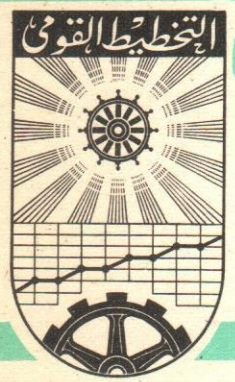
الجمهورية العربية المتحدة



معهد التخطيط القومى

مذكرة رقم ٧٦٦

دراسات
فى الاقتصاد القياسى
جزء (١)

دكتور
محمد جلال الدين أبو الدهب

مايو ١٩٦٧

القاهرة
٣ شارع محمد مظهر - بالزمالك

الآراء التى وردت فى هذه المذكـــــرة
بمثل رأى الكاتب ولاتمثل رأى المعهد ذاته

*

مقدمة

ماهية الاقتصاد القياسى :

يقصد بالاقتصاد القياسى ذلك العلم الذى يبحث فى تحديد وشرح القوانين الاقتصادية الكمية والتى تظهر فى حياتنا الاقتصاديه وذلك عن طريق استخدام الطرق الاحصائية المختلفة . فاذا نظرنا الى الموضوعات التى يبحثها اى اقتصادى فنجد ان اغلبها يتصل من قريب او بعيد بعلاقات كميه يحاول عن طريقها تفسير وشرح العلاقات الاقتصاديه السائده فى زمن ومكان معينين . مثال ذلك تقديرات الدخل القومى ، منحنيات الطلب والعرض ، اسعار الجملة والتجزئه اجمالى المدخرات ، الزياده والنقصان فى الاستثمارات ، الكميات المنتجة من السلع والخدمات والكميات المستهلكه منها ، معدلات الاجور وما الى ذلك . ولذا نجد ان استخدام الرموز الرياضية لتمثيل اى من هذه العلاقات امر طبيعى . ولذا يمكن القول بان الاقتصاد القياسى كان النتيجة الطبيعية للتطور التاريخى لعلم الاقتصاد . فالاقتصاد القياسى يمكن اعتباره انه مكملا لحلقة علم الاقتصاد وذلك عن طريق استعماله للنظريات الاقتصادية (ممثله فى صوره رياضيه) واختبار صلاحية وصحة هذه النظريات فى نفس الوقت . وبناء على ذلك يمكن القول بان علم الاقتصاد القياسى يتكون من قسمين اساسيين :

أولا : التمثيل الرياضى للنظريات الاقتصادية .

ثانيا : استخدام الطرق الاحصائيه لقياس العلاقات النظريه والتحقق من صحة هذه النظريات او عدم صحتها حتى يمكن قبولها او رفضها .

اى ان المجال الكلى لعلم الاقتصاد القياسى ينحصر فى التوقعات الكميه ، وقياس العلاقات الاقتصادية بالاضافة الى الاختبارات الاحصائيه لهذه التوقعات .

وهذا لايعنى ان الاقتصاد القياسى هو الطريقه الوحيده او حتى هو الطريقه المثلى لحل جميع المشاكل الاقتصادية . فمثلا دراسة الاطار القانونى للعلاقات الاقتصاديه ، والبحث التاريخى لمشاكل المناطق المتخلفه اقتصاديا ، والشرح اللفظى للعلاقات السائده فى حياتنا الاقتصادية وما الى ذلك تعتبر كلها من الطرق المفيده والمستخدمه بنجاح فى التحليلات الاقتصادية .

ومن التعريف السابق للاقتصاد القياسى يتبين انه يختلف عن كلا من النظريه الاقتصاديـــة والاقتصاد الاحصائى • ووجه الخلاف بين الاقتصاد القياسى والنظريه الاقتصاديه يظهر بوضوح فى أن الاقتصاد القياسى يحاول ان يصور احصائيا - بمساعدة العلاقات الكميه الثابته والمعينة - تلك القوانين التى تفرضها النظريه الاقتصاديه بصوره عامه • فمثلا الاقتصاد السياسى يبحث من بين موضوعات كثيرة القوانين الخاصه بعملية الانتاج مع تحديد العلاقات والقوانين التى تربط بين الكميات الاقتصاديـــة المعينه ، ومثال ذلك العلاقه بين معدلات الزياده فى وسائل الانتاج ومعدلات الزياده فى الاستهلاك النهائى • اما الاقتصاد القياسى فانه يبحث فى كيفية تحديد الصفات والخصائص الكمية لهذه العلاقات فى اقتصاد معين وليكن فى ج • ع • م فى سنة ١٩٥٨ مثلا •

وبالمثل فان النظرية الاقتصاديه تبحث فى اثر التغيرات فى الدخل القومى أو اثر التغيرات فى سعر سلعة معينة على الطلب عليها • فالنظريه الاقتصادية تقول انه عندما يزيد الدخل القومى فان الطلـــب على اغلب السلع والخدمات يزداد بالتالى • كذلك فان الطلب على سلعة معينه سيزداد بصوره عامـــة عندما ينخفض سعرها • اما علم الاقتصاد القياسى فانه يبحث فى الطرق التى يمكن بها تحديد وقيـــاس العلاقات الكمية الموجوده بين المتغيرات السابقه بصورة قاطعة • فيمكننا مثلا عن طريق الاقتصاد القياسى دراسة تأثير التغيرات التى حدثت فى اسعار الكيروسين فى ١٩٦٧ على الكميات المباعه منه او دراســة اثر الزياده المتوقعه فى الدخل القومى على الطلب على اللحم •

وتحل مشاكل الاقتصاد القياسى عن طريق استخدام طرق البحث الاحصائيه • لذا فان الاقتصـاد الاحصائى يمد الاقتصاد القياسى بالماده الحقيقيه التى تمكنه من تحديد القوانين الكميه التى تربـــط بين المتغيرات المدروسه • لذا فان نظام البحث بالاقتصاد القياسى لمشكلة ماقد لايتغير ولكن الارقـــام المتعلقة والخاصه بالمتغيرات تحت الدراسه ستختلف بطبيعة الحال من زمان الى آخر •

واول من استخدم كلمة الاقتصاد القياسى Economitrics سنة ١٩٢٦ كان الاقتصـــادى الاحصائى راجنر فريش Ragnar Frisch النرويجى الاصل • وقد صيغ الاصطلاح على وزن علـــم الاحياء القياسى Biometrics والذى ظهر فى اواخر القرن التاسع عشر والذى يستعمل الطـــرق الاحصائيه فى دراسات وابحاث علم الاحياء • وبمرور الزمن اصبح علم الاحياء القياسى علما مستقلا بذاته • ويجدر بالذكر هنا ان محاولات عديده لعرض العلاقات الاقتصاديه الكميه عن طريق استخدام الطـــرق الاحصائيه - اى بطرق الاقتصاد القياسى - قد اجريت فى ازمنه سابقه للوقت الذى اشتق فيه اصطـــلاح الاقتصاد القياسى •

ولقد ظهر علم الاقتصاد القياسى كعلم مستقل لدراسة الحياة الاقتصادية قبل الحرب العالمية الاولى وتطور مباشره وبسرعة بعد الحرب. ولقد تكونت فى ١٩٣٢ جمعية دوليه للاقتصاد القياسى والتى تقوم بنشر مجله Econometrica لنشر الابحاث الخاصة بذلك العلم.

واساسا فان علم الاقتصاد القياسى قد تطور فى الدول الرأسماليه ، وخلال العشرينيات قام الاتحاد السوفيتى ببعض الدراسات ولكن توقفت الابحاث الخاصه بالاقتصاد القياسى سنة ١٩٣٠. أن ظهور الاقتصاد القياسى وتطوره فى البلاد الغربيه وبالذات خلال فتره نمو ونجاح الاحتكار والرأسماليه لم يكن محض الصدفه. حيث ان المسائل والمشاكل الرئيسيه لبحوث الاقتصاد القياسى الاولى كانت تتعلق بالسياسه الاقتصاديه لكل من الدوله الرأسماليه وشركات القطاع الخاص الكبيره . ويمكن القول بان ابحاث الاقتصاد القياسى الاولى كانت تتركز حول الثلاثة اقسام الآتية :

١ - كان الغرض من ابحاث الاقتصاد القياسى الاولى هو التنبأ بالدورات الاقتصاديه فى النظام الرأسمالى . وهذا الاهتمام جاء نتيجة للفكرة التى كانت سائده من ان التنبؤ الدقيق بالدورات الاقتصاديه سيمكن الشركات الرأسماليه من أن تكيف نفسها فى الوقت المناسب لهذه التوقعات وبالتالى يمكنها تجنب الخسائر التى قد تحدث لهم فى فترات الركود او تمكنهم من استغلال فترات الرواج لزيادة ارباحهم.

٢ - والنوع الثانى من ابحاث الاقتصاد القياسى يتعلق بابحاث السوق وهذه تشمل الابحاث الخاصة بمرونة الطلب والعرض. وهذه الابحاث ظهرت ايضا نتيجة لحاجة الرأسمالى المحتكر وسياسة التدخل التى لجأت اليها بعض الحكومات الرأسمالية.

فكما نعلم جميعا فان المنتج تحت ظروف المنافسة التامة لايكون له اى تأثير على سعر ناتجه بما ان اجمالى ماينتجه يمثل جزءا صغيرا من اجمالى السوق. اى ان السعر يتحدد بعوامل خارجة عن ارادة المنتج. اما بالنسبة للمحتكر فالحالة تختلف تماما عن الحالة السابقة . فالمحتكر يمكنه التحكم فى الكميات المعروضة من ناتجه وبالتالى فيمكنه ان يتحكم فى السعر وبذلك يمكنه ان يحقق اكبر ربح . لذا فيكون من الواضح اهمية معرفة مرونة الطلب لناتج المحتكر وكذلك حساب السعر الامثل الذى يحقق اقصى ربحا له. كل هذا يوضح الاهمية التى اعطيت لابحاث الاقتصاد القياسى للسوق فى الفتره التى كان الاحتكار الرأسمالى سائدا فيها.

كذلك نلاحظ ان سياسات التدخل الحكومى التى لجأت اليها حكومة الولايات المتحدة بعد الحرب العالمية الاولى — والتى كان الهدف منها هو العمل على توطيد النظام الرأسمالى — كانت فى حاجة الى معلومات وبيانات خاصة عن حالة الاسواق سواء فى القطاع الصناعى او الزراعى ، فمثلا كان ومازال تدخل حكومة الولايات المتحده فى القطاع الزراعى على اشده . فالمعلومات الخاصه بمرونة الطلب او مرونة العرض للسلع الزراعية كانت فى غاية الاهمية حتى يمكن التنبأ بمدى نجاح السياسات السعرية المعينة .

٣ — ويعرف النوع الثالث من ابحاث الاقتصاد القياسى باسم البرمجة Programming. وهذا يشمل المشاكل والمسائل المتعلقه بالاقتصاد القومى الكلى او لقطاعات كبيره منه . والغرض من تلك الابحاث هو معرفة تأثير بعض القرارات الاقتصادية المعينة على الاقتصاد الكلى .

لنفرض مثلا ان الحكومة قد قررت زيادة انتاج الحديد بمقدار ١٠ آلاف طن . ويستلزم لتحقيق تلك الخطة العمل على التنسيق والربط بين عدد كبير من القرارات الاخرى . وتعتبر مشكلة التنسيق والربط بين الانشطه الاقتصاديه المستقله كنقطة البداية لتطور وتقدم نظرية البرمجة فى الاقتصاد القياسى . ولقد ظهر هذا النوع من الابحاث ايام الحرب العالمية الثانية ولم يكن ظهوره ايضا محض الصدفه . فمشكلة عنق الزجاجه قد ظهرت بكثره فى اقتصاد الدول المحاربة . فمثلا قد يتوقف انتاج الطائرات كنتيجة لنقص فى الكميات المعروضة من بعض عناصر الانتاج الضروريه . وهنا ظهرت فائدة طرق البرمجة للاقتصاد القياسى فى ايجاد حلول لتلك المشاكل ، وكذلك مشاكل التنسيق والربط بين مختلف الانشطه فى الاقتصاد الكلى فى فترة الحرب . ولقد استرعت نظرية البرمجه بعد انتهاء الحرب انظار الشركات الرأسمالية والتى كانت تولى مشكلة التنسيق بين الكميات المعروضه من عناصر الانتاج اهمية كبرى . ويمكن القول ايضا بأن هذا النوع من الابحاث كان وليد حاجة المحتكر الرأسمالى والحكومات الرأسمالية .

قد يتبادر الى الذهن سؤال هام عن مدى امكانية استخدام علم الاقتصاد القياسى فى حل مشاكل وتنظيم الاقتصاد القومى فى البلاد التى تطبق النظام الاشتراكى . مما سبق يتبين ان نظرية البرمجة تبحث فى كيفية وضع خطط معينة للاقتصاد القومى اولمختلف قطاعاته . ويمكن استخدام تلك الطرق فى وضع الخطط فى البلاد الاشتراكيه اذا توفرت البيانات والامكانيات لاستخدامها . كذلك يمكن الاستعانة بابحاث الاقتصاد القياسى للسوق فى البلاد الاشتراكيه لمعرفة وحساب رد الفعل الذى قد يحدث نتيجة لاتخاذ قرار اقتصادى معين .

طـرق البحـث العلمـــى

يستعمل الاقتصاديون فى ابحاثهم الاقتصاديه مايعرف بطريقة البحث العلمى . وبما ان الاقتصاد القياسى يهتم بالجانب الكمى من علم الاقتصاد ، لذا يمكننا القول بأنه حالة خاصة لعلم الاقتصـــاد والتى تكيف فيها الطرق العلميه العامة حتى يمكن استخدامها لتحليل البيانات الاقتصاديـــــة تحليلا كميا . ويجدر بنا ان نذكر هنا انه لايوجد شىء واحد يطلق عليه طريقة البحث العلمى . فالطرق العلميه المستخدمه تختلف من ميدان الى آخر كما انها تختلف من باحث الى آخر داخل نفس الميدان بالاضافة الى انها تختلف للباحث الواحد من بحث الى آخر . ولكن من السهل وضع نمط واحد يشمـــل الخطوط العريضه لكل البحوث العلميه . وهذا النمط يشمل اربعة خطوات رئيسيه :

١ — جمع البيانات والمعلومات

٢ — وضع الفرض او الفروض اى وضع حلول عامه تصف وتشرح العلاقه بين البيانات المجموعة .

٣ — التنبؤ والتوقع — وهو عبارة عن شرح او ايضاح نحصل عليه عن طريق استنتاج نتائج خاصـــة معينه من الفروض السابقه لم يكن من الممكن الوصول اليها عن طريق جمع البيانات فقط .

٤ — اختبار التنبؤات والتوقعات بالنسبه للحقائق المشاهده عن طريق الاستدلال الاحصائـــى .

أولا : جمع البيانات والحقائق :

يختار الباحث فى العادة المشكله التى يكون له ميل نحوها والتى يتوافر لها الحوافز والدوافع لايجاد حلول لها . فمثلا فى علم الاحياء قد تكون المشكله هى اكتشاف المعدل الذى تتكاثر به الخلايا المصابه بالعدوى تحت ظروف معينة . وفى علم النفس قد تكون المشكله استبيان رد الفعل الذى تقـــوم به بعض الحيوانات عندما تتعرض لمؤثرات معينه . وفى الاقتصاد قد تكون المشكله تحديد الطلب علـــى السجائر . ومهما اختلفت المشكله او اختلف الميدان فان الخطوه الاولى للباحث هى القيام بجمع كـــل مايمكن جمعة من بيانات ومعلومات وحقائق عن المشكله تحت البحث . كما انه يجب ان يأخذ فى اعتبـــاره نتائج الابحاث السابقه التى قد يكون لها اتصال بالمشكله تحت البحث . ففى حاله تقدير الطلب علـــى السجائر تكون البيانات فى صورة اسعار السجائر المختلفه ، الكميات المستهلكه من السجائر ، اسعـــار

السيجار واسعار تبغ الغليون بالاضافه الى بيانات عن الدخول وتوزيعها • كذلك فان البيانات قد تشمل معلومات وبيانات عن انظمه السوق • ومقدار البيانات ونوعها يتوقف على الحكم الشخصى للباحث بالاضافه الى طبيعه المشكله نفسها • ومدى اهميتها •

ثانيا : وضع الفروض

اذا نظر احدنا الى الظواهر المختلفه فى عالمنا هذا فانه يكون من الصعب عليه ان لايشعر بالرهبة ازاء التعقيدات المركبه التى سيلاحظها • لذا فانه يتحتم علينا اذا اردنا ان نتفهم ظاهرة ما ان نبدأ بفروض مبسطه نعتبرها كنقطه بداية لتحليلنا لهذه الظاهره • كما انه من المعلوم ان مجرد جمع البيانات والمعلومات عن الظاهره تحت البحث لن يمدنا باى شرح اوايضاح لسلوك بعض المتغيرات فى البيانات المجموعه • لذا وجب على الباحث ان يكتشف العلاقات العامه التى قد تتواجد بين المتغيرات المشاهده • فمثلا اذا لاحظ الباحث ان تغيرا قد طرأ على متغير ما فيجب عليه ان يكتشف وان يتعرف على الاسباب التى ادت الى هذا التغير • فقد يكون هذا التغير ناتج عن فعل متغير آخر •

لذا فتكون الخطوه التاليه امام الباحث هى وضع فرض او شرح مبدئى للظاهره تحت البحث ويبدأ فى تنسيق وصياغة الحقائق المعروفه ولعمل ذلك فعليه ان يضع بعض الفروض مثل الفرض القائل بان المستهلكين يحاولون دائما الحصول على اقصى اشباع لرغباتهم • وفى اثناء ذلك يتبين للباحث ان هناك بعض المتغيرات ذات اهمية كبرى فى حين ان البعض الآخر تليها فى الاهميه والبعض الآخر يمكن اهماله نظرا لعدم ارتباطه بالمشكله تحت البحث • فمثلا اسعار المثلجات قد تعتبر غير ذات قيمة عند تحليل الطلب على السجائر رغم انه قد يكون لها بعض التأثير فى الحقيقه ، ولكن هذا التأثير قد يكون صغير جدا لدرجة انه يمكن تركه حتى يمكن التحكم فى المشكله •

ثالثا : التنبؤ الاستدلالى :

ولايقصد بالتنبؤ هنا معرفة وشرح حوادث ومشاكل المستقبل ولكن جرت العاده ان يحاول الباحثون ان يتنبأوا بحوادث وقعت بالفعل ولكنها لم تلاحظ بعد ، اى بمعنى انهم يقومون بوضع تقارير ايضاحيه عن بعض الحوادث الغير معروفه وتستعمل هذه عند وضع الفروض • فمثلا فى علم

التاريخ نجد ان المؤرخ قد يتنبأ بأن موت ملك ماكان فى سنة ٨٠٣ قبل الميلاد مستندا على بعض الوقائع والظروف الاخرى المعروفه . فاذا اثبت البحث فى الآثار والسجلات المدونة عليها (وهذه حقائق بالطبع) ان الوفاه كانت فى نفس السنة فيكون التنبؤ قد تأكد . اما اذا اثبتت هذه السجلات ان الوفاة وقعت فى سنه ٦٠٣ قبل الميلاد فيكون التنبؤ قد نقض ووجب رفضه . وفى الاقتصاد فاننا نفرض أن المستهلكين يعملوا دائما على الحصول على اكبر منفعة تحت ظروف معينه . ويتضمن هذا الفرض المختصر نظرية الطلب التى تقول : ان العلاقه بين الكميات المطلوبه من اى سلعه او خدمه واسعارها هى علاقة عكسيه عندما تبقى جميع العوامل الاخرى ثابته . ويلاحظ ان هذه قاعده عامه يمكن تطبيقها على أى سلعه وليس بالتحديد على القمح اوالساعات فقط . ولنأخذ حالة بسيطه لايضاح ذلك فلنفرض ان الكميات المعروضه من السجائر قد زادت فى مدينه القاهره ، وان اسعار السلع المرتبطه بها كذلك مستوى الدخول لم يتغير ونلاحظ بالرغم من ذلك ان الطلب على السجائر لم يتغير ، فيمكننا التنبؤ فى هذه الحاله بان سعر السجائر فى مدينة القاهره قد انخفض اوانه سينخفض فى المستقبل .

رابعا : الاستدلال الاحصائى :

والخطوه الاخيره هى اختبار التنبؤات التى امكن وضعها اثناء تحليلنا للمشكله . فاذا تعارضت الحقائق المشاهده مع التنبؤ فان ذلك يثبت عدم صحة الفرض اوالنظريه لذا وجب رفضها . وفى حالة ما اذا تطابق التنبؤ مع الحقائق الملاحظه فاننا نقول ان الفرض اوالنظريه كان صحيحا . اى بمعنى أن الفرض لم نثبته بل اننا فشلنا فى ان نثبت عدم صحته . وعموما فاننا نقبل الفروض العامه طالما ان التنبؤات المبنيه عليها لم تتعارض مع الحقائق التى نلاحظها اونشاهدها . واختبار الفروض قد يأخذ صورة التجارب المعمليه فى بعض الميادين مثل الطبيعه والكيمياء . وفى ميادين اخرى مثل علم الفلك وعلوم الاجتماع فانه يتعذر اجراء التجارب الميدانيه والتى يمكننا عن طريقها قبول الفروض اورفضها . وذلك لانه من المستحيل التحكم فى البيئه المحيطه بالمتغيرات تحت البحث وخاصة اذا استلزم الامر التخلص من تأثير جميع المتغيرات فى البيانات حتى يمكن قياس تاثير احد المتغيرات على متغير آخر ولذا تستعمل فى هذه الحالات بعض الاختبارات الاحصائيه الخاصة .

الوسائل الرياضية المستخدمة فى الاقتصاد القياسى

Mathematical Tools Used In Econometrics

تمد الرياضة العاملين بالاقتصاد القياسى بعديد من الوسائل الرياضية المختلفة التى يمكن استخدامها فى بناء وتركيب النماذج الاقتصادية • وفيما يلى أهم هذه الوسائل :

١ ـ الهندسة التحليلية :

وهذه تساعد الباحث فى تمثيل البيانات والمعلومات المتوفرة لديه تمثيلا بيانيا ، أى أنها تمكنه من تحويل المعادلات الاقتصادية الى رسوم بيانية ، والرسوم البيانية الى معادلات •

٢ ـ الدوال :

اذا كانت ص = د (س)

فيقال أن الكمية ص دالة للكمية (س) أى أنه يمكن تحديد وتعيين قيمة ص المقابلة لأى قيمة تعطى لـ س ، أو اذا كان أى تغير فى قيمة س ينتج عنه تغير مناظر فى قيمة ص •

فمثلا حجم الكرة يعتبر دالة لنصف قطرها ، ومساحة المربع دالة لطول الضلع فيه ، ومساحة المستطيل دالة لكل من الطول والعرض فيه وهذا يعنى أنه اذا تغير طول ضلع المربع فيصاحب هذا تغير فى مساحة المربع نفسها ، كذلك قد يكون المتغير ص دالة لمتغير واحد أو متغيرين كما فى حالة مساحة المستطيل • لذا يمكن القول بأن اصطلاح دالة قد اشتق ليصور العلاقة بين المتغيرات •

وتعتبر ص = د (س) دالة عامة • أى أنه يوجد علاقة بين ص ، س ولكن نوع هذه العلاقة غير محدد أى غير مبين • أى أنه عندما تتغير س فان ص يحدث فيها تغير بطريقة ما •

ولتوضيح فائدة التمثيل الرياضى للعلاقات عن طريق الدوال فانه يمكننا أخذ مثال من الاقتصاد وليكن دالة الطلب على سلعة معينة •

دالة الطلب ط = د (ث)

بفرض ط تمثل الكميات المطلوبة من السلعة ،

ث ثمن هذه السلعة •

وهذه الدالة تعنى أن الكميات المطلوبة من السلعة تتوقف على أثمانها ، وهذه دالة عامة أى أنها لم تحدد العلاقة الكمية بين المتغيرين . فاذا وضعت دالة الطلب فى صورة المعادلة الآتية :

ط = ١٢٤ — ٢ ث

فتكون هذه دالة صريحة أو محددة للعلاقة بين الكميات المطلوبة من السلعة المعينة وثمنها . ويلاحظ أنها دالة متناقصة أى عندما يرتفع الثمن فان الكميات المطلوبة تقل .

وهناك أنواع مختلفة من الدوال يمكن استعراضها فى الآتى :

١ — دوال ذات متغير واحد :

ان الدالة ص = د (س) تعنى أن هناك علاقة بين ص ومتغير واحد س . لذا يطلق عليها دالة ذات متغير واحد . ومن بين الدوال ذات المتغير الواحد ما يلى :

أ) الدوال الخطية : ويكون المتغير المستقل من الدرجة الأولى فقط . وتسمى فى بعض الأحيان دالة من الدرجة الأولى . مثال :

ص = ٣ س (١) ، ص = ٥ + ٣ س (٣)

ص = ٤ — ٢ س (٢) ، ص = أ + ب س (٤)

والمعادلة رقم (٤) تمثل معادلة الخط المستقيم فى صورتها العامة ، حيث أ ، ب يعتبران ثوابت المعادلة ، ويمثل أ الجزء المقطوع من المحور الصادى ، ب ميل الخط المستقيم .

ب) الدوال التربيعية : أى أنها من الدرجة الثانية . حيث نجد أن المتغير المستقل أو الأصلى قد يظهر بأى قيمة وبشرط أن لا يتعدى القوة التربيعية . مثال :

ص = ٢ + س^{٢} ، ص = ٣ س — ٤ س^{٢}

ص = ٣ — ٢ س + ٧ س^{٢} ، ص = أ + ب س + حـ س^{٢}

والأخيرة هى الصورة العامة للدالة التربيعية وتكون أ ، ب ، حـ هى ثوابت المعادلة .

حـ) دوال تكعيبية : ويظهر فيها المتغير الأصلى بأى قوة وبشرط أن لا يتعدى الدرجة الثالثة • ويقال عليها إنها دوال من الدرجة الثالثة • مثال :

ص = ٣ — س^{٣} ، ص = ٧ س — ٣ س^{٢} + ٨ س^{٣}

ص = ٤ — ٢ س + ١٧ س^{٣} ، ص = أ + ب س + حـ س^{٢} + د س^{٣}

والأخيرة هى الصورة العامة للدالة التكعيبية وتكون أ ، ب ، حـ ، د هى ثوابت المعادلة •

د) أنواع أخرى من الدوال :

١ — دالة أسيه Exponeutial Function : ص = ٦ + ٢ — س

٢ — دالة بوغاريتمية Logarithmic Function : ص = لو س

٢ — دوال ذات متغيرين أو أكثر :

ومثال ذلك ص = د (س ، ع ، ز)

أى أن هناك علاقة بين المتغير التابع ص والمتغيرات س ، ع ، ز • ويمكن كتابة العلاقة بين المتغير التابع ص وعديد من المتغيرات المستقلة وليكن عددها (ن) باستخدام رمز واحد وليكن س وترقيمه بأرقام مختلفة للتمييز بين المتغيرات المختلفة • مثل

ص = د (س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ ..... س$_{ن}$)

ولنعود الى مثالنا من الاقتصاد والخاص بدالة الطلب فكما نعلم فأن الكميات المطلوبة من سلعة ما تتوقف على متغيرات أخرى بجانب سعرها نفسه ، ومن المتغيرات الهامة الواجب أخذها فى الاعتبار أسعار السلع البديلة ، وأسعار السلع المكملة ، دخل المستهلك واختلاف الأذواق • والقول بأن الكميات المطلوبة من سلعة ما تتوقف على سعرها كان يعنى ضمنيا أننا فرضنا ثبات المتغيرات الأخرى • فاذا أردنا ادخال المتغيرات الأخرى فى دالة الطلب للسلعة س فتكون صورتها العامة كالآتى :

ط$_{س}$ = د (ث$_{س}$ ، ث$_{ص}$ ، ث$_{ز}$ ، أ ، ع)

بفرض أن ط س الكميات المطلوبة من السلعة س ،

ث س ثمن السلعة س ،

ث ص ثمن السلعة ص ،

ث ز ثمن السلعة ز ،

أ مستوى الدخل للمستهلكين ،

ع مقياس لتذوق المستهلكين .

فاذا كانت هذه الدالة من الدرجة الأولى لكل المتغيرات المستقلة فانها قد تأخذ الشكل الآتى :

$$ط_س = ٢٨ - ١٤ث_س + ٢ث_ص + ٣ر٠ث_ز + ٧ر٠أ + ٣٠ر٠ع$$

فاذا عرفنا قيم كل المتغيرات المستقلة فانه يمكننا التنبأ بالكميات المطلوبة من السلعة س .

٣ — التفاضل :

ويقصد به الطريقة الرياضية التى تمكننا من ايجاد معدل التغير فى متغير ما بالنسبة لمتغير آخر . فاذا كانت ص متغير غير مستقل أى تابع ويعتمد على المتغير المستقل س فانه عن طريق حساب التفاضل يمكن ايجاد معدل التغير فى ص بالنسبة الى س . أى بمعنى أنه اذا حدث تغير بسيط فى المتغير س . فانه يمكن معرفة معدل التغير فى ص . فمثلا فى تحليل الطلب لسلعة ما فنجد أنه من الأهمية توفر مقياس لمعدل التغير فى الكميات المطلوبة من السلعة المعينة نتيجة للتغير فى أثمانها . كذلك فانه من المفيد جدا معرفة معدلات تغير تكاليف الوحدة الانتاجية عندما يتغير حجم الناتج ، أو معرفة معدل التغير فى الانفاق الاستهلاكى الكلى كنتيجة للتغير فى مستوى الدخول .

النهايات : لنفرض أن $ص = د(س) = \frac{١ - س^{٢}}{-٢\sqrt{س^{٢} + ٣}}$

فاذا كانت س = ١ فان المقدار ١ — س^{٢} = صفر ، كذلك فان (٢ — $\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}$) = ٢ — $\sqrt{٤}$ = ٢ — ٢ = صفر . من هذا نرى أن د (١) لا يمكن تعريفها من هذه المعادلة وذلك لأن التعويض بـ (١) بدلا من س فى المعادلة السابقة سنحصل على $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهذا يعتبر رقما غير محدد . لذا يمكننا التعويض بدلا من س بعدد قريب جدا من (١) وبذلك يمكننا الحصول على قيمة للدالة . فعند اختيارنا للمتغير س قيمة قريبة جدا من الواحد (سواء كانت موجبة أو سالبة) فان كلا من البسط والمقام سيكونان قريبان من الصفر .

وكلما قربت قيمة س المختارة من الواحد كلما قرب البسط والمقام من الصفر ولكن طالما أن س لا تساوى الواحد فانه يمكن تحديد وتعريف الدالة .

ولكن ما زالت أمامنا مشكلة تحديد الكسر الذى يقرب منه قيمة الدالة عندما تقرب قيمة س من الواحد الصحيح . لنفرض أنه يمكننا التخلص من مقام الكسر كالآتى :

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{١ - \text{س}^{٢}}{٢ - \sqrt{\text{س}^{٢}+٣}} = \frac{١ - \text{س}^{٢}}{٢ - \sqrt{\text{س}^{٢}+٣}} \times \frac{٢ + \sqrt{\text{س}^{٢}+٣}}{٢ + \sqrt{\text{س}^{٢}+٣}}$$

$$= \frac{(١ - \text{س}^{٢})(٢ + \sqrt{\text{س}^{٢}+٣})}{٤ - (\text{س}^{٢}+٣)} = \frac{(١ - \text{س}^{٢})(٢ + \sqrt{\text{س}^{٢}+٣})}{١ - \text{س}^{٢}}$$

$$= \frac{٢ + \sqrt{\text{س}^{٢}+٣}}{١} \times \frac{١ - \text{س}^{٢}}{١ - \text{س}^{٢}}$$

من هذا نرى أن الدالة نفسها أمكن اعادة صياغتها بالطريقة التى تسمح لنا معرفة القيمة التى تقترب منها عندما تقترب س من الواحد الصحيح ، فمن الواضح أن $\frac{١ - \text{س}^{٢}}{١ - \text{س}^{٢}} = ١$ لأى قيمة للمتغير س لا تساوى واحد . وحيث أن المقدار (٢ + $\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}$) يقرب من ٤ عندما تكون س قريبة من الواحد فان د (س) تقترب قيمتها من ٤ باختيار قيمة لـ س قريبة من الواحد ولكن لا تساويه .