} \text{ح}\,(\text{ط})$

أى أن $\hat{\text{ص}}$ يجب أن تحقق العلاقة :

$$\text{ك} - \text{حـ} + (\text{هـ} + \text{حـ}) \sum_{\text{ط}=٠}^{\hat{\text{ص}}-١} \text{ح}\,(\text{ط}) < \text{صفر} < \text{ك} - \text{حـ} + (\text{هـ} + \text{حـ}) \sum_{\text{ط}=٠}^{\hat{\text{ص}}} \text{ح}\,(\text{ط})$$

وهذا يعنى أن $\hat{\text{ص}}$ تعرف بالعلاقة :

$$\sum_{\text{ط}=٠}^{\hat{\text{ص}}-١} \text{ح}\,(\text{ط}) < \frac{\text{حـ} - \text{ك}}{\text{حـ} + \text{هـ}} < \sum_{\text{ط}=٠}^{\hat{\text{ص}}} \text{ح}\,(\text{ط})\ ;$$

الملحق الرياضي رقم (٦) :

- ايجاد قيمة ص التى تحقق النهاية الصغرى للدالة :

$$\text{ى}(\text{ص}) = \begin{cases} \text{ك}\,\text{ص} + \text{هـ}\int_{0}^{\text{ص}} (\text{ص}-\text{ط})\,\text{ح}(\text{ط})\,\text{ك}\,\text{ط} + \text{حـ}\int_{\text{ص}}^{\infty} (\text{ط}-\text{ص})\,\text{ح}(\text{ط})\,\text{ك}\,\text{ط} & \text{اذا كانت ص} > \text{صفر} \\ \text{ك}\,\text{ص} + \text{حـ}\int_{0}^{\infty} (\text{ط}-\text{ص})\,\text{ح}(\text{ط})\,\text{ك}\,\text{ط} \quad \ldots & \text{" " ص} \leqslant \text{صفر} \end{cases}$$

- حيث أن

$$\frac{\text{ك}\,\text{ى}(\text{ص})}{\text{ك}\,\text{ص}} \overset{*}{=} \begin{cases} \text{ك} + \text{هـ}\int_{0}^{\text{ص}} \text{ح}(\text{ط})\,\text{ك}\,\text{ط} - \text{حـ}\int_{\text{ص}}^{\infty} \text{ح}(\text{ط})\,\text{ك}\,\text{ط} & \text{اذا كانت ص} > \text{صفر} \\ \text{ك} - \text{حـ}\int_{0}^{\infty} \text{ح}(\text{ط})\,\text{ك}\,\text{ط} \quad \ldots & \text{" " ص} \leqslant \text{صفر} \end{cases}$$

$$\overset{**}{=} \begin{cases} \text{ك} + \text{هـ}\int_{0}^{\text{ص}} \text{ح}(\text{ط})\,\text{ك}\,\text{ط} - \text{حـ}\left(1 - \int_{0}^{\text{ص}} \text{ح}(\text{ط})\,\text{ك}\,\text{ط}\right) & \text{اذا كانت ص} > \text{صفر} \\ \text{ك} - \text{حـ} & \text{" " ص} \leqslant \text{صفر} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{ك} - \text{حـ} + (\text{هـ} + \text{حـ})\int_{0}^{\text{ص}} \text{ح}(\text{ط})\,\text{ك}\,\text{ط} & \text{اذا كانت ص} > \text{صفر} \\ \text{ك} - \text{حـ} & \text{" " ص} \leqslant \text{صفر} \end{cases}$$

---

* لايجاد المعامل التفاضلى الاول للدالة ى (ص) بالنسبة الى ص نستخدم القاعدة الرياضية التالية :

اذا كانت $\text{ف}(\text{أ}) = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س}،\text{أ})\,\text{ك}\,\text{س}$

فان $\frac{\text{ك}\,\text{ف}(\text{أ})}{\text{ك}\,\text{أ}} = -\text{د}(\text{أ}) + \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left[\frac{\partial}{\partial \text{أ}}\,\text{د}(\text{س}،\text{أ})\right] \text{ك}\,\text{س}$

** حيث أن ح (ط) هى دالة كثافة احتمال فان

$$\int_{0}^{\infty} \text{ح}(\text{ط})\,\text{ك}\,\text{ط} = \int_{0}^{\text{ص}} \text{ح}(\text{ط})\,\text{ك}\,\text{ط} + \int_{\text{ص}}^{\infty} \text{ح}(\text{ط})\,\text{ك}\,\text{ط} = 1$$

وحيث أن $\text{ك} - \text{ح} > \text{صفر}$ لأن نفقة انتاج الوحدة يجب أن تكون أقل من أو مساوية لنفقة العجز للوحدة حتى تستمر عملية الانتاج ،

فان ى (ص) تصل الى نهايتها الصغرى* عند القيمة $\hat{\text{ص}}$ التى تحقق العلاقة التالية :

$$\text{ك} - \text{ح} + (\text{هـ} + \text{ح}) \int_{0}^{\hat{\text{ص}}} \text{ح}(\text{ط})\, \text{د ط} = \text{صفر}$$

أى أن :

$$\int_{0}^{\hat{\text{ص}}} \text{ح}(\text{ط})\, \text{د ط} = \frac{\text{ك} - \text{ح}}{\text{هـ} + \text{ح}} \; .$$

---

* حيث أن

$$\frac{\text{د}^{2}\, \text{ى}(\text{ص})}{\text{د ص}^{2}} = \begin{cases} (\text{هـ} + \text{ح})\, \text{ح}(\text{ص}) & \text{اذا كانت ص} > \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{اذا كانت ص} \geqslant \text{صفر} \end{cases}$$

$$\leqslant \text{صفر}$$

فان ى (ص) دالة محدبة وبالتالى فان $\hat{\text{ص}}$ تحقق النهاية الصغرى لها .

المراجـــع

1. Arrow, K.T., S. Karlin, and H. Scarf , "Studies in the mathematical Theory of Inventory and Production", Stanford University Press, Stanford, 1958.

2. Churchman, C.w., R.L. Ackoff, and E.L. Arnoff, "Introduction to Operations Research", John Wiley and Sons, New York, 1957.

3. Hadley, G., and T.M. Whitin, "Analysis of Inventory Systems", Printice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1963

4. Sasieni, M., A. Yaspan, and L. Friedman, "Operations Research, Methods and Problems," John wiley and sons, Inc., London, 1963.