الجمهورية العربية المتحدة

معهد التخطيط القومي

مذكرة رقم ٦٨٥

الاقتصاد القياسي

دكتور أبو بكر أحمد حسين

الدورة التدريبية قصيرة الاجل للعاملين بوزارة الخزانة

أغسطس ١٩٦٦

القاهرة
٣ شارع محمد مظهر - بالزمالك

مقدمة

تعريف الاقتصاد القياسى

الاقتصاد القياسى Econometrics هو تطبيق طرق محددة فى المجال العام لعلم الاقتصاد لغرض الوصول الى نتائج رقمية او اثبات نظريات اقتصادية • ونظرا لان الطرق المحددة هى نظريات الاقتصاد الرياضى والمعالجة الاحصائية للبيانات الاقتصادية فانه يمكن اعادة تعريف علم الاقتصاد القياسى كما يلى :

" تطبيق نظريات الاقتصاد الرياضى والمعالجة الاحصائية للبيانات الاقتصادية بغرض الوصول الى نتائج رقمية لاثبات نظريات اقتصادية " •

ويجب التفرقة بين الاقتصاد الرياضى Mathematical Economics والاقتصاد الاحصائى Statistical Economics والاقتصاد القياسى Econometrics بالرغم من العلاقة الوثيقة بين هذه الموضوعات الثلاث •

الاقتصاد الرياضى :

الاقتصاد الرياضى هو العلم الذى يبحث فى التعبير عن النظريات الاقتصادية فى صورة رياضية واستخدام التحليل الرياضى للوصول الى علاقات اقتصادية بناء على افتراضات معينه •
مثال ذلك الافتراض الاقتصادى بأن المستهلك يحصل على اعلى درجة من المنفعة فى حين ان اسعار السلع والخدمات وكذلك دخله تبقى ثابته ولا تتأثر بتصوفه • ومن هذا الافتراض يمكن ان نصل الى دالة طلب فرديه بالنسبة لكل سلعة او خدمة وهكذا من المشاكل الاقتصادية الاخرى التى سيأتى شرحها فيما بعد •

ويلاحظ ان نظرية الاقتصاد لا تعطى وصفا كاملا لجميع الظواهر الاقتصادية • فعلى اساس بعض التبسيطات تقوم نظرية الاقتصاد ببناء نماذج معينة تهدف الى تفسير حقيقة اقتصادية معينة وباستخدام هذه النماذج الاقتصادية يمكن استنتاج قوانين معينة تشرح التصوفات الاقتصادية التى تتميز بالانتظام Regularity

وعلى ذلك يلاحظ ان الفرق الوحيد بين علم الاقتصاد وعلم الاقتصاد الرياضي هو ان الاول يعبر عن نظرياته في صورة حرفيه في حين ان الاخر يعبر عن نفس النظريات ولكن في صورة رياضية .

اما الفرق بين الاقتصاد والاقتصاد القياسي فيظهر من المثال التالي : بدراسة الافتراض الاقتصادى القائل بأن تخفيض الضرائب الجمركية في بعض الحالات يؤدى الى زيادة الناتج القومى لا يستطيع علم الاقتصاد ولا الاقتصاد الرياضي تحديد نسبة التغير في الناتج القومى نتيجة للتغير فى اسعار الضرائب الجمركية ولكن الاقتصاد القياسي يستطيع ذلك باستخدام الطرق الرياضية والاحصائية

هذا ويجب الحذر ومراعاة ان علم الاقتصاد او علم الاقتصاد الرياضي او الاقتصاد القياسى لا تجيب على السؤال " هل تخفض الضرائب ام لا ؟ " ان هذه العلوم تحدد نتائج هذا التصرف ولكنها تترك الاجابه على هذا السؤال للظروف السياسية والاجتماعية وماشابه ذلك .

الاحصـــــــاء :

يعتبر علم الاحصاء دعامه هامه لبناء صرح علم الاقتصاد القياسى فباستخدام نظرية العينات امكن جمع البيانات التى تعتبر الخامات الاولية فى الدراسات القياسية . ولكن الاهم من ذلك هو ان دراسات علم الاقتصاد القياسى تعتمد على طرق التحليل الاحصائى الحديثه اعتمادا شبه كليا .

الاستنتاج الاحصائى Statistical Inferences يبحث فى طريقة الوصول الى استنتاجات عن احدى خصائص المجتمع من بيانات عينة احصائية . واذا اعتبرنا العلاقات الاقتصادية عينات عشوائية من مجتمع لا نهائى غير معلومة خصائصه رأينا اهمية الاستنتاج الاحصائى فى الدراسات القياسيــة . ويقوم الاحصائيون وخبراء الاقتصاد القياسى باستخدام الطرق الاحصائية للوصول الى نتائج رقمية اما (١) فى صورة رقم فردى (نقط المقايسة Point Estimates) او فى صورة نهائية أو حدود لها احتمالات محددة (فترات المقايسة Interval estimates) .

(١) اختلف وجهات النظر فى تفسير معنى " الاحتمالات " التى بنيت عليها كل نظريات الاحصاء فيرى البعض (مثل كينز Keynes وجيفرى Jeffreys) ان نظرية الاحتمالات مبنيه على افتراضات فلسفيه وبالتالى فهى نظريات منطقيه وليست نظريات واقعيه الا ان وجهة النظر الاخرى (مثل فون ميزس R. Von Mises وفيلر W. Feller) ترى ان الاحتمالات ماهى الا تكرار نسبى لتجارب معادة عدد كبير من المرات . وسوف ننهج فيما يلى التفسير الثانى للاحتمالات اى اعتبارها تكرارات نسبية لتجارب متكــررة .

نقـــط المقايســـــة :

وأهم الطرق الاحصائية فى تقديرات نقط المقايسة هى طريقتان :

١ـ طريقة الاحتمالات القصوى Maximum Likelihood : وتطبيقا لهذه القاعدة يتم اختيار القيمـــة المطلوب تقديرها بحيث نجعل كثافة الاحتمال Probability density اكبر مايمكن •

٢ـ طريقة المربعات الصغرى Least Squares : وتطبيقا لهذه القاعدة يتم اختيار القيمـــة المطلوب تقديرها بحيث تجعل مجموع مربعات الانحرافات عن هذه القيمة اصغر مايمكن •

فـترات المقايســـــــة :

كثيرا ماتصبح طرق نقط المقايسة غير كافية للدراسات القياسية ، وفى هذه الحالة تتجه الدراسة الى طرق فترات المقايسة وهى المعروفة بطرق حدود الثقة Confidence Limits ويمكن تفسير حـــدود الثقة كما يلـــــى :

اذا قام الاحصائى بقياس حدود الثقة على اساس احتمال ٩٥٪ وكرر هذه العملية مرات كثيرة جدا فان القيمة الحقيقية للظاهرة المقيسة تخرج عن هذه الحدود فى ٥ مرات من كل ١٠٠ مره وتكون فى داخل هذه الحدود ٩٥ مرة من كل ١٠٠ مره فاذا فرضنا ان مرونة السعر للطلب على السـلع الاساسية فى مصر قدرت على اساس احتمال ٩٥٪ ووجدت انها تقع مابين ـ ٠٥ر و ـ ٢٠٠ر فانـــه يمكن تفسير ذلك كما يلـــى :

١ـ اذا حدثت زيادة بمعدل ١٪ فى اسعار السلع الاساسية فانه سيترتب عليها انخفاض (معامـــل جبرى سالب للمرونـــة) فى الطلب على هذه السلع لايقل عن ٠٥ر = $\frac{١}{٢٠}$٪ ولا يزيد عن ٢ر = $\frac{١}{٥}$٪ واذا حدث نقص فى اسعار السلع الاساسية بمعدل ٥٪ فانه سيترتب عليه ارتفاع فى الطلب على هذه السلع بنسبة لاتقل عن ٠٥ر × ٥ = ٢٥ ر٪ ولا تزيد عن ٢ر×٥ = ١٪ • وهذا هو المقصـــود بفترات المقايســة او حدود الثقـــــة •

٢ـ نظرا لان معامل الثقة المستخدم (الاساسى الاحتمالى) هو ٩٥ر فان هذا يعنى ان هنـــاك احتمال ٩٥٪ ان يكون التقدير السابق فى ١ صحيحا ويجب ملاحظة ان صحة طريقة فترات المقايسة تعتمد على مدى صحة الافتراضات الخاصة بالتوزيع الطبيعى Normality والاستقلال Independence

اختبـــارات الفروض : Testing of Statistical hypotheses

يجب اولا ملاحظة ان الفروض التى يخضعها الاحصائى للاختبار ليست فروضا منبثقة من نظريات او طرق احصائية وانما هى فروض مبنيه على نظريات فى علوم اخرى ويراد التحقق منها ٠

نبدأ اولا بالتفرقة بين نوعين من الاخطاء الممكن ارتكابها عند اختبار احد الفروض احصائيا :

الخطأ من النوع الاول : وهو الخطأ الناتج من رفض افتراض صحيح

الخطأ من النوع الثانى : وهو الخطأ الناتج من عدم رفض افتراض غير صحيح

والطريقة المثالية لاختبارات الفروض هى الطريقة التى تحقق اصفر احتمال لارتكاب الخطأين مجتمعين حيث انه من الواضح ان تفادى احد الخطأين كلية سيؤدى الى ارتكاب الخطأ الاخر بصفة مستمرة ٠

خطوات البحث العلمـــى:

١ـ جمع البيانات : اول خطوة يقوم بها الباحث بعد اختيار المشكلة هى جمع البيانات التى يـــرى انها مهمة لبحث هذه المشكلة ٠ فاذا كانت المشكلة مثلا هى تحديد حجم استهلاك السجائـــر (الطلب على السجائر) فان الباحث يبدأ بجمع البيانات التى يرى انها تؤثر فى الطلب على السجائر مثال ذلك اسعار السجائر واستهلاك السجائر واسعار الطباق والسيجار (سلع بديلة) والدخـــل الخ ٠٠ ويتوقف اختيار البيانات على تقدير القائم بالبحث وطبيعة المشكلة ٠

٢ـ وضع الافتراضـات : نظرا للتعقد الشديد فى العلاقات الاقتصادية فانه من المستحيل عمليا الوصول الى تفسير كامل لاسباب جميع التغيرات الاقتصادية لذلك يقوم الباحث بتبسيط العلاقات الاقتصادية وذلك بوضع افتراضات معينه تقصر مجال البحث فى حدود المعقول ٠ ويلاحظ انه بدون وضع هـــذه الافتراضات فلن يمكن القيام باى نوع من الابحاث خاصة فى المجال الاقتصادى مثال ذلك هو اننـــا حددنا العوامل التى تؤثر فى الطلب على السجائر فى :

١ـ اسعار الســـــجائر ٢ـ استهلاك الســـــجائر

٣ـ اسعار الطباق والسيجار ٤ـ الدخــــــل

وتجاهلنا عوامل اخرى مفترضين عدم اهميتها فى تحديد حجم الطلب على السجائر ٠ اسعـــار الملابس مثلا لا ندخلها فى الاعتبار عند تحديد الطلب على السجائر رغم انها قد تؤثر تأثيرا طفيفـــا على الطلـــب على الســـــجائر ٠

ويلاحظ ان وضع الفروض يجب ان يعتمد على منطق سليم والا يكون مجرد تبسيط غير مبني على اســـاس ٠

٣ــ الاستقراء التنبوئ Deduction of Prediction: الاستقراء التنبوئ لا يعني التنبوء بالمعـــنى المعروف به وهو تقدير لقيمة ما في المستقبل حيث ان التنبوء بهذا المعنى ماهو الا احد مكونـــات الاستقراء التنبوئ ٠ ويقصد بالاستقراء التنبوئ معرفة شئ غير معروف بالتحديد بغض النظـــر عن المدة التي يتم عنها هذا الاستقراء ٠ فاذا قام احد علماء الاثار بتحديد عدد العمـــال الذين قاموا ببناء الهرم الاكبر بحوالي ٤٠٠٠٠٠ عامل اذا تم بنائه في خلال سنة فهذا استقـــراء تنبوئ رغم انه لا يخص المستقبل ٠ بعد ذلك اذا ثبت من القراءات الهيروغليفيه ان عدد العمال الذين اشتركو في بناء الهرم الاكبر كان ٢٠٠٠٠ عامل واستغرقوا مدة ٢٠ سنة في بنائه فان هـذا يؤكد صحة الاستقراء التنبوئ الذي سبق هذه الاكتشافات ٠ وكمثال في المجال الاقتصادي فـأن البحث في اسباب زيادة الاستهلاك في الفترة من سنة ١٩٦٠ الى الوقت الحالي او في اســـباب الارتفاع الملموس في معدل تزايد السكان في الفترة من ١٩٥٧ الى ١٩٦٥ هو استقراء تنبوئ رغـم انه يخص تفسير ظواهر معينه في فترات سابقة ٠

٤ــ الاستنتاج الاحصائي واختبارات الفروض : والخطوة الرابعة والاخيرة من خطوات البحث العلمي هي اختبار مدى سلامة الاستقراء التنبوئ ٠ فاذا ظهر أن الملاحظة الواقعية تختلف عن نتائـج الاستقراء فان هذا يجعلنا نرفض الافتراضات الموضوعه ويمكن وضع عدة افتراضات ثم اختبارهـا كلها لاختيار الاكثر صلاحية منها اى الذي يفسر العلاقات الاقتصادية تفسيرا اكثر دقة وفي حالـة تساوي صلاحية الافتراضات المختلفة الموضوعه فأنه عادة مايتم الاختيار على اساس تفضيل ابسطها واقلهـــا تعقيـــدا ٠

(المتغيرات والـــدوال)

لقد رأينا فى المقدمة ان علم الاقتصاد القياسى ذو شقين :

أولا : صياغة التفسيرات النظرية للظواهر الاقتصادية فى صورة رياضية ٠

ثانيا : اخضاع المعادلات الرياضية التى تصف ظواهر اقتصادية معينة للتحليل الاحصائى ٠

وفى هذا الجزء نهتم بدراسة الشق الاول للاقتصاد القياسى ٠ اى ان الهدف الان هو تفسير كيفية صياغة العلاقات الاقتصادية فى صورة رياضية ٠

المتغـــــيرات

الخطوة الاولى لدراسة كيفية صياغة العلاقات الاقتصادية فى صورة رياضيةهو دراسة المكونات الرياضية للمعادلات التى تصف هذه العلاقات ٠ واهم هذه المكونات هى المتغيرات ٠

يمكن تعريف "المتغير" بأنه مقدار غير محدد بالتخصيص ٠ هو مقدار متغير بمعنى أنه يأخذ اى قيمة من مجموعة الاعداد الحقيقية ويرمز له دائما بأحد الحروف الابجدية مثل س و ص و ع ٠ ولزيادة التوضيح نفرض ان المتغير المطلوب دراسته رمزنا له بالرمز س وان س قد تأخذ اى من الاعداد الموجبه مابين صفر ومليون مثل صفر و ½ و ١ و ٢ و $\frac{١}{٨}$ و ١٥ و ٢٧ و ١٠٠٠ هى قيم لـ س ٠ ويطلق على الاعداد الخاصة التى يمكن ان يأخذها المتغير " قيم المتغير " اما مجموعة الاعداد الحقيقية التى تشمل جميع القيم المحتمل ان يأخذها المتغير فيطلق عليها " مدى المتغير " وقد يكون المتغير مستمرا Continuous Variable او منفصلا (غير مستمر) Discrete Variable ٠ ويكون المتغير مستمرا اذا كان مداه جميع الاعداد الحقيقية او اى جزء منها ٠ ومعنى ذلك انه يمكن ترتيب قيم المتغير المستمر بحيث يكون عددها لانهائى ولا يفصل اى قيمة والقيمة التاليه لها اى فجوة عددية ٠ اما المتغيرات الغير مستمرة او المنفصلة فان مداها ليس جميع الاعداد الحقيقية ولا اى جزء منها ٠ ومعنى ذلك انه لايمكن ترتيب قيمة المتغير المنفصل بدون ظهور فجوات عددية ٠

الـــــدوال

لنفرض ان لدينا متغيرين س و ص وان ϕ ترمز لعلاقة مابين س و ص ٠ اذن يمكن القول ان ϕ (س و ص) تعنى ان س و ص تحققان هذه العلاقة وقد اشتقت الدوال من فكرة العلاقات بين المتغيرات ٠ فالدوال هى تمثيل رياضى للعلاقة بين متغيرين ٠ ويقال ان المتغير ص هو دالة المتغير س اذا كانت قيمة المتغير ص تعتمد على قيمة المتغير س بمعنى انه بتثبيت قيمة محددة

المتغير ص • ويطلق على المتغير س الذى تفترض قيمته "بالمتغير المستقل" اما المتغير ص الذى تتوقف قيمته على القيمة المفترضه للمتغير س فيطلق عليه "المتغير **التابع**" •

واذا اردنا ان نعبر رياضيا عن ان ص هى دالة س بدون تحديد نوع او طبيعة او شكل العلاقة بين هذين المتغيرين فاننا نكتبها فى الصورة :

ص = $\varnothing$ (س) وهذا يعنى ان ص تعتمد على س بعلاقة غير منصوص عليها • وكمثال لاستخدام الدوال فى التعبير عن علاقات اقتصادية معينة فانه يمكن التعبير مثلا عن علاقة الطلب (ط) والسعر (س) فى الصورة الرياضية ط = $\varnothing$ (س) • اى ان الطلب يتوقف على السعر • فاذا تغير السعر فان الكمية المطلوبة سوف تتغير **ايضا طبقا العلاقة مابين السعر والطلب** • وكذلك يمكن تصوير العلاقة بين الاستهلاك (ك) والدخل (ى) فى الصورة الرياضية ك = $\varnothing$ (ى) بمعنى ان قيمة الانفاق الاستهلاكى تتوقف على مستوى الدخل الاهلى • فاذا تغير مستوى الدخل الاهلى فان الاستهلاك سوف يتغير ايضا طبقا لعلاقة مابين الاستهلاك والدخل •

وعند وضع علاقة اقتصادية معينه فى صورة رياضية فانه عادة ماتكون صورة هذه العلاقة الاقتصادية اكثر من مجرد بيان ان المتغير التابع يتوقف على المتغير المستقل بحيث تمثل العلاقة الرياضية الطريقة التى يتأثر بها المتغير التابع ويكون ذلك فى صورة معادلة • فالمعادلة ص = أ + ب س — حيث س تمثل المتغير المستقل وص تمثل المتغير التابع والمعاملات أ و ب يمثلات قيم ثابته تعنى ان اى تغير فى المتغير المستقل س يوءثر على المتغير التابع ص بدرجة تتوقف على قيمة المعامل ب • اما اذا كانت قيمة المتغير المستقل س = صفرا فان قيمة المتغير التابع ص = أ • فاذا كانت ص = ٦ + ٣ س فان :

ص = ٦	عندما تكون		س = صــــفرا
ص = ٩	"	"	س = ١
ص = ١٢	"	"	س = ٢
ص = ١٥	"	"	س = ٣

وهكـــــذا •

والدالة فى المثال السابق تسمى " دالة صريحة " Explicit Function لانها تعبر عن الافتراض الصريح بأن قيمة المتغير ص تتوقف على قيمة المتغير س ، ولكن هذا الافتراض لايجوز اعادة تفسيره بأن قيمة المتغير س تتوقف على قيمة المتغير ص • وقد تكون المعادلة فى صورة " دالة ضمنية " Implicit Function

عندما لا تحدد العلاقة اى من المتغيرين تتوقف قيمته على الاخر ، اى انها لا تحدد صراحة اى المتغيرات مستقلة وايها تابعة . وفيما يلى صورة لاحدى الدوال الضمنيه :

$$\varnothing$$ (س، ص) = ٦س + ٣ ص ـ ١٢ = صفرا

فيمكن حل هذه المعادلة بالنسبة لقيمة ص اى باعتبار ص متغيرا تابعا و س متغيرا مستقلا :

ص = $\varnothing_1$ (س) = ٤ ـ ٢ س

كما يمكن حل هذه المعادلة بالنسبة لقيمة س اى باعتبار س متغيرا تابعا و ص متغيرا مستقلا

س = $\varnothing_2$ (ص) = ٢ ـ ½ ص

اى انه يمكن اعادة تصوير الدالة الضمنيه فى عدة صور لدوال صريحة . وتسمى كل من $\varnothing_1$ و $\varnothing_2$ "بالدالة العكسية" للاخرى ، اى ان $\varnothing_1$ هى الدالة العكسية increase function للدالة $\varnothing_2$

وكذلك $\varnothing_2$ هى الدالة العكسية للدالة $\varnothing_1$.

ومن امثل الدوال العكسية :

اذا كانت ص = س٢ فان س = $\sqrt{\text{ص}}$

اذا كانت ص = لو س فان س = ١٠ ص وهكذا .

ويمكن تعريف "الدالة واحدة القيم" بانها دالة صريحة اذا افترضت قيمة ما للمتغير المستقل فانه تتحدد قيمة واحدة فقط للمتغير التابع . اما الدالة متعددة القيم فهى دالة صريحة اذا افترضت قيمة ما للمتغير المستقل فانه تتحدد اكثر من قيمة واحدة للمتغير التابع . مثال ذلك الدالة ص = $\sqrt{\text{س}}$ فاذا حددنا قيمة المتغير المستقل س = ١٦ فان قيمة المتغير التابع ص = ± ٤ .

واذا كانت قيمة المتغير التابع ص تزيد عندما تزيد قيمة المتغير المستقل س فاننا نقول ان ص "دالة متزايده" لـ س . اما اذا كانت قيمة المتغير التابع ص تنقص عندما تزيد قيمة المتغير المستقل س فاننا نقول ان ص "دالة متناقصة" لـ س .

الدوال ذات المتغير الواحد :

الدالة ص = $\varnothing$ (س) تعنى ان قيمة المتغير التابع ص تتوقف على قيمة المتغير المستقل س . وهى تسمى "دالة ذات متغير واحد" نظرا لان قيمة المتغير التابع تتحدد بالنسبة لقيمة متغير مستقل واحد . وفيما يلى بعض الامثلة للدوال ذات المتغير الواحد .

(١) الدوال الخطية linear functions : الدالة الخطية هى الدالة التى لايظهر فيها المتغير المستقل فى قوة اكبر من واحد . وكثيرا مايطلق على الدوال الخطية الدوال من الدرجة الاولى " . والدوال الاتية كلها دوال خطية :ـ

ص = س   ص = ٢ ـ س   ص = ٤ + ٣ س

ص = أ + ب س   (الصورة العامه للدالة الخطية)

(٢) الدوال التربيعية Quadratic Functions : وهى الدوال التى يظهر فيها المتغير المستقل فى قوة تربيعية (من الدرجة الثانية) . وقد يظهر المتغير المستقل فى اكثر من قوة الا ان اعلى قوة له لا تتعدى القوة الثانية . والدوال الاتية كلها دوال من الدرجة الثانية (دوال تربيعية)

ص = س^{٢} ص = ١٠ + ٣ س^{٢} ص = ٢ ـ ٣ س + ٤ ص^{٢}

ص = أ + ب س + حـ س^{٢} (الصورة العامه للدالة التربيعية)

(٣) الدوال التكعيبية وذوات القوى الاكبر : باتابع نفس تعريف الدالة الخطية والدالة التربيعية يمكن ان نضع الصورة العامة للدالة التكعيبيه كما يلى :

ص = أ + ب س + حـ س^{٢} + هـ س^{٢}

وهكذا يمكن ايجاد دوال ذات متغير واحد من الدرجة الرابعة او الخامسة ... الخ .

(٤) بعض الدوال الاخرى : فيما يلى امثلة لبعض الدوال الاخرى التى قد تهمنا فى دراسة الاقتصاد القياسى :

نوع الدالة	امثلة
الدالة اللوغاريتمية logarithmic function	ص = ٦ + ٤ لـو س ص = لو (س^{٢} ـ ٣) ص = لـو ٢ س
الدالة الاسية Exponential function	ص = ٢^{س} ص = ١٠$^{س ـ ١}$ ص = ٣ ـ ٤^{س}
الدالة الزائدية hyperbolic function	ص = $\frac{٢}{س}$ ص = ٣ ـ $\frac{٨٦}{س}$ ص = $\sqrt{٢ س^{٢} ـ ٩}$

الدوال ذات المتغيرات المتعـــددة :

رأينا ان الدالة الضمنيه التى تشمل متغيرين يمكن ان يعاد تصويرها بدالتين صريحتين كل منهما داله ذات متغير واحد ٠ اما اذا كانت لدينا دالة ضمنيه تشمل اكثر متغيرين فأنه يمكن ان يعاد تصويرها بدوال صريحة كل منها دالة ذات متغيرات متعددة ٠ مثال ذلك الدالة الضمنية :

٣ س + ٢ ص ـ ٤ ع + ١٢ = صـــفر

التى يمكن اعادة تصويرها فى ثلاث دوال صريحة كما يلـــى :

(١) ع = ٣ + ٧٥ر س + ٥ر ص

(٢) ص = ـ ٦ ـ ٥ر١ س + ٢ ع

(٣) س = ـ ٤ ـ ٦٧ر ص + ٣٣ر١ ع

واذا كانت الدالة الضمنية تشتمل على ن من المتغيرات فانه يمكن اعادة تصويرها فى ن دالـــة صريحة كل منها ذات ن ـ ١ من المتغيرات المستقلة ٠

وفيما يلى بعض الامثلة للدوال ذات المتغيرات المتعددة :

ق = ٢ + س ـ ٣ ص + ٢٤ ع	دالة خطيـــه
ق = (س ص ع)^{٢} + ٤	دالة تربيعية
ق = ٧ ـ ص^{٢} ـ ٩ س ع	دالة تربيعية
ق = ١ + لو (س ص ع)	دالة لوغاريتمية
ق = ٥ + س^{٣} ص^{٢} + ع	دالة تكعيبيـــة
ق = ٢^{س} + ٦^{ص} + ٨ ع	دالة اســـية

(استخدامات الدوال الرياضية فى التعبير الاقتصادى)

أولا : دوال الطلـــب

يمكن التعبير عن الطلب على سلعة معينة فى صورة دالة رياضية لعدة متغيرات فاذا افترضنا ثبات جميع العوامل المؤثرة فى الطلب على سلعة معينة (ط) فيما عدا سعر هذه السلعة (س) فانه يمكن التعبير عن الطلب على هذه السلعة فى الصورة ط = Ø (س) • وهذه الدالة هــى تعبير رياضى عن منحنى الطلب على السلعة • وفيما يلى بعض الامثلة لدوال الطلب على السلع

ط = ١٠٠ ــ ١٠ س	خطيـــه
ط = ١٠٠ / س	زائديـــه
ط = ١٠٠ ــ ٢ س^ــ ٤	اســيه

واذا افترضنا ان المتغيرات المستقلة التى تؤثر فى حجم الطلب على سلعة معينة هــى السعر (س) والدخل (ى) فان دالة الطلب (ط) قد تظهر فى الصورة التالية :

ط = ــ ١٠ س + ٥ ى

ويجد ملاحظة ان معاملات المتغيرات المستقلة فى دالة الطلب تشرح مرونة الطلـــب بالنسبة لهذه المتغيرات •

المثـــال الاول :

قام هنرى شـــلتز Henry Schultz بتقدير دالة الطلب على القمح فى الويالات المتحـــدة فى عام ١٩٣٨ عن المدة ١٩٢١ ــ ١٩٣٤ واستخدام المتغيرات المستقلة التاليـــة :

(١) اسعار القمح بأسعار سنة ١٩١٣ (س)

(٢) الزمـــن (م) = حيث استخدم سنة الاساس ١٩٢٨ •

وقد قام شلتز بتقدير دالة الاستهلاك مستخدما الارتباط المتعدد بطريقة المربعات الصغرى ووصـــل الى المعادلة التاليـــــة :

لو ط = ١ر٨٠٢ ــ ٢١٤٣ ر لو س ــ ٠٠٣٥٨ ر م ــ ٠٠١٦٣ ر م٢ وترمـــز

ــ (٠٠٣٥٨ ر م + ٠٠١٦٣ ر م٢) فى المعادلة الى تغير فى العادات الاستهلاكية بمرور الزمن •

ويلاحظ انه تبين ان معاملات م غير مادية وهذا يوضح ان الاذواق والعادات الاستهلاكيـــة بالنسبة للقمح لم تتغير ماديا بمرور الوقت • اما معامل س فهو مادى وذ اهمية كبيرة يمثـــل معامل س (ـ ٢١٤٣ر) مرونة الطلب على القمح (بفرض ثبات المؤثرات الاخرى) فـاذا زاد سعر القمح بمعدل ١٪ فان الطلب على القمح ينقص بمعدل ٢١٤٣ر ٪ وهذه النتيجة هامة جـدا خاصة بالنسبة لسياسة الحكومة تجاه الفـلاح • فان رفعت الحكومة سعر القمح ١٠٪ مثلا فـأن الطلب على القمح سوف ينقص عما كان عليه • ولكن هل سيستفيد الفلاح (وهو منتج القمح) مـن سياسة رفع السعر ام لا فهذا يظهر من الجدول التالـــى :

بفرض اختصـــار معادلة شـــلتز الى

لو ط = ٠٨ر١ ـ ٢١ر لـــو س

س	لو س	لو ط	ط	س ط
١٠٠	٠٠٠ر٢	٦٦ر	٥٨ر٤	٤٥٨
١١٠	٠٤١٣٩ر٢	٦٥ر	٤٧ر٤	٤٩٢
+ ١٠			ـ ١١ر	+ ٣٤
+ ١٠٪			ـ ٤ر٢٪	+ ٤ر٧ ٪

اى انه اذا ارتفع سعر القمح بمعدل ١٠٪ فان دخل الفلاح من القمح يزيد بمعدل ٤ر٧٪.

المثـال الثانـــــى :

قام هنرى شلتز ايضا بدراسة العلاقة المتبادلة بين الطلب على اللحم البقرى ولحم الخنزير فى امريكا واستخدم فى هذه الدراسة المتغيرات الاتية :

(١) استهلاك اللحم البقرى بملايين الارطـــال ($ك_{ق}$)

(٢) سعر رطل اللحم البقرى بالسنتات (تجزئة) ($س_{ق}$)

(٣) سعر رطل لحم الخنزير بالسنتات ($س_{ح}$)

(٤) الدخل (مؤخر ٣ شهور) ١٩٢٣ ـ ١٩٢٥ = ١٠٠ (ى)

واستخدام بيانات عن السنوات من ١٩٢٢ — ١٩٣٣ وطبق على البيانات معـــادلات الارتباط المتعدد وطريقة المربعات الصغرى وكانت معادلة الانحدار كما يلى :

$$ك_ق = ٣٫٤٨٩٢ — ٠٫٨٩٩ س_ق + ٠٫٦٣٧ س_ح + ٠٫١٨٧ ى$$

وباستخدام المتوسطات للفترة ١٩٢٢ — ١٩٣٣ استخرج شلتز معاملات المرونة التالية

(١) مرونة الطلب على اللحم البقرى بالنسبة لسعر اللحم البقرى — ٠٫٤٩ بمعنى انه لو ارتفع سعر اللحم البقرى ١% فان الطلب على اللحم البقرى سينقضى بمعدل ٠٫٤٩% .

(٢) مرونة الطلب على اللحم البقرى بالنسبة لسعر لحم الخنزير + ٠٫٤٦ ويطلق على هذا النوع من المرونة " المرونة المتداخلة " cross-elasticity وتبين المرونة بين السلع البديلة . وهذا يعنى انه اذا ارتفع سعر لحم الخنزير بمعدل ١% فان الطلب على اللحم البقرى سيزيد بمعدل ٠٫٤٦% .

(٣) مرونة الطلب على اللحم البقرى بالنسبة للدخل + ٠٫٣٦ بمعنى انه اذا ارتفع الدخل بمعدل ١% يزيد الطلب على اللحم البقرى بمعدل ٠٫٣٦% .

المثـــال الثالـــث :

قام هويتمان R.H. Whitman بتحليل الطلب على الصلب واستخدام المتغيرات التاليه :

(١) الرقم القياسى لمبيعات الصلب ط

(٢) سعر رطل الصلب بالسنتات (معدلة حول خط الاتجاه) س

(٣) $\frac{د س}{د م}$ معدل التغير فى سعر الصلب بالنسبة للزمـــن

(٤) الـــــزمن م

(٥) الرقم القياسى للانتاج الصناعى ص

وباستخدام معادلات الانحدار المتعدد وطريقة المربعات الصغرى توصل هويتمان الى معادلـــة الانحـــدار الاتيـــة :

$$ط = ١٫٤٩ — ١٫٢٧ س + ٦٫٢٧ \frac{د س}{د م} + ٤٫٦٤ ص — ٠٫٣ م$$

وجميع هذه المعاملات فيما عدا الاخير منها مادية . واهم ما هو جديد فى هذه المعادلة هو معامل $\frac{د س}{د م}$. هذا المعامل ٦٫٢٧ كبير بالنسبة للمعاملات الاخرى وهذا يوضح ان الطلب على الصلب

يتأثر كثيرا بالتوقعات فاذا كان معدل التغير فى سعر الصلب بالزيادة فان مستهلكى الصلب يتوقعون استمرار هذا المعدل فى الارتفاع وبالتالى يرفعون من مشترياتهم من الصلب لكى يحققوا ارباحا من فروق الاسعار ، أما فى حالة ما اذا كان معدل التغير فى سعر الصلب متناقصا فأن مستهلكى الصلب يميلون الى تقليل مشترياتهم من الصلب توقعا منهم باستمرار الانخفاض فى اسعاره ٠

ثانيا : دوال العرض

يمكن التعبير عن عرض سلعة معينة س صورة داله رياضية لعدة متغيرات فاذا افترضنا ثبات جميع العوامل المؤثره فى عرض سلعة معينة (ع) فيما عدا اسعار هذه السلعة (س) فانه يمكن التعبير عن عرض السلعة فى صورة : $ع = \emptyset(س)$ ٠

وهذه الدالة هى تعبير رياضى عن منحنى عرض هذه السلعة ٠ وفيما يلى بعض الامثلة لدوال العرض

$ع = -٢٠ + ١٠ س$	خطيه
$ع = ٢٠ س^{١/٢}$	لوغاريتميه
$ع = ١٠ + ٢ س$	أسيه

مثال : قام هنرى شلتز بدراسة لمنحنى عرض السكر فى السوق العالمى ٠ وقد استخدم شلتز فى هذا التحليل مناسيب السلسلة وهى مناسيب الاسعار والكميات لكل فترة زمنية بالنسبة للفترة السابقة لها وقد استخدم شلتز المتغيرات التالية :

(١) اسعار الجملة فى سوق نيويورك س ٠ وقد استخدم انحرافات الاسعار عن خط اتجاه تكعيبى ثم استخرج مناسيب هذه الانحرافات فى كل سنة عن السنة السابقة لها ٠

(٢) انتاج السكر العالمى ع ٠ وقد استخدم انحرافات انتاج السكر عن خط اتجاه تكعيبى ثم استخرج مناسيب هذه الانحرافات فى كل سنة عن السنة السابقة لها ٠

ونلاحظ ما يلى :

(١) قام شلتز باستخدام بيانات سنوية

(٢) استخدم سلتز المدة ١٩٠٣ — ١٩١٤

(٣) استخدم شلتز تأخر زمنى قدره عام واحد ٠ اى انه افترض ان انتاج عام ما يتأثر باسعار السوق فى العام السابق له ٠

وقد توصل شلتز باستخدام الارتباط المتعدد وطريقة المربعات الصغرى الى المعادلة التالية :

س = ٦٧٨٨ر ١ ع ـ ٧٥١ ر

وباستخدام المتوسطات للفترة ١٩٠٣ ـ ١٩١٤ استخرج شلتز معامل مرونة عرض السكر وهو ٥٧ ر٠ اى انه اذا ارتفع سعر السكر فى عام ما بمعدل ١٪ فان عرض السكر فى العام التالى له سيرتفع بمعدل ٥٧ ر٪ وذلك طبقا بافتراض ثبات العوامل الاخرى ٠

ثالثا : دوال التكاليف

عندما تكلمنا عن دوال الطلب ودوال العرض كنا نبحث عن علاقات السوق ٠ اما عند الكلام عن دالة التكاليف فاننا نبحث فى علاقة داخلية بالنسبة للمشروع الفردى ٠ فاذا اخذنا

س = كمية الانتاج من سلعة معينة

ك = تكاليف انتاج الكمية س من السلعة

اذن يمكن التعبير عن علاقة التكاليف بكمية الانتاج بالدالة الضمنية

Ø(س،ك) = صفر

واذا اردنا استخراج علاقة متوسط تكلفة الوحدة من الانتاج (ك‾) بكمية الانتاج

ر = ك / س = Ø(س) / س = Ø (س)

وكأمثلة لدوال التكاليف :

ك = ١٠ + ١٠ س ـ ٤ س٢ + س٣ (دالة التكلفة الكلية)

ك‾ = ك / س = ١٠ / س + ١٠ ـ ٤ س + س (دالة متوسط التكلفة)

مثال

قام جول دين Joel Dean بحساب دالة التكلفة الكلية لمصنع شرابات مستخدما البيانات الشهرية عن التكلفة (ك) والانتاج (س) خلال مدة الخمس سنوات ١٩٣٥ ـ ١٩٣٩ ٠ ووصل مستخدما الارتباط البسيط والمربعات الصغرى الى المعادلة :

ك = ٥٩ر٢٩٣٥ + ٩٩٨ر١ س

وهذا يعنى ان زيادة الانتاج بوحدة واحدة (الوحدة فى هذا المثال تساوى دستة شرابات) يرفع تكلفة الانتاج الكلية بمقدار ٩٩٨ر١ دولارا ٠

هذا وقد استخرج جول دين ايضا دالة التكلفة باستخدام دوال من الدرجة الثانية ومن الدرجة الثالثة الا ان الخطأ المعيارى للدالة من الدرجة الاولى كان اقل كثيرا من الخطأ المعيارى للدالتين من الدرجة الثانية والدرجة الثالثة .

وقد كان الخطأ المعيارى لمعامل الانحدار (١٫٩٩٨) يساوى ٠٫٠٣٤ ونظرا لان درجات الحرية كانت كبيرة (٥٨) فانه يمكن استخدام التوزيع الطبيعى لتحديد حدود الثقة عند المستوى ٩٥٪ مساويا لـ ± ١٫٩٦ من الخطأ المعيارى . ومعنى ذلك ان رفع الانتاج بدستة شرابات واحدة يؤدى الى ارتفاع فى التكلفة يتراوح مابين :

الحد الادنى = ١٫٩٩٨ − ١٫٩٦ (٠٫٠٣٤) = ١٫٩٣١

الحد الاعلى = ١٫٩٩٨ + ١٫٩٦ (٠٫٠٣٤) = ٢٫٠٦٤

رابعا : دالة الانتـــاج

دالة الانتاج هو تمثيل رياضى للعلاقة بين المدخلات والمخرجات بالنسبة لوحدة انتاجية او مجموعة من الوحدات الانتاجية او حتى بالنسبة للنشاط الاقتصادى كله . فاذا افترضنا ان المدخلات (وهى مصادر الانتاج) هى رأس المال الانتاجى (ل) والقوة العاملة (م) فان دالة الانتاج (ج)

ج = Ø (ل و م)

فاذا كانت كمية رأس المال الانتاجى ثابته فى الامد القصير فان دالة الانتاج للامد القصير تكون : ج = Ø (م)

اما اذا كانت القوة العاملة ثابتة فى الامد القصير فان دالة الانتاج للامد القصير تكون :

ج = Ø (ل)

مثـــال :

استخدم بول دوجلاس Paul Douglas البيانات السنوية عن الفترة ١٩٠٠ – ١٩٢٢ عن :

(١) ج – الانتاج : الرقم القياسى للانتاج الصناعى .

(٢) م – العمالة : الرقم القياسى للقوة العاملة فى الصناعة .

(٣) ل – رأس المال : الرقم القياسى للاصول الانتاجية فى الصناعـــة .

وقد استخدم دوجلاس جميع الارقام القياسية متخذا سنة الاساس ١٨٩٩ = ١٠٠ وبتطبيق طريقة الارتباط المتعدد توصل دوجلاس الى المعادلة التاليـــــة :

ج = ١٫٠١ م ٧٥ر ل ٢٥ر

ويلاحظ ان دوجلاس افترض ان مجموع معاملات المتغيرات المستقلة (مرونات الانتاج بالنسبة للمتغيرات المستقلة) يساوى واحد • هذا ليس ضروريا الا ان مجموع هذه المعاملات يكون عادة قريبا جدا من ١٠

ويمكن وضع المعادلة السابقة فى الصورة :

لوج = لـو ١٫٠١ + ٧٥ر لـوم + ٢٥ ر لـو ل

أذا افترضنا زيادة العمالة فى قطاع الصناعة بمعدل ١٪ فان الانتاج الصناعى يزيد بنسبة ٧٥ر٪ اما اذا افترضنا زيادة الاصول الانتاجية فى قطاع الصناعة بمعدل ١٪ فان الانتاج الصناعى يزيد بنسبة ٢٥ر٪ •

خامسا : بعض الـدوال الاخرى

دالـة الاســـتهلاك :

هذه الدالة هى تفسير رياضى لجزء من نظرية الدخل الاهلى • فالاستهلاك (مجموع الانفاق الاستهلاكى او مجموع الانتاج من السلع والخدمات الاستهلاكية) يتوقف على الدخل المتاح • والدخل المتاح (او الدخل الممكن التصرف فيه) هو الدخل الصافى بعد طرح الضرائب المحصلة من الحكومة •

فاذا رمزنا للدخل الاهلى بالرمز ى ، وللضرائب بالرمز ض وللاستهلاك بالرمز ك فانه يمكن صياغة ماسبق فى الصورة التاليـــــة :

ك = $\emptyset$ (ى و ض)

أو ك = أ + ك (ى ـ ض)

وتسمى ك بالميل الحدى للاستهلاك اى الزيادة فى الاستهلاك الناتجه عن زيادة طفيفه فى الدخل المتاح •

فاذا كان ك = ١٦ + ٨ر (ى ـ ض)

فاذا زاد (ى ـ ض) وحدة واحدة زاد الاستهلاك ٨ر من الوحدة • وقد تأخذ دالة الاستهلاك صورا اخرى او عددا اكبر من المتغيرات فمن الممكن مثلا تصوير دالة الاستهلاك كما يلـى :

ك = $\emptyset$ (ى • ض • ف • ق) حيث ف تمثل سعر الفائدة الجارى ، ق تمثل قيمة مايمتلكـــه المستهلكين من سلع استهلاكية معمـــرة •

دالة التفضيل النقدى :

يطلق الاقتصاديون على الطلب على النقود " التفضيل النقدى" ويعوز الاقتصاديون الطلب على النقود الى دوافع ثلاث .

١ـ دافع الاحتياط .

٢ـ دافع المضاربة .

٣ـ دافع المعاملة .

ويتوقف الطلب على النقود لفرص المضاربة على سعر الفائدة الجارى وبفرض ثبات الدخل (وهو العامل المؤثر فى كمية الطلب بدافعى الاحتياط والمعاملة) فان الطلب على النقود او التفضيل النقدى ن يمكن ان يصور رياضيا بالدالة : ن = ϕ (ف) حيث ف تمثل سعر الفائدة

دوال الدورات ودوال الاتجاه :

وتستعمل " دالة الدورات " لقياس الموسمية فى سلسلة زمنية معينة . ولقياس التغيرات الموسمية فى انتاج الزبده مثلا . نجد ان معادلة انتاج الزبدة .

$$ج = ١٣٠ - ٤٠ جتا \frac{ط م}{٦} - ٦ جا \frac{ط م}{٦}$$

حيث ج = الانتاج الشهرى للزبدة .

وم = الزمن بالاشهر .

وط = $\frac{٢٢}{٧}$ وهى النسبة التقريبيه المعروفة فى هندسة الدوائر . اما اذا كانت العلاقة الزمنية للسلسله هى علاقة اتجاه السلسله اتجاها معينا مع مرور الزمن فتسمى الدالة التى تصور هذه العلاقة بدالة الاتجاه .

وقد تتخذ دالة الاتجاه صورة الخط المستقيم :

$$س = ١٣٠ + ٤ م$$

وهذا يعنى ان مقدار التغير بين كل وحدة زمنيه والوحدة التاليه لها يبقى ثابتا دائما .

اما اذا كانت نسبة التغير بين كل وحدة زمنية والوحدة السابقة لها دائما ثابت كان دالة الاتجاه قد تأخذ الشـــــكل :

$$س = أ^{م}$$

ونظرا لان الدالة اللوغاريتمية هى معكوس الدالة الاســية فانه يمكن كتابة المعادلة السابقـــه فى الصـــورة :

$$م = لو_{أ} س$$

وهناك صورة ثالثة ولكنها هامه جدا فى بعض الدراسات الخاصة بالسكان او تنمية الثروة الحيوانيـــه او دراسة الطلب على سلعه معينه عند فترات التشبع او دراسة عرض سلعه معينه عندما يصبح احد عوامـــل الانتاج ثابت القيمة . ففى هذه الحالات تستخدم دالة لوجيستيه logistic فى الصورة التاليـــة :

$$س = \frac{أ}{1 + ب e^{-جـ م}}$$

حيث س تمثل السكان (او اى متغير اخر)

م تمثل الزمـــن

e تمثل الاساس فى اللوغاريتمات الطبيعية . وهى تساوى ٢٫٧١٨٢٨ و أ و ب و جـ مقادير ثابتـــه (معاملات) .

أ / م

النمـاذج

Models

(١) يتحدد السعر فى السوق عند ذلك المستوى الذى تتساوى فيه الكمية المطلوبة والكمية المعروضه عند هذا السعر ، ويسمى هذا السعر بسعر توازن السوق .

(٢) يتحدد كمية الانتاج فى المشروع عند ذلك المستوى الذى تتساوى فيه التكلفة الحديه والايـراد الحدى . وتسمى هذه الكمية بالانتاج التوازنى للمشروع .

(٣) يتحدد سعر الفائدة عند هذا المستوى الذى تتساوى فيه كمية النقود المعروضه مع كمية الطلب على النقود . وهكذا فى التحليل الاقتصادى نجابه مشكلة التوازن Equilibrium

ولا يمكن تمثيل التوازن الاقتصادى رياضيا باستخدام دالة واحدة أو معادلة واحدة اذ لابد من استخدام دالتين او أكثر للوصول الى الحجم التوازنى المطلوب أو نقط التوازن . وفيما يلى بعض الأمثلة لنماذج توازن السوق .

نماذج مكونة من معادلتين خطيتين :

لنفرض المعادلتين الآتيتين :ـ

$$٤ س + ٦ ص = ١٦$$
$$٢ س + ص = ٢$$

فيمكن حل هاتين المعادلتين بعدة طرق نذكر منها :

الطريقة الاولى :ـ ويمكن تسميتها بطريقة " الالغاء التناقصى " .

$$٤س + ٦ ص = ١٦ \quad (١)$$
$$٢ س + ص = ٢ \quad (٢)$$

الحـــل

بضرب طرف المعادله (٢) × ٢

$$٤ س + ٢ ص = ٤ \quad (٣)$$
$$٤ س + ٦ ص = ١٦ \quad (١)$$

$$٤ ص = ١٢ \qquad \text{بالطرح } (١) - (٣)$$

أذن ص = ٣

٢س + ٣ = ٢ بالتعويض فى (٢)

٢س = ـ ١

$$س = -\frac{١}{٢}$$

الطريقة الثانية : وهى باستخدام المحددات

وفيما يلى شرح للطريقة العامة لحل معادلتين انيتين باستخدام المحددات

أذا كانت لدينا المعادلتين التاليتين :

$$أ_{١١} س + أ_{٢١} ص = ل_{١}$$

$$أ_{١٢} س + أ_{٢٢} ص = ل_{٢}$$

فأننا نضع معاملات المجاهيل س ، ص وكذلك المقادير الثابته ل فى صورة المحددات التالية :

$$\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ل_{١} \\ ل_{٢} \end{vmatrix}$$

ونلاحظ أن العدد الاول يمثل معاملات المجهول الاول س وأن العدد الثانى يمثل معاملات المجهول الثانى ص وأن الطرف الأيسر من المعادلة يمثل المقدار الثابت ل

ولايجاد قيمة أى من المجهولين س و ص توجد أولا قيمة المقام م (المقام م مشترك بالنسبة لجميع المجاهيل)

$$م = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{vmatrix}$$

اما قيمة م س فأننا نوجدها بالغاء العدد الذى يمثل معاملات المجهول س واستبداله بالعدد الذى يمثل المقادير الثابته ل وكذلك لايجاد قيمة م ص فأننا نوجدها بالغاء العدد الذى يمثل معاملات المجهول ص واستبدالها بالعدد الذى يمثل المقادير الثابته ل .

$$\text{م}_{\text{س}} = \begin{vmatrix} \text{ل}_{١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{ل}_{٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{vmatrix}$$

$$\text{م}_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{ل}_{١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{ل}_{٢} \end{vmatrix}$$

ثم نقوم بحل المحددات بالطريقة العادية كما يلى

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ح} & \text{د} \end{vmatrix} = \text{أد} - \text{بح}$$

والآن تقوم بحل المعادلتين

$$٤\,\text{س} + ٦\,\text{ص} = ١٦$$

$$٢\,\text{س} + \text{ص} = ٢$$

بطريقة المحددات

$$\text{م} = \begin{vmatrix} ٤ & ٦ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٤ - ١٢ = -٨$$

$$\text{م}_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ١٦ & ٦ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ١٦ - ١٢ = ٤$$

$$\text{م}_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٤ & ١٦ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ٨ - ٣٢ = -٢٤$$

$$\text{س} = \frac{٤}{-٨} = -\frac{١}{٢}$$

$$\text{ص} = \frac{-٢٤}{-٨} = ٣$$

نماذج مكونه من أكثر من معادلتين خطيتين :

فيما يلى مثال لحل ثلاث معادلات خطية بكلتا طريقتى الالغاء التناقص والمحددات • ويجب ملاحظة انه يمكن حل أى عدد من المعادلات بكلتا الطريقتين الا أن طريقة الالغاء التناقصى تزيد تعقيدا كلما زادت عدد المعادلات المكونة للنموذج •

٤ س + ٦ ص ــ ٣ع = ١٦ (١)

٢ س ــ ٨ ص + ٧ع = ٢٢ (٢)

ــ س + ٣ ص + ع = ٥ (٣)

أولا : طريقة الالغاء التناقص :

نقوم أولا بالغاء قيم س باستخدام المعادلتين ١ ، ٢

٤ س + ٦ ص ــ ٣ع = ١٦ (المعادلة ١)

٤ س ــ ١٦ص + ١٤ع = ٤٤ (المعادلة ٢) × ٢

صفر ــ ٢٢ص + ١٧ع = ٢٨ (٤) بالطرح

ثم نقوم ثانيا بالغاء قيم س باستخدام المعادلتين ٢ ، ٣

٢ س ــ ٨ ص + ٧ ع = ٣٢ (المعادلة ٢)

٢ س ــ ٦ ص ــ ٢ ع = ــ١٠ (المعادلة ٣) × ــ ٢

صفر ٢ ص ــ ٩ ع = ــ٣٢ (٥) بالطرح

ثم نقوم ثالثا بحل معادلتين أنيتين (٤) و (٥) كما فى البند السابق

ــ ٢٢ص + ١٧ع = ٢٨ (معادلة ٤)

٢٢ص ــ ٩٩ع = ــ ٣٥٢ (معادلة ٥) × ١١

صفر ــ ٨٢ع = ــ ٣٢٤ بالجمع

اذن ع = $\frac{-\text{٣٢٤}}{-\text{٨٢}}$ = ٣ر٩٥ تقريبا

وبالتعويض عن قيمة ع فى المعادلة (٥)

٢ ص — ٩ (٣ر٩٥) = — ٣٢

٢ ص = — ٣٢ + ٣٥ر٥٥ = ٣ر٥٥

ص = ١ر٧٨ تقريبا

وبالتعويض فى المعادلة (٣) عن قيمتى ص و ع

— س + ٣ (١ر٧٨) + (٣ر٩٥) = ٥

— س = ٥ — ٥ر٣٤ — ٣ر٩٥ = — ٤ر٢٩

أذن س = ٤ر٢٩

ثانيا : طريقة المحددات :

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{١١}} & \text{أ}_{\text{٢١}} & \text{أ}_{\text{٣١}} \\ \text{أ}_{\text{١٢}} & \text{أ}_{\text{٢٢}} & \text{أ}_{\text{٣٢}} \\ \text{أ}_{\text{١٣}} & \text{أ}_{\text{٢٣}} & \text{أ}_{\text{٣٣}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ل}_{\text{١}} \\ \text{ل}_{\text{٢}} \\ \text{ل}_{\text{٣}} \end{vmatrix}$$

نجد أن المقام المشترك للمجاهيل الثلاثة م يساوى

$$\text{م} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{١١}} & \text{أ}_{\text{٢١}} & \text{أ}_{\text{٣١}} \\ \text{أ}_{\text{١٢}} & \text{أ}_{\text{٢٢}} & \text{أ}_{\text{٣٢}} \\ \text{أ}_{\text{١٣}} & \text{أ}_{\text{٢٣}} & \text{أ}_{\text{٣٣}} \end{vmatrix}$$

وبنفس الطريقة المتبعه فى البند السابق نجد أن :

$$\text{م}_{\text{س}} \begin{vmatrix} \text{ل}_{\text{١}} & \text{أ}_{\text{٢١}} & \text{أ}_{\text{٣١}} \\ \text{ل}_{\text{٢}} & \text{أ}_{\text{٢٢}} & \text{أ}_{\text{٣٢}} \\ \text{ل}_{\text{٣}} & \text{أ}_{\text{٢٣}} & \text{أ}_{\text{٣٣}} \end{vmatrix}$$

$$\text{م ص} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{ل}_{١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{ل}_{٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{ل}_{٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$$

$$\text{م ع} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{ل}_{١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{ل}_{٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{ل}_{٣} \end{vmatrix}$$

ولحل أى محددة من الدرجة الثالثة نتبع القانون

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ح} \\ \text{د} & \text{ه} & \text{و} \\ \text{ز} & \text{ح} & \text{ط} \end{vmatrix} = \text{أ} \begin{vmatrix} \text{ه} & \text{و} \\ \text{ح} & \text{ط} \end{vmatrix} - \text{ب} \begin{vmatrix} \text{د} & \text{و} \\ \text{ز} & \text{ط} \end{vmatrix} + \text{ح} \begin{vmatrix} \text{د} & \text{ه} \\ \text{ز} & \text{ح} \end{vmatrix}$$

$$\text{أو} = \text{أ} \begin{vmatrix} \text{ه} & \text{و} \\ \text{ح} & \text{ط} \end{vmatrix} - \text{د} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ح} \\ \text{ح} & \text{ط} \end{vmatrix} + \text{ز} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ح} \\ \text{ه} & \text{و} \end{vmatrix}$$

وهكذا باستخدام أى صنف أو أى عمود

والآن نقوم بحل المعالات الآتية الثلاث

$$٤\text{س} + ٦\text{ص} - ٣\text{ع} = ١٦$$
$$٢\text{س} - ٨\text{ص} + ٧\text{ع} = ٢٢$$
$$-\text{س} + ٣\text{ص} + \text{ع} = ٥$$

وذلك باستخدام المحددة

$$\begin{vmatrix} ٤ & ٦ & -٣ \\ ٢ & -٨ & ٧ \\ -١ & ٣ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١٦ \\ ٢٢ \\ ٥ \end{vmatrix}$$

$$م = \begin{vmatrix} ٤ & ٦ & -٣ \\ ٢ & -٨ & ٧ \\ -١ & ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٤ \begin{vmatrix} -٨ & ٧ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} - ٦ \begin{vmatrix} ٢ & ٧ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} ٢ & -٨ \\ -١ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= ٤ (-٨ - ٢١) - ٦ (٢ + ٧) - ٣ (٦ - ٨)$$

$$= -١٦٤$$

$$م_س = \begin{vmatrix} ١٦ & ٦ & -٣ \\ ٢٢ & -٨ & ٧ \\ ٥ & ٣ & ١ \end{vmatrix} = ١٦ \begin{vmatrix} -٨ & ٧ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} - ٦ \begin{vmatrix} ٢٢ & ٧ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} ٢٢ & -٨ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= ١٦ (-٨ - ٢١) - ٦ (٢٢ - ٣٥) - ٣ (٦٦ + ٤٠)$$

$$= -٧٠٤$$

$$م_ص = \begin{vmatrix} ٤ & ١٦ & -٣ \\ ٢ & ٢٢ & ٧ \\ -١ & ٥ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= ٤ \begin{vmatrix} ٢٢ & ٧ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} - ١٦ \begin{vmatrix} ٢ & ٧ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} ٢ & ٢٢ \\ -١ & ٥ \end{vmatrix}$$

$$= ٤ (٢٢ - ٣٥) - ١٦ (٢ + ٧) - ٣ (١٠ + ٢٢)$$

$$= -٢٩٢$$

$$م_ع = \begin{vmatrix} ٤ & ٤ & ١٦ \\ ٢ & -٨ & ٢٢ \\ ١ & ٣ & ٥ \end{vmatrix}$$

$$= ٤ \begin{vmatrix} -٨ & ٢٢ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} - ٦ \begin{vmatrix} ٢ & ٢٤ \\ -١ & ٥ \end{vmatrix} + ١٦ \begin{vmatrix} ٢ & -٨ \\ -١ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= ٤ (-٤٠ - ٦٦) - ٦ (١٠ + ٢٢) + ١٦ (٦ - ٨) = -٦٤٨$$

: ... -٧٠٤

$$\text{ص} = \frac{-\text{٢٩٢}}{-\text{١٦٤}} = \text{١ر٧٨}$$

$$\text{ع} = \frac{-\text{٦٤٨}}{-\text{١٦٤}} = \text{٣ر٩٥}$$

نماذج تشمل دوال تربيتيه :

اذا كانت لدينا المعادلتين التربيتين

$$\text{س}^{\text{٢}} - \text{٢ص} = \text{٢} \qquad (\text{١})$$

$$\text{س} + \text{٣ص} = \text{١} \qquad (\text{٢})$$

بضرب المعادلة الاولى فى ٣ والمعادلة الثانية فى ٢ نصل الى المعادلتين ٣ ، ٤

$$\text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٦ص} = \text{٦} \qquad (\text{٣})$$

$$\text{٢س} + \text{٦ص} = \text{٢} \qquad (\text{٤})$$

$$\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٢س} = \text{٨} \qquad (\text{٥}) \quad \text{بالجمع}$$

وباستخدام قانون حل معادلة من الدرجة الثانية ذات مجهول واحد

$$\text{أ س}^{\text{٢}} + \text{ب س} + \text{حـ} = \text{صفر}$$

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{\text{٢}} - \text{٤ أ حـ}}}{\text{٢أ}}$$

أذن توجد قيمة س

$$\text{س} = \frac{-\text{٢} \pm \sqrt{(\text{٢})^{\text{٢}} - (\text{٤})(\text{٣})(-\text{٨})}}{(\text{٢})(\text{٣})} = \frac{-\text{٢} \pm \text{١٠}}{\text{٦}}$$

$$\text{أذن س} = \frac{-\text{٢} + \text{١٠}}{\text{٦}} = \frac{\text{٨}}{\text{٦}} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}$$

$$\text{أو س} = \frac{-\text{٢} - \text{١٠}}{\text{٦}} = \frac{-\text{١٢}}{\text{٦}} = -\text{٢}$$

وبالتعويض فى المعادلة (٢)

أولا : اذا كانت قيمة س = $\frac{٤}{٣}$

$\frac{٤}{٣}$ + ٣ص = ١

٣ص = ١ ـ $\frac{٤}{٣}$ = ـ $\frac{١}{٣}$

ص = ـ $\frac{١}{٩}$

ثانيا : اذا كانت قيمة س = ـ ٢

ـ ٢ + ٣ص = ١

٣ص = ٣

ص = ١

(بعض الاستخدامات الاقتصادية)

(أولا)

توازن السوق

توازن سوق سلعة واحدة :ـ

لنفرض أن دالة الطلب على السلعة تأخذ الشكل التالى :ـ

ط = ٢٠٠٠ ـ ١٠٠ س

وأن دالة عرض السلعة تأخذ الشكل التالى

ع = ـ ١٠٠ + ٥٠ س

وسعر توازن السوق (فى الاقتصاد) هو ذلك السعر الذى عنده تتساوى الكميات المطلوبه من السلعة بالكميات المعروضة من السلعة . وفى المثال السابق يتحقق توازن السوق عندما ط = ع

أى عندما

٢٠٠٠ ـ ١٠٠ س = ـ ١٠٠ + ٥٠ س

٢١٠٠ = ١٥٠ س

أذن س = ١٤

أى أن سعر توازن السوق = ١٤

ويتحقق هذا التوازن عندما تكون الكمية المطلوبة من السلعة مساويا للكمية المعروضة منها مساويا لـ ٦٠٠ وحدة . وبمعنى آخر أن ٦٠٠ وحدة سوف يتم التعامل عليها فى السوق وسيكون سعر الوحدة ١٤ .

توازن اسواق مجموعه من السلع :

فى أحيان كثيرة يتوقف الطلب على سلعة ما على أسعار سلع أخرى بالاضافة الى سعر السلعة نفسها . وفى هذه الاحوال نجد أنه لابد من ايجاد اسعار توازن السوق بالنسبة لمجموعة من السلع فى آن واحد وتظهر هذه الحالة بالنسبة للسلع البديلة . مثال ذلك الشاى والبن مثلا ، فأذا أرتفع سعر الشاى ولم يتغير سعر البن فيمكننا توقع أن ينخفض الطلب على الشاى وأن يرتفع

الطلب على البن • ففى هذه الحالة بالرغم من أن سعر البن لم يتغير الا أن الطلب عليه أرتفع نتيجة لتغير سعر الشاى • وبفرض أن $ط_1$ تمثل الطلب على الشاى وأن $ط_2$ تمثل الطلب على البن ووجدنا أن دالتى الطلب للسلعتين كما يلى :ــ

$$ط_1 = 26 - س_1 + س_2$$

$$ط_2 = 8 + س_1 - س_2$$

وكذلك وجدنا أن دالتى عرض السلعتين كما يلى :ــ

$$ع_1 = -4 + 3س_1 - س_2$$

$$ع_2 = -2 - س_1 + 5س_2$$

فأنه لايجاد أسعار توازن الشاى والبن فى السوق نقوم بايجاد المعادلتين :

$$ط_1 = ع_1 \quad و \quad ط_2 = ع_2$$

$$26 - س_1 + س_2 = -4 + 3س_1 - س_2$$

$$8 + س_1 - س_2 = -2 - س_1 + 5س_2$$

ويحل هاتين المعادلتين آتيا

$$30 - 4س_1 + 2س_2 = صفر$$

أى أن $15 - 2س_1 + س_2 = صفر$ (١)

$$-1 + 2س_1 - 6س_2 = صفر$$

أى أن $5 + س_1 - 3س_2 = صفر$ (٢)

$45 - 6س_1 + 3س_2 = صفر$ (١) × ٣ (٣)

$50 - 5س_1 = صفر$ بالجمع

$$س_1 = \frac{50}{5} = 10$$

بالتعويض فى المعادلة ١

س ٢ = ـ ١٥ + ٢٠ = ٥

ويكون ط ١ = ع ١ = ٢١

ط ٢ = ع ٢ = ١٣

تأثير الدخل على منحنى الطلب

اذا فرضنا ان الطلب على سلعة ما يتوقف على سعر هذه السلعة وعلى متوسط دخل الفـــرد وأن دالة الطلب على هذه السلعة كما يلى :

ط = ٥ر ى + ١٠٠ / ع

ع = ٤٠ + ١٦ ع

فأن سعر توازن السوق عندما يكون متوسط دخل الفرد = ٢٠٠ يكون

٤٠ + ١٦ ع = (٥ر) (٢٠٠) + ١٠٠ / ع

٤٠ ع + ١٦ ع٢ = ١٠٠ ع + ١٠٠

١٦ ع٢ ـ ٦٠ ع ـ ١٠٠ = صفر

أذن ع = (٦٠ ± √((ـ ٦٠)٢ ـ ٤ (١٦) (ـ ١٠٠))) / (٢ (١٦))

= (٦٠ ± ١٠٠) / ٣٢

ع = ٥ أو ع = ـ ٢٥ر ١

ونظرا لان السعر السالب ظاهرة غير منطقية اقتصاديا فأن سعر التوازن فى هذه الحالـــة يســـــاوى ٥ .

واذا فرضنا أن متوسط دخل الفرد ارتفع الى ٣٠٠ فأن سعر التوازن يكـون :ـ

٤٠ + ١٦ ع = (٥ر) (٣٠٠ + ١٠٠ / ع)

وبحل هذه المعادلة نصل الى سعر التوازن الجديد

ع = ٦٩ر ٧

ويلاحظ هنا أن سعر التوازن قد تغير بالرغم من أن دالة العرض لم تتغير وهذا يدل على أن منحنى الطلب فقط هو الذى أرتفع نتيجة لارتفاع متوسط الدخل الفردى .

(ثانيـــــا)

تـوازن الدخل الاهلـــى

اذا عرفنا الدخل الاهلى (ى) بأنه مجموع الانفاق الاستهلاكى (ك) والانفاق الاستثمارى (أ) وأن الاستهلاك يتوقف على مستوى الدخل الاهلى والاستثمار مقدار ثابت ووضعنا هذه الفروض فى المعادلات التالية :

ك = ١٠ + ٦ وى

أ = ٣٠

ى = أ + ك

فأن مستوى الدخل الاهلى الذى يحقق التوازن الاقتصادى يساوى

ى = أ + ك

= ٣٠ + ١٠ + ٦وى

٤ وى = ٤٠

ى = $\frac{٤٠}{٤ر}$ = ١٠٠

ويساوى مستوى الانفاق الاستهلاكى فى هذه الحالة

ك = ١٠ + ٦ر (١٠٠) = ٧٠

ويلاحظ أن أى مستوى للدخل الاهلى أقل من ١٠٠ يجعل مجموع الانفاق (الطلب الكلى Aggregate demand) أكبر من مجموع دخول الافراد (العرض الكلى Aggregate supply)

وبذلك يتجه الدخل الى الزيادة حتى يحقق مستوى التوازن بين الطلب الكلى والعرض الكلى اما اذا كان مستوى الدخل الاهلى أكبر من ١٠٠ فهذا يعنى أن مجموع الانفاق (الطلب الكلى) يكون أصغر من مجموع دخول الافراد (العرض الكلى) وبذلك يتجه الدخل الى الانخفـــاض حتى يحقق مستوى التوازن بين الطلب الكلى والعرض الكلى .

(مبـادىء التفاضـــــل)

الدوال

أذا أعطينا متغيرين س و ص وعلمنا انه اذا عرفت قيمة س فأننا نستطيع ان نحدد قيمـــة ص فأنه يقال أن ص دالة س ويرمز لهذه العلاقة بالرموز ص = د (س)

أمثلــــة :

١) اذا كانت د (س) = $\text{س}^{٢}$ فأوجد قيمة د (ص) و د (س) و د (٤) و د (صفر) و د (ـ ١)

الحـــل :

$\text{د (ص)} = \text{ص}^{٢}$

$\text{د (س)} = \text{س}^{٢}$

$\text{د (٤)} = ٤^{٢} = ١٦$

$\text{د (صفر)} = (\text{صفر})^{٢} = \text{صفر}$

$\text{د (ـ ١)} = (-١)^{٢} = ١$

٢) اذا كانت د (ت) = $\dfrac{\text{ت} - ١}{\text{ت} + ١}$ فأوجد قيمة د ($\text{ت}^{٢}$) و $\text{د}^{٢}$(ت) و د (٢ س) و د ($\dfrac{٢}{\text{ت}}$) و د (ت + ٢)

الحـــل :

$$\text{د}(\text{ت}^{٢}) = \frac{\text{ت}^{٢} - ١}{\text{ت}^{٢} + ١}$$

$$\text{د}^{٢}(\text{ت}) = \left(\frac{\text{ت} - ١}{\text{ت} + ١}\right)^{٢} = \frac{\text{ت}^{٢} - ٢\text{ت} + ١}{\text{ت}^{٢} + ٢\text{ت} + ١}$$

$$\text{د}(٢\text{س}) = \frac{٢\text{س} - ١}{٢\text{س} + ١}$$

$$\text{د}\left(\frac{٢}{\text{ت}}\right) = \frac{\frac{٢}{\text{ت}} - ١}{\frac{٢}{\text{ت}} + ١} = \frac{٢ - \text{ت}}{\text{ت}} \times \frac{\text{ت}}{٢ + \text{ت}} = \frac{٢ - \text{ت}}{٢ + \text{ت}}$$

$$\text{د}(\text{ب} + ٢) = \frac{\text{ت} + ٢ - ١}{\text{ت} + ٢ + ١} = \frac{\text{ت} + ١}{\text{ت} + ٣}$$

النهايـــــات

أذا كانت القيمة الرقمية للفرق بين دالة د(س) وأى مقدار ثابت ث يظل أقل من أى قيمـــة موجبة مهما صغرت هذه القيمة عند ما نأخذ قيمة المتغير س قريبة جدا من و ولكنها لا تتســاوى معها فأنه يقال أن د (س) تتجه الى ث كلما اقترتب قيمة س من و ويرمز لما سبق بالرمز .

$$\underset{س \leftarrow و}{نها}\ د\ (س) = ث$$

أو نهاية د (س) عند ما س ← و = ث

وعند ما تتجه س الى و باستخدام قيمة أكبر من و فقط فأننا نرمز الى ذلك بالرمـــــز $س \leftarrow و^{+}$. أما اذا كانت س تتجه الى و باستخدام قيمة أصغر من و فقط فأننا نرمز الـــى ذلك بالرمز $س \leftarrow و^{-}$

ومن الواجب الحذر من اللبس بين هذين الرمزين حيث انهما قد يؤديان الى اجابتـــين مختلفتين . فمثلا .

$$\underset{س \leftarrow صفر^{-}}{نهــــا}\ \frac{|س|}{س} = -1$$

$$بينما\ \underset{س \leftarrow صفر^{+}}{نهــــا}\ \frac{|س|}{س} = 1$$

قواعد عامة للنهايات :— نهايات المجاميع او الفروق أو حواصل الضرب أو نتائج القسمه لــــدوال تساوى مجاميع او فروق او حواصل ضرب أو نتائج قسمه نهاياتها اذا كانت لهذه الدوال نهايات وليس بمقام احداها صفر . وبالرموز الرياضيـــة .

١) نها د (س) + نها د (س) = نها [د (س) + د (ص)]

٢) نها د (س) — نها د (ص) = نها [د (س) — د (ص)]

٣) نها د (س) × نها د (ص) = نها [د (س) × د (ص)]

٤) $\dfrac{نها\ د\ (س)}{نها\ د\ (ص)} = نها \left[\dfrac{د\ (س)}{د\ (ص)} \right]$

وكذلك يجب ملاحظـــة :

٥) $\underset{س \leftarrow و}{نها}\ س = و$

٦) $\underset{س \leftarrow و}{نها}\ ث = ث$ حيث ث مقدار ثابت

٧) $\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\text{ث}}{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{صفر}$ حيث ث مقدار ثابت

٨) $\text{نهـا}_{\text{س}\to\text{و}} \text{س}^{\text{ن}} = \text{و}^{\text{ن}}$ حيث ن قيمة حقيقية موجبه

أمثلة :-

١) $\text{نهـا}_{\text{س}\to 2} (٣\,\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + ٥) = \text{نهـا}_{\text{س}\to 2} ٣\,\text{س}^{٣} - \text{نهـا}_{\text{س}\to 2} \text{س}^{٢} + \text{نهـا}_{\text{س}\to 2} ٥$

$= ٣\,(٢)^{٣} - (٢)^{٢} + ٥ = ٢٥$

٢) $\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} - ٣}{٢\,\text{س}^{٣} + ٣\,\text{س}^{٢} + \text{س} + ٣} = \text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \dfrac{١ + \frac{٢}{\text{س}} - \frac{٣}{\text{س}^{٢}}}{٢\,\text{س} + ٣ + \frac{١}{\text{س}} + \frac{٣}{\text{س}^{٢}}}$

$= \dfrac{\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} ١ + \text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{٢}{\text{س}} - \text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{٣}{\text{س}^{٢}}}{\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} ٢\,\text{س} + \text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} ٣ + \text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{١}{\text{س}} + \text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{٣}{\text{س}^{٢}}}$

$= \dfrac{١ + \text{صفر} - \text{صفر}}{\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} ٢\,\text{س} + ٣ + \text{صفر} + \text{صفر}} = \dfrac{١}{\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} ٢\,\text{س} + ٣} = \text{صفر}$

٣) $\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \dfrac{٣\,\text{س}^{٤} + ٢\,\text{س}^{٢} - \text{س} + ٤}{٢\,\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س} - ١} = \dfrac{\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} (٣\,\text{س}^{٢} + ٢ - \frac{١}{\text{س}} + \frac{٤}{\text{س}^{٢}})}{\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} (٢ - \frac{٣}{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}^{٢}})}$

$= \dfrac{\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} ٣\,\text{س}^{٢} + ٢}{٢} = \infty$

التفاضـــــــــل

المشتقة $\frac{د ص}{د س}$ لدالة س هى نهاية الفرق بين نسبتين $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ٠ أى أن

$$\frac{د ص}{د س} = \lim_{\Delta س \to صفر} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \lim_{\Delta س \to صفر} \frac{\phi(س + \Delta س) - \phi(س)}{\Delta س}$$

ويلاحظ أن الفرق بين النسبتين يمثل متوسط نسبة التغير فى ص بالنسبة لـ س ٠ اما نهاية الفرق بين النسبتين فهو يمثل النسبة الحدية للتغير فى ص بالنسبة لـ س ٠

ويرمز للمشتقة $\frac{د ص}{د س}$ بالرمز $ص'$ أو $\phi'(س)$ ويطلق عليها البعض معامل التفاضل الاول ٠

التفاضل باستخدام طريقة الأربع خطوات :ـ

يقصد بمفاضلة دالة س ايجاد المشتقة $\phi'(س)$ ٠ وبصفة عامة فأن هناك ٤ خطوات يمكن اتباعها لمفاضلة أى دالة ٠

الخطوة الاولى :ـ أضف الى المتغير المستقل مقدار حدى ٠ وفى الدالة ص $= \phi(س)$ فـــأن س هو المتغير المستقل وتصبح الدالة بعد اضافة المقدار الحدى ص $+ \Delta$ص $= \phi(س + \Delta س)$ ٠

الخطوه الثانية :ـ احسب قيمة المقدار الحدى للمتغير المستقل $(\Delta س)$ ٠

الخطوة الثالثة : أوجد الفرق بين النسبتين :

الخطوة الرابعة: أوجد نهاية الفرق بين النسبتين عندما يتجه المقدار الحدى للمتغير المستقـــل $(\Delta س)$ الى صفـــر ٠

أمثلـــــة :

(١) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ اذا كانت ص $= س^2 + ٣ س + ٢$

الحــــل :

الخطوة الاولى : $ص + \Delta ص = (س + \Delta س)^2 + ٣ (س + \Delta س) + ٢$

$= س^2 + ٢ س \Delta س + (\Delta س)^2 + ٣ س + ٣ \Delta س + ٢$

<u>الخطوة الثانية</u> : ص = س^{٢} + ٣ س + ٢

أذن Δ ص = ٢ سΔس + (Δس)^{٢} + ٣Δس

<u>الخطوة الثالثة</u> : $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ = ٢ س + Δ س + ٣

<u>الخطوة الرابعة</u>: $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \lim\limits_{\Delta \text{س} \to \text{صفر}}$ (٢ س + Δس + ٣) = ٢ س + ٣

٢) أوجد $\frac{\text{د و}}{\text{د هـ}}$ اذا كانت و = $\frac{\text{هـ}}{\text{١ + هـ}}$

<u>الحـــل</u> :

<u>الخطوة الاولى</u> : و + Δو = $\frac{\text{هـ}}{\text{١ + هـ}}$

<u>الخطوة الثانية</u>: Δ و = $\frac{\text{هـ + Δ هـ}}{\text{١ + هـ + Δهـ}} - \frac{\text{هـ}}{\text{١ + هـ}}$

= $\frac{\text{Δ هـ}}{\text{(١ + هـ + Δهـ) (١+ هـ)}}$

<u>الخطوة الثالثة</u> : $\frac{\text{Δو}}{\text{Δهـ}} = \frac{\text{١}}{\text{(١+ هـ + Δهـ) (١+ هـ)}}$

<u>الخطوة الرابعة</u>: $\frac{\text{د و}}{\text{د هـ}} = \lim\limits_{\Delta \text{هـ} \to \text{صفر}} \frac{\text{١}}{\text{(١+هـ+Δهـ) (١+هـ)}} = \frac{\text{١}}{\text{(١+هـ+ صفر) (١ + هـ)}}$

= $\frac{\text{١}}{\text{(١ + هـ)}^{٢}}$

<u>القواعد العامة للتفاضل</u> :

فيما يلى سنفرض أن ص = ϕ'(س)

ى = ϕ (س)

ر = ϕ (س)

وأن ث و ن مقادير ثابته

القانون الاول : مفاضلة مقدار ثابت

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}\,\text{ث} = \text{صفر}$$

القانون الثانى : مفاضلة القوة

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}\,\text{س}^{\text{ن}} = \text{ن س}^{\text{ن}-١}$$

مثال : $\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{س}^{٥}) = ٥\,\text{س}^{٤}$

القانون الثالث : $\frac{\text{د}}{\text{د س}}\,\text{ث ى} = \text{ث}\,\frac{\text{د ى}}{\text{د س}}$

مثال :

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}\,٥\,\text{س} = \frac{\text{د}}{\text{د س}}\,\text{س} = ٥$$

القانون الرابع : مفاضلة حواصل الجمع او نتائج الطرح

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{ى} \pm \text{ر}) = \frac{\text{د ى}}{\text{د س}} \pm \frac{\text{د ر}}{\text{د س}}$$

مثال :

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} + ٢) = \frac{\text{د}}{\text{د س}}\,\text{س}^{٢} + \frac{\text{د}}{\text{د س}}\,٣\,\text{س} + \frac{\text{د}}{\text{د س}}\,٢$$

$$= ٢\,\text{س} + ٣$$

القانون الخامس : مفاضلة حاصل ضرب دالتين

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{ى ر}) = \text{ى}\,\frac{\text{د ر}}{\text{د س}} + \text{ر}\,\frac{\text{د ى}}{\text{د س}}$$

مثال :

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}(٣\,\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} + ٥)(\text{س}^{٢} + ١)$$

$$= (٣\,\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} + ٥)\,\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{س}^{٢} + ١) + (\text{س}^{٢} + ١)\,\frac{\text{د}}{\text{د س}}(٣\,\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} + ٥)$$

$$= (٣\,\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} + ٥)(٢\,\text{س}) + (\text{س}^{٢} + ١)(٦\,\text{س} - ٢)$$

$$= ١٢\,\text{س}^{٣} - ٦\,\text{س}^{٢} + ١٦\,\text{س} - ٢$$

القانون السادس : مفاضلة ناتج قسمة دالتين .

$$\frac{\text{د}}{\text{د}\,\text{س}}\left(\frac{\text{ي}}{\text{ر}}\right)=\frac{\text{ر}\,\frac{\text{د}\,\text{ي}}{\text{د}\,\text{س}}-\text{ي}\,\frac{\text{د}\,\text{ر}}{\text{د}\,\text{س}}}{\text{ر}^{٢}}$$

مثال :

$$\phi(\text{س})=\frac{٣\,\text{س}+١}{\text{س}^{٢}-\text{س}+٤}$$

$$\phi'(\text{س})=\frac{(\text{س}^{٢}-\text{س}+٤)\,\frac{\text{د}}{\text{د}\,\text{س}}(٣\,\text{س}+١)-(٣\,\text{س}+١)\,\frac{\text{د}}{\text{د}\,\text{س}}(\text{س}^{٢}-\text{س}+٤)}{(\text{س}^{٢}-\text{س}+٤)^{٢}}$$

$$=\frac{(\text{س}^{٢}-\text{س}+٤)(٣)-(٣\,\text{س}+١)(٢\,\text{س}-١)}{(\text{س}^{٢}-\text{س}+٤)^{٢}}$$

$$=\frac{-٣\,\text{س}^{٢}-٢\,\text{س}+١٣}{(\text{س}^{٢}-\text{س}+٤)^{٢}}$$

القانون السابع : $\frac{\text{د}}{\text{د}\,\text{س}}(\text{ي}^{\text{ن}})=\text{ن}\,\text{ي}^{\text{ن}-١}\,\frac{\text{د}\,\text{ي}}{\text{د}\,\text{س}}$

مثال :

$$\text{ص}=(\text{س}^{٢}-٣\,\text{س}+٢)^{١٤}$$

$$\frac{\text{د}\,\text{ص}}{\text{د}\,\text{س}}=١٤\,(\text{س}^{٢}-٣\,\text{س}+٢)^{١٣}\,\frac{\text{د}}{\text{د}\,\text{س}}(\text{س}^{٢}-٣\,\text{س}+٢)$$

$$=١٤\,(\text{س}^{٢}-٣\,\text{س}+٢)^{١٣}\,(٢\,\text{س}-٣)$$

القانون الثامن :

$$\frac{\text{د}\,\text{ص}}{\text{د}\,\text{س}}=\frac{١}{\frac{\text{د}\,\text{س}}{\text{د}\,\text{ص}}}$$

مثال :

$$\text{ص}=\text{س}^{٢}+٣\,\text{س}+٢$$

أوجد $\frac{\text{د}\,\text{ص}}{\text{د}\,\text{س}}$ ثم اوجد $\frac{\text{د}\,\text{س}}{\text{د}\,\text{ص}}$

الحل : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{٢ س + ٣}$

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ص}} = \frac{\text{١}}{\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}} = \frac{\text{١}}{\text{٢ س + ٣}}$$

القانون التاسع :

اذا كانت ص = ϕ (ى) و ى = ϕ (س)

اذن

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ى}} \times \frac{\text{د ى}}{\text{د س}}$$

مثال : ص = $\text{ى}^{\text{٣}}$ + ٣ ى − ١

ى = $\text{س}^{\text{٢}}$ + س − ٤

اذن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ر}} \times \frac{\text{د ر}}{\text{د س}}$

= (٣ $\text{ى}^{\text{٢}}$ + ٣) (٢ س + ١)

= $\left[\text{٣}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٤})^{\text{٢}} + \text{٣}\right]$ (٢ س + ١)

القانون العاشر :

مفاضلة الدالة اللوغاريتمية .

ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{١}}{\text{س}}$$

مثال : ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ (٢ $\text{س}^{\text{٢}}$ − ٣ س + ٧)

فاذا فرضنا ان ى = ٢ $\text{س}^{\text{٢}}$ − ٣ س + ٧

اذن $\frac{\text{د ص}}{\text{د ى}} = \frac{\text{١}}{\text{ى}} = \frac{\text{١}}{\text{٢ س}^{\text{٢}} - \text{٣ س + ٧}}$

$$\frac{\text{د ى}}{\text{د س}} = \text{٤ س} - \text{٣}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ى}} \times \frac{\text{د ى}}{\text{د س}} = \frac{\text{٤ س} - \text{٣}}{\text{٢ س}^{\text{٢}} - \text{٣ س + ٧}}$$

القانون الحادى عشر : مفاضلة الدالة الاسية :

اذا كانت $ص = \text{ه}^{س}$ اذن $\frac{د ص}{د س} = \text{ه}^{س}$

مثال :

$ص = \text{ه}^{٣ س}$ اوجد $\frac{د ص}{د س}$

بفرض $ى = ٣ س$ اذن $ص = \text{ه}^{ى}$

$$\frac{د ص}{د ى} = \text{ه}^{ى} = \text{ه}^{٣ س}$$

$$\frac{د ص}{د ى} = \text{ه}^{ى} = \text{ه}^{٣ س}$$

$$\frac{د ى}{د س} = ٣$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ى} \times \frac{د ى}{د س} = ٣ \text{ ه}^{٣ س}$$

$$\frac{د ى}{د س} = ٣$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ى} \times \frac{د ى}{د س} = ٣ \text{ ه}^{٣ س}$$

مشتقات ذات درجات أعلى :

رأينا كيف ان تفاضل دالة يعطينا مشتقة ، ونظرا لان هذه المشتقة تعتبر دالة اخرى فيمكن مفاضلة هذه المشتقة . ويعرف ناتج تفاضل المشتقة الاول بالمشتقة الثانية (أو معامل التفاضل الثانى) ويرمز لها بالرمز $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ او $\phi''(س)$ أو $ص''$. وكذلك فان ناتج تفاضل المشتقة الثانية يعرف بالمشتقة الثالثة ويرمز لـه بالرمز $\frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}}$ أو $\phi'''(س)$ أو $ص'''$. وهكذا .

ولتفسير معنى او مدلول المشتقة الثانية نأخذ مثال جسم ساقط فى الهواء بحريه . ويحكم تساقط هذا الجسم قانون الطبيعة المعروف .

$$م = ١٦,١ ر^{٢}$$

حيث م هى المسافة التى قطعها الجسم فى السقوط بالقدم و ر هى المدة التى استغرقها ذلك بالثوان ٠

ونجد ان سـرعة السـقوط تسـاوى $\frac{د م}{د ر}$

وأن نسبة التغير فى السرعة والتى تعرف بعجلة السرعة تساوى $\frac{د^{2} م}{د ر^{2}}$

اذن السرعة = $\frac{د}{د ر}$ (١٦ر١ ر^{2}) = (١٦ر١) (٢) (ر) = ٣٢ر٢ ر قدم / ثانية ٠

عجلة السرعة = $\frac{د^{2} م}{د ر^{2}} = \frac{د}{د ر}$ (٣٢ر٢ ر) = ٣٢ر٢ قدم / ثانية مربعة ٠

مثال : اوجد $ص'$ و $ص''$ و $ص'''$ اذا كانت

$$ص = \frac{س}{١+س}$$

$$ص = \frac{س}{١+س}$$

$$ص' = \frac{(١+س)\ (١)\ - س\ (١)}{(١+س)^{2}} = \frac{١+س-س}{(١+س)^{2}} = (١+س)^{-2}$$

$$ص'' = -٢\ (١+س)^{-3}$$

$$ص''' = ٦\ (١+س)^{-4}$$

$$ص'''' = -٢٤\ (١+س)^{-5}$$

(التطبيق الاقتصادى للمشتقات)

أولا

مرونات الطلب والعـرض

مرونة الطلب هى نسبة التغير فى الكمية المطلوبة من سلعة معينة المترتبه على تغير فى السـعر بنسبة ١٪ ٠ ومرونة العرض هى نسبة التغير فى الكمية المعروضة من سلعة معينه المترتبة على تغير فى السعر بنسبة ١٪ ٠

وباستخدام التفاضل يمكن وضع تعريف رياضى دقيق لمرونة الطلب $ر_{ط}$ ومرونة العرض $ر_{ع}$ كمايلى

$$ط = \emptyset\ (س)$$

$$ع = \emptyset\ (س)$$

$$ر_{ط} = \frac{د ط}{د س} \times \frac{س}{ط}$$

$$ر_{ع} = \frac{د ع}{د س} \times \frac{س}{ع}$$

واذا لم نستخدم التفاضل لايجاد معاملات المرونة فاننا نوجد مرونة الطلب كما يلى :

$$ر_ط = \frac{\frac{\Delta ط}{ط}}{\frac{\Delta س}{س}} = \frac{\Delta ط}{\Delta س} \times \frac{س}{ط}$$

ولكن هنــاك صعوبة تقابلنا اذا اخترنا نقطتين على منحنى الطلب لاستخدامهما فى تقدير مرونــة الطلب • فاذا كانت النقطتان هما $ط_١$ و $ط_٢$ ويقابلهما السعرين $س_١$ و $س_٢$ فان مرونة الطلــب تســاوى :

$$ر_ط = \frac{ط_٢ - ط_١}{س_٢ - س_١} \times ؟$$

وعلامة الاستفهام هذا تعبر عن المشكلة التى تقابلها • فهل نضع مكانها $\frac{س_١}{ط_١}$ ام $\frac{س_٢}{ط_٢}$ ام $\frac{س_١ + س_٢}{ط_١ + ط_٢}$ ؟

اذا اســتخدمنا فى كل مرة احدى النسب الثلاث فاننا سنحصل الى ثلاث قيم مختلفة لمعامل مرونــة الطلب• لهذا السبب نجد ان مرونة الطلب التى تحتسب باستخدام التفاضل افضل بكثير عن مرونة الطلب فى المثال السابق لانها تعطى قيمة واحدة وهى القيمة الحقيقية للمرونة•

<u>مرونــة الطلــــب</u> : اذا اعطينا دالة الطلــب

$$ط = \varnothing (س)$$

فان مرونة الطلب تســاوى

$$ر_ط = \frac{د ط}{د س} \times \frac{س}{ط}$$

مثــال :

اذا اخذت دالة الطلــب الشــكل التالــى :

$$ط = ١٠٠ - ٥ س$$

فان مرونة الطلب تســاوى

$$ر_ط = -٥ \left(\frac{س}{ط} \right)$$

فاذا اردنا الوصول الى قيمة مرونة الطلبعندما يكون السعر س = ٣

فنوجد اولا قيمة ط = ١٠٠ ـ ٥ (٣) = ٨٥

وتكون مرونة الطلب $ر_{ط} = -٥ \left(\frac{٣}{٨٥} \right) = \frac{-١٥}{٨٥} = \frac{-٣}{١٧} = -٠,١٧٦$ ر

اما مرونة الطلب عند ما يكون السعر = ١٠

$$ط = ١٠٠ - ٥ (١٠) = ٥٠$$

$$ر_{ط} = -٥ \left(\frac{١٠}{٥٠} \right) = -١$$

وتكون مرونة الطلب عند ما يكون السعر = ١٥

$$ط = ١٠٠ - ٥ (١٥) = ٢٥$$

$$ر_{ط} = -٥ \left(\frac{١٥}{٢٥} \right) = \frac{-٧٥}{٢٥} = -٣$$

ويكون الطلب صغير المرونة اذا كانت مرونة الطلب اكثر من ـ ١ كما فى الحالة الاولى عند ما كان السعر = ٣ والكمية المطلوبة = ٨٥

ويسمى الطلب متكافئ المرونة اذا كانت مرونة الطلب تساوى ـ ١ كما فى الحالة الثانية عند ما كان السعر يساوى = ١٠ والكمية المطلوبة = ٥٠

ويسمى الطلب كبير المرونة اذا كانت مرونة الطلب اصغر من ـ ١ كما فى الحالة الثالثة عند ما كان السعر = ١٥ والكمية المطلوبة = ٢٥ .

المرونة الثابتة للطلب :

لاحظنا فى المثال السابق ان مرونة الطلب تختلف اذا احتسبناها عند نقط مختلفة على منحنى الطلب . ولكن اذا اخذت دالة الطلب الصورة الرياضية التاليـة :

$ط = \frac{أ}{س^{ب}}$ حيث أ ، ب مقداران ثابتان .

نلاحظ ان مرونة الطلب تكون ثابته عند جميع نقط منحنى الطلب .

$$ط = \frac{أ}{س^{ب}}$$

اذن $ط = أ\, س^{-ب}$

$$\frac{د ط}{د س} = -أ\, ب\, س^{-ب-١}$$

$$ر_{ط} = -أ\, ب\, س^{-ب-١} \left(\frac{س}{ط} \right)$$

$$= \frac{-أ\, ب\, س^{-ب}}{ط}$$

ولكن $\text{ط} = \text{أ}\,\text{س}^{-\text{ب}}$

$$\text{ر ط} = \frac{-\text{أ}\,\text{ب}\,\text{س}^{-\text{ب}}}{\text{أ}\,\text{س}^{-\text{ب}}} = -\text{ب}$$

مثـــال :

اذا كانت دالة الطلب تساوى

$$\text{ط} = \frac{١٠٠}{\text{س}^{٣}} = ١٠٠\,\text{س}^{-٣}$$

$$\text{ر ط} = ١٠٠\,(-٣\,\text{س}^{-٤})\left(\frac{\text{س}}{\text{ط}}\right)$$

$$= \frac{-٣٠٠\,(\text{س}^{-٣})}{١٠٠\,\text{س}^{-٣}} = -٣$$

وتمثل المعادلة التاليه دالة الطلب المتكافئ المرونة

$$\text{ط} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} \;.$$

مرونـــة العـــرض :

نلاحظ ان التطبيق الرياضى لمرونة العرض لا يختلف عن التطبيق الرياضى لمرونة الطلـــب

$$\text{ر ع} = \frac{\text{دع}}{\text{دس}} \times \frac{\text{س}}{\text{ع}}$$

ويسمى العرض قليل المرونة اذا كانت مرونة العرض اقل من + ١ ويسمى متكافئ المرونـــة اذا كانت مرونة العرض تساوى + ١ ويسمى كبير المرونة اذا زادت مرونة العرض عن + ١

اما دالة المرونة الثابتة للعرض فتأخذ الصـــورة

$$\text{ع} = \text{أ}\,\text{س}^{\text{ب}}$$

$$\text{ر ع} = \frac{\text{د}}{\text{دس}}\,\text{أ}\,\text{س}^{\text{ب}} \times \frac{\text{س}}{\text{ع}}$$

$$= \text{أ}\,\text{ب}\,\text{س}^{\text{ب}-١} \times \frac{\text{س}}{\text{ع}}$$

$$= \frac{\text{أ}\,\text{ب}\,\text{س}^{\text{ب}}}{\text{ع}}$$

$$= \frac{\text{أ}\,\text{ب}\,\text{س}^{\text{ب}}}{\text{أ}\,\text{س}^{\text{ب}}} = \text{ب}$$

وتمثل المعادلة التاليـــة دالـــة العرض المتكافـــئ المرونـــة

$$\text{ع} = \text{أ}\,\text{س} \;.$$