الجمهورية العربية المتحدة

معهد التخطيط القومى

مذكرة رقم (٧٦٦)

دراسات
فى الاقتصاد القياسى

جزء (٢)

دكتور
محمد جلال الدين أبو الدهب

يونيو ١٩٦٧

القاهرة
٣ شارع محمد مظهر - بالزمالك

الاراء التى وردت فى هذه المذكـــرة
تمثل رأى الكاتب ولا تمثل رأى المعهد ذاته

الطرق الاحصائية المستخدمة فى
الاقتصاد القياســـي

يلجأ الاقتصاديون فى تحليلاتهم للمتغيرات الاقتصادية الى استخدام احدى الطريقتــــين الأساسيتين الآتيتين :

أولا : التحليل الايجابى Positive Analysis

وهذه تعنى أنه يمكن التنبأ بالعلاقات الكمية بين المتغيرات المختلفة فى لحظة زمنية معينـــة ، ولذا يطلق على هذه الطريقة فى بعض الأحيان بالطريقة الوصفية أو الطريقة التوقعية وذلك لأنهـــا تعتمد اعتمادا كليا على العلاقات الكمية بين المتغيرات وبالحالة التى تتواجد بها . ولذا يمكـــن استخدام النتائج المتحصل عليها فى عمليات التنبأ للعلاقات الكمية التى قد تسود فى المستقبل اذا لم يحدث تغير حقيقى فى الأحوال الاقتصادية السائدة ، والطريقة الاحصائية الأساسية التى تستخدم فى التحليل الايجابى هى طريقة الانحدار .

ثانيا : التحليل النموذجى Normative Analysis

وتمكن هذه الطريقة الباحثين من الوصول — عن طريق تحليلهم للبيانات المتوفرة — الـــى الحالات المثلى للانتاج ، والاستهلاك والتوزيع ، وذلك بهدف تنظيم الوحدات الانتاجية وما الـــى ذلك . أى بمعنى أن التحليل النموذجى يمكننا من معرفة ما يجب أن تكون عليه العلاقات الاقتصادية المختلفة تحت فروض معينة — ويطلق على هذه الطريقة بعض الأحيان التحليل الارشـــــادى Prescriptive Analysis وأهم الطرق المستخدمة تحت هذا النوع من التحليـــل هى طريقة البرمجة Programming Technique .

طرق القيـــاس

يستخدم الباحثون الكثير من طرق القياس فى دراستهم ، وتحليلهم ، وتقديرهم للعلاقـــات الاقتصادية المختلفة . وتمثل هذه الطرق المحاولات الكثيرة التى قام بها رجال الاقتصاد لتفهـــم ، وتحليل ، وشرح الظواهر الاقتصادية المختلفة سواء ما ظهر منها فى الماضى أو فى الحاضر أو مـــا يتوقع أن تكون عليه فى المستقبل ، ويعتمد بعض هذه المحاولات اعتمادا كليا على الرسوم البيانيـــة فى حين أن يستخدم البعض الآخر الطرق الاحصائية المعقدة . ويلاحظ أن البعض يعتمد فـــى تحليله على بيانات تاريخية فى صورة سلاسل زمنية فى حين أن البعض الآخر يستخدم بيانات مصدرها عينات ممثلة للمتغيرات المدروسة . وفى بعض الأحيان تتطابق النتائج المتحصل عليها من استخدام طريقتين مختلفتين فى بحث مشكلة ما وفى الأحيان الأخرى قد تختلف النتائج اختلافا بينا . كمـــا يلاحظ أن لكل من هذه الطرق مزاياها وعيوبها . وسنتعرض فيما يلى باختصار أهم هذه الطرق .

الطرق البيانيـــة

Graphical Method

تعتمد هذه الطريقة اعتمادا كليا على استخدام الرسوم البيانية فى فهم وشرح العلاقـــــة المختلفة بين المتغيرات الاقتصادية . فعن طريق رسم عدة منحنيات للبيانات التى تمثل العلاقـــة بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة ، ثم دراسة هذه المنحنيات فانه يمكن استنتاج أى هـــذه المتغيرات المستقلة لها التأثير الأكبر على المتغير المستقل .

وأول من استخدم هذه الطريقة سنة ١٩٢٩ هو بروفسور بين (L.H. Bean) وتتلخص هذه الطريقة فى الآتى :

١ — نفرض أن لدينا متغير (تابع) وليكن (Y) والذى يعتمد على ثلاث متغيرات مستقلة ولتكن (X_1) ، (X_2) ، (X_3) .

٢ – يرسم ثلاث رسوم بيانية موضحا فى كل منها العلاقة التى تمثل (Y مع X_1) ، (Y مع X_2) (Y مع X_3) فعن طريق دراسة الرسوم الثلاثة يمكن معرفة أى من المتغيرات المستقلة الثلاثة يمكن أن يعزى اليه الاختلافات (التغيرات) فى المتغير (التابع) .

٣ – يحدد عن طريق دراسة رسم (Y مع X_1) العلاقة التقريبية بين Y , X_1 .

٤ – يحدد عن طريق البحث العلاقة التقريبية بين X_3 (أو X_2) والفروق المتبقية (الانحرافات) عن العلاقة التقريبية بين (Y , X_1) .

٥ – ترسم الفروق المتبقية من المنحنى المتحصل عليه فى الخطوة السابقة مع المتغير X_2 (X_3) لتحديد العلاقة بين X_2 (أو X_3) والفروق المتبقية النهائية للمتغير Y .

٦ – ترسم الفروق المتبقية من المنحنى المتحصل عليه من الخطوة السابقة أى الانحرافات عن المنحنيات التقريبية السابقة ، ثم يعمل منحنى تقريبى ثان لتقليل قيمة الفروق المتبقية (الانحرافات) فاذا أظهر المنحنى التقريبى فى الرسم الممثل Y , X_1 العلاقة بين Y , X_1 فان الفروق الحقيقية (أى المسافات الرأسية من المنحنى) تكون مرتبطة بالمتغيرين الآخرين X_2 & X_3 . فاذا رسمنا رسما بيانيا يمثل المسافات الرأسية لانحدار (Y مع X_1) مع X_3 فاننا نحصل على رسم بيانى تظهر فيه طبيعة العلاقة بين X_3 والفروق المتبقية من Y (أى بعد ازالة تأثير X_1 من Y) ومن ثم يمكن اكتشافها .

ولقد استخدم هذه الطريقة كثير من الاقتصاديين فى تحليل أسعار السوق أو فى تحليل الطلب والعرض لبعض السلع الزراعية أو الصناعية . ويلاحظ أن هذه الطريقة تعتمد أساسا على السلاسل الزمنية للمتغيرات الاقتصادية المراد دراسة العلاقة بينها .

وتعتبر هذه الطريقة بسيطة للغاية وخاصة اذا كانت طبيعة العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية يمكن ملاحظتها من المشاهدات الأصلية . ولكن فى كثير من الأحيان فان النقط التى تمثل هذه العلاقات فى الرسم البيانى تكون مبعثرة للغاية مما يصعب معها تحديد العلاقة بين المتغيرات بدقة .

تحليـــل الانحـــدار

Regression Analysis

يستخدم الاقتصاديون البيانات المتوفرة الخاصة بالمتغيرات الاقتصادية فى صورة سلاسل زمنية لتحديد العلاقات التى قد توجد بينها • وتتلخص هذه الطريقة فى توفيق منحنى أو معادلة خاصة للمتغيرات المطلوب درستها ، وباستخدام هذه المعادلة أو المنحنى يمكن تقدير العلاقات المختلفة والتى بالتالى تساعد الباحث على التنبأ • أى أنه يمكن بواسطتها تقدير القيم الغير معلومة لمتغير ما باستخدام القيم المعلومة لمتغيرات أخرى • وتسمى المنحنيات أو المعادلات التى تربط بين المتغيرين اللذين بينهما علاقة بمنحنيات أو معادلات الانحدار • وتعتبر طريقة تحليل السلاسل الزمنية طريقة ايجابية أو وصفية أو توقعية • وتستخدم الطرق الآتية فى تحليل السلاسل الزمنية :

١ ــ الانحدار البسيط ــ معادلة انحدار واحدة Simple Regresstion

وهذا يعنى أن المتغير الغير مستقل (التابع) يعتمد على متغير مستقل واحد وأن العلاقة بينهم يمكن أن تمثل وتحدد بمعادلة واحدة •

٢ ــ الانحدار المتعدد ــ معادلة انحدار واحدة Multipule Regresstion

وهذا يعنى أن المتغير الغير مستقل (التابع) يعتمد على متغيرين مستقلين أو أكثر وأن العلاقة بينهم يمكن أن تمثل وتحدد بمعادلة واحدة •

٣ ــ انحدار المجموع Canonical Regression

وهذا يعنى أن يعتمد أكثر من متغير غير مستقل (تابع) كمجموعة ــ على أكثر من متغير مستقل • ومثال ذلك الكميات المعروضة لمجموعة من السلع ككل تعتمد على أسعار المجموعة كلها •

٤ ــ المعادلات الآنية Simultaneous Equations

تستخدم المعادلات الآنية فى تحليل السلاسل الزمنية لتقدير العلاقات الاقتصادية المختلفة • وتستخدم المعادلات الآنية عندما يعتمد المتغير الغير مستقل (التابع) على

عدد من المتغيرات المستقلة والتى تعتمد بالتالى على متغيرات اقتصادية أخرى ٠ وتعتبر هذه الطريقة ذو فائدة كبرى حيث أنها تمكن الباحث من أن يستخدم عددا لا بأس به من المتغيرات الاقتصادية والتى بالتالى تساعد على شرح أسباب التباين فى المتغير الغير مستقل (التابع) ٠

وتتلخص طرق تحليل السلاسل الزمنية ـ من الناحية الهندسية فى أن كل زوج من المشاهدات المدروسة يحدد نقطة فى مستوى الورقة بالنسبة لمحورين متعامدين يمثل احدها قيم احد المتغيرين فى حين يمثل المحور الآخر قيم المتغير الآخر ٠ وعند تمثيل قيم كل أزواج المشاهدات المرتبطة بالنقط على مستوى الورقة فاننا نحصل على ما يسمى شكل الانتشار Scatter Diagram

والنقط التى تمثل قيم أزواج المشاهدات فى شكل الانتشار قد تتركز حول اتجاه معين فيقال ان المتغيرين بينهما ارتباط ٠ أو تكون مبعثرة بلا نظام أو اتجاه وفى هذه الحالة لا يكون هناك ارتباط بين المتغيرين ٠ وقد يكون الاتجاه الذى تتركز حوله النقط مستقيما أو قد يكون خطا منحنيا وحتى يكون الاتجاه المستقيم أو المنحنى ممثلا للنقط أحسن تمثيل فانه يجب أن يمر بأكبر عدد ممكن من النقط التى تمثل قيم أزواج المشاهدات وأن يمر بين باقى النقط بالتوازن ويسمى الخط فى هذه الحالة بخط الانتشار أو خط الانحدار ٠ ويمكن الحصول على هذا الخط اما بالرسم أو باستخدام طريقة المربعات الصغرى ٠

طريقة المربعات الصغـــرى

Method of Least Squares

معيار توفيق أحسن الخطوط :

يعتبر الخط المستقيم (أو أى منحنى) مطابقا وممثلا للبيانات المدروسة أحسن تمثيل اذا كان حاصل مجموع مربع انحرافات النقط (الملاحظات) على الخط المستقيم من القيم المناظرة لها فى شكل الانتشار أصغر ما يمكن ۰ وتعرف الطريقة التى يمكن بها توفيق أحسن خط أو منحنى ليمثل هـــذه البيانات وتحقق فى نفس الوقت المعيار السابق بطريقة المربعات الصغرى ۰

لنفرض أن لدينا سلسلة زمنية للمتغيرين الاقتصاديين $X \& Y$ (عدد المشاهدات $= n$) والمطلوب توفيق منحنى خطى لهما بطريقة المربعات الصغرى مع العلم بأن Y هى المتغير التابـع ، X هى المتغير المستقل ۰ لذا يمكن القول بأن المطلوب هو ايجاد – وذلك باستخـدام قيم المشاهدات للمتغيرين $X \& Y$ – القيم الغير معلومة ϵ ، β ، α فى النمـوذج الخطى التالى

$$Y = \alpha + \beta X + \epsilon$$

حيث أن α عبارة عن الجزء المقطوع من المحور الصـادى۰

β عبارة عن ميل خط الانحدار ۰

ϵ تمثل انحراف كل نقطة مشاهدة عن خط الانحدار ۰

وتكون معادلة الخط المستقيم فى تقديرنا هى

$$\hat{y} = a + b_x$$

حيث أن a تقدير ل

b تقدير ل

$\hat{y}$ قيمة y المقدرة باستخدام معادلة خط الانحدار ۰

وتكون

$$y = a + b_x + d_{y.x}$$

حيث أن $d_{y.x}$ تقدير ل (E) أى الفرق بين $(y - \hat{y})$ ۰ أى الفرق بين الحقيقية والقدرة ۰

وحتى يمكننا استخدام الاختبارات الاحصائية فى تحليلنا هذا ،وجب علينا وضع بعض الفروض للمتغير (e) (البواقى) .

وهذه الفروض هـى :

١ — يعتبر المتغير (e) متغيرا عشوائيا ومستقلا عن باقى الانحرافات ، أى بمعنى أن احتمال الحصول على انحراف سلبى أو انحراف موجب يكون مستقلا عن باقى الانحرافات الأخرى .

٢ — يكون توزيع هذه الانحرافات يتبع التوزيع العادى بمتوسط يساوى صفرا وتباين يساوى σ^2 ,

ولتحقيق المعيار السابق — أى أن حاصل مجموع مربع انحرافات نقط على الخط المستقيم من لنقط المناظرة لها فى شكل الانتشار اصغر ما يمكن — وجب علينا تصغير القيم الآتية لكل زوج من المشاهدات :

$$(y - \hat{y})^2 = (y - a - bx)^2$$
$$= y^2 + a^2 + b^2x^2 - 2ay - 2byx + 2abx$$

ويكون مجموع هذه القيم هو :

$$\sum_{i=1}^{n}(y-\hat{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}y^2 + na^2 + b^2\sum_{i=1}^{n}x^2 - 2a\sum_{i=1}^{n}y - 2b\sum_{i=1}^{n}yx + 2ab\sum_{i=1}^{n}x.$$

ولتحديد قيم المجهولين a , b والتى تجعل $\sum_{i=1}^{n}(y-\hat{y})^2$ أصغر ما يمكن وجب الحصول على التفاضل الجزئى لذلك المقدار بالنسبة ل a & b ثم مساواته بالصفر .

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n}(y-\hat{y})^2}{\partial a} = 2na - 2\sum_{i=1}^{n}y + 2b\sum_{i=1}^{n}x. \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n}(y-\hat{y})^2}{\partial b} = 2b\sum_{i=1}^{n}x^2 - 2\sum_{i=1}^{n}yx + 2a\sum_{i=1}^{n}x. \qquad (2)$$

وبمساواة كل من المعادلتين (١) ، (2) بالصفر نحصل من المعادلة رقم (١) على :

$$2na - 2\sum_{i=1}^{n} y + 2b\sum_{i=1}^{n} y = 0$$

أى أن

$$na + b\sum_{i=1}^{n} x = \sum_{i=1}^{n} y \qquad (3)$$

ونحصل من المعادلة رقم (2) على :

$$2b\sum_{i=1}^{n} x^2 - 2\sum_{i=1}^{n} yx + 2a\sum_{i=1}^{n} x = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x + b\sum_{i=1}^{n} x^2 = \sum_{i=1}^{n} xy \qquad (4)$$

وتكون المعادلتين (3) ، (4) هما المعادلتين الطبيعيتين والتى يمكن حلها معا لايجاد قيم المجهولين a & b

فمن المعادلة رقم (3) يكون

$$na = \sum_{i=1}^{n} y - b\sum_{i=1}^{n} x$$

وبقسمة طرفى المعادلة على (n)

$$\therefore \quad a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y}{n} - b\frac{\sum_{i=1}^{n} x}{n}$$

$$a = \bar{y} - b\,\bar{x}$$

أى أن

$$a = M_y - b\,M_x$$

حيث أن M_y المتوسط الحسابى لقيم y .

M_x المتوسط الحسابى لقيم x .

وبالتعويض فى المعادلة رقم (4) بقيمة (a) فانه يمكن الحصول على قيمة b

$$a\sum_{i=1}^{n} x + b\sum_{i=1}^{n} x^2 = \sum_{i=1}^{n} xy \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x\left[M_y - bM_x\right] + b\sum_{i=1}^{n} x^2 = \sum_{i=1}^{n} xy$$

وحيث أن $\sum_{i=1}^{n} x = nM_x$ فيكون

$$nM_x M_y - nb\, M^2 x + b\ x^2 = \sum_{i=1}^{n} xy$$

$$b\sum_{i=1}^{n} x^2 - bnM_x^2 = \sum_{i=1}^{n} xy - nM_x M_y$$

$$b\left(\sum_{i=1}^{n} x^2 - nM_x^2\right) = \sum_{i=1}^{n} xy - n\, M_x M_y$$

$$\therefore \quad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} xy - n\, M_x M_y}{\sum_{i=1}^{n} x^2 - n\, M_x^2}$$

$$\therefore \quad b = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}} = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum (x-\bar{x})^2}$$

وبذلك نكون قد قدرنا ثوابت معادلة الانحدار :

$$\hat{y} = a + bx$$

كفاءة التقديرات من معادلة الانحدار :

بعد حصولنا على قيم الثوابت a & b من العينة ، وجب علينا اختبار مدى كفاءة هذه التقديرات أى بمعنى أنه كيف يمكن استخدام المبادىء العامة للاحصاء فى اختبارنا لتحليل الانحدار فمن المحتمل أن لا تتساوى أى قيمة للمتغير y مع القيمة المقدرة له $\hat{y}$ (أى بمعنى أنه من المحتمل أن لا تقع أى من النقط فى شكل الانتشار على خط الانحدار) وقد تكون القيم المقدرة $\hat{y}$ قريبة من قيم y . وبما أننا نتوقع بعض الأخطاء فى تقديراتنا ، فانه يصبح من الضرورى قياس مقدار هذا الخطأ وبالتالى تحديد درجة الثقة التى يمكن اعطائها لتقديراتنا .

الخطأ المعيارى لمعامل الانحدار :

يقدر الخطأ المعيارى لمعامل الانحدار (b) بطريقة مشابهة لتلك التى تستعمل لتقدير الخطأ المعيارى بمتوسط العينة ، ويرمز للخطأ المعيارى لمعامل الانحدار بالرمز s_b . ويمكن ايجاد قيمة مربعة كالآتى :

$$s_b^2 = \frac{n\sum y^2 - (\sum y)^2 - \dfrac{(n\sum xy - \sum x \sum y)^2}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}}{(n-2)\left\{n\sum x^2 - (\sum x)^2\right\}}$$

وتكون

$$s_b = \sqrt{s_b^2}$$

وحيث أن الأخطاء الناتجة عن تقدير y بـ $\hat{y}$ تتوزع توزيعا طبيعيا ، فان الكمية

$$t = \frac{b - \beta}{s_b}$$

تتبع (توزيع t) بدرجات حرية مساوية (n - 2) ودرجات الحرية هنا عددها يقل عن عدد المشاهدات باثنين وذلك راجع لأن قيم الثابتين a & b قد قدرتا من العينة .
واختبار (t) هنا ما هو الا مقياس للاختلاف بين معامل الانحدار المقدر من العينة ومعامل الانحدار الحقيقى للمجتمع . مع الأخذ فى الاعتبار أخطاء المعاينة .

والطريقة المتبعة أن يجرى اختبار للمعنوية ،أى اختبار معنوية معامل الانحدار المقدر (b) فاذا لم توجد علاقة خطية بين المتغيرين X & Y فى المجتمع فان معامل انحدار المجتمع (β) سيساوى صفرا . والفرض المراد اختباره فى هذه الحالة هو ($\beta = 0$) بدرجة معنوية معينة . فاذا رفضنا هذا الفرض ،فاننا نقول أن معامل الانحدار b يختلف عن الصفر . واذا قبلنا الفرض فهذا يعنى احصائيا أن b غير معنوى أى أن العلاقة بين Y , X من المحتمل أن لا تكون خطية . واختبار (t) هذا يعطينا القيمة المقدرة أو قيمة (t) من العينة ، وباختيارنا لمستوى المعنوية الذى سنجرى عليه اختيارنا للفرض القائل بأن ($\beta = 0$)

فانه يمكننا مقارنة القيمة المقدرة لـ (t) مع قيمة (t) من جدول توزيع (t) بدرجات حرية (n - 2) • فاذا كانت قيمة (t) المقدرة من العينة تساوى أو أكبر من قيمة (t) المناظرة لها من جدول توزيع (t) فاننا نرفض الفرض القائل بأن ($\beta = 0$) بدرجة المعنوية المختارة أى أنه توجد علاقة خطية بين المتغيرين • أما اذا كانت قيمة (t) المقدرة من العينة أقل من قيمة (t) من جدول توزيع (t) فاننا نقبل الفرض القائل بأن ($\beta = 0$) أى أنه لا توجد علاقة خطية بين المتغيرين X , Y .

ويمكن حساب قيمة s_b كالآتى

$$s_b = \frac{s_{y.x}}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2}}$$

حيث أن $s^2_{y.x}$ هو تباين الانحرافات أو الفروق $d_{y.x}$ عندما تكون y مستقلة عن x ويعرف كذلك بأنه تباين المتغير y حول خط الانحدار وليس حول الوسط الحسابى $\bar{y}$ • ويحسب هذا التباين كالآتى :

$$s^2_{y.x} = \frac{\sum d^2_{y.x}}{(n-2)} = \frac{\sum(y-\hat{y})^2}{(n-2)}$$

حيث أن $d_{y.x}$ تساوى الفرق أو الانحراف ($y - \hat{y}$) ، (n - 2) درجات الحرية •

حدود الثقة لمعامل الانحدار :

يمكن حساب حدود ثقة لمعامل الانحدار (β) وذلك بدرجة الثقة المعينة ودرجات الحرية الملائمة وذلك بالتعويض عن قيمة (t) من جدول توزيع (t) فى المعادلة •

$$\frac{b-\beta}{s_b} = \pm t$$

وتكون حدود الثقة لمعامل الانحدار β وبدرجة ثقة ٩٥٪ مساوية •

$$P_r \left\{ b - t_{(.05, d.f.)} s_b \leq \beta \leq b + t_{(.05, d.f.)} s_b \right\} = 0.95$$

الارتبـــاط البسيط Simple Correlation

اذا فرض أن كل النقط التى تمثل الأزواج المختلفة من المشاهدات وقعت كلها على خـــط الانحدار فيكون بالتالى الانحراف المعيارى للتقدير ($\hat{y}$) مساويا صفرا • ويكون تقدير قيم (y) من قيم (x) ذو درجة عالية من الدقة • وعلى عكس ذلك ، فقد يكون خط الانحدار أفقيا تماما بمعنى أن المتوسط الحسابى للمتغير (y) يكون مساويا لقيمة (y) لجميع قيم المتغير (x) المختلفة ،وفى هذه الحالة فان معرفة قيمة (x) لن تساعد فى تقدير قيمة (y) • وفى هـــذه الحالة فان الخطأ المعيارى للتقدير .يكون مساويا تماما للانحراف المعيارى للمتغير (y) ،أى أن •

$$\sigma_{y.x} = \sigma_y$$

$$\sqrt{\frac{\sum(y-\hat{y})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum(Y-\bar{Y})^2}{N}}$$

ويكون فى هذه الحالة

$$\sum(Y-\hat{Y})^2 = \sum(Y-\bar{Y})^2$$

مما سبق يمكن القول بأن الحد الأدنى لقيمة الانحراف المعيارى للتقدير $\hat{Y}$ سيكون مساويـا صفرا وأن الحد الأعلى لقيمة الانحراف المعيارى للتقدير $\hat{Y}$ سيكون مساويا σ_y أى أن

$$0 \leq \sigma_{y.x} \leq \sigma_y$$

وبقسمة كل حد على σ_y وتربيعه فاننا نحصل على

$$0 \leq \frac{\sigma^2_{y.x}}{\sigma^2_y} \leq 1$$

والنسبة $\frac{\sigma^2_{y.x}}{\sigma^2_y}$ تساوى مربع معامل الارتباط البسيط للمجتمع ويعرف بـ (R^2)

ويطلق عليه معامل التحديد Coefficient of determination

ويكون تقدير معامل الارتباط البسيط من العينة مساويا

$$r = \frac{s_{\hat{y}}}{s_y} = \frac{s_{y.x}}{s_y}$$