جمهورية مصر العربية

معهد التخطيط القومى

سلسلة مذكرات خارجية

مذكرة خارجية رقم (٩٤٦)

محاضرات فى الطرق الكمية

اعداد

دكتور محمد سلطان أبو على

مايو ١٩٧٠

جمهورية مصر العربية – طريق صلاح سالم – مدينة نصر – القاهرة – مكتب ريد رقم ١١٧٦٥

A.R.E Salah Salem St. Nasr City , Cairo P.O.Box : 11765

الآراء التى وردت فى هذه المذكـــــــــــــــــــرة
تمثل رأى الكاتب ولاتمثل رأى المعهد ذاتـــــــــــــــه

جدول المحتويات

		رقم الصفحة
الفصل الاول :	اساسيات نظرية الاحتمالات	١
الفصل الثانى :	نظرية العينات والاستنباط الاحصائى	٢٨
الفصل الثالث :	الانحدار البسيط والارتباط	٥٤
الفصل الرابع :	الانحدار المتعدد والارتباط	٨٥
الفصل الخامس :	مشكلات المتسلسلات الزمنية	١٠١
الفصل السادس :	اوليات بناء النماذج الاقتياسية	١١١
الفصل السابع :	مشكلة التعرف	١١٧

تقديـــــــــم

تستلزم عمليه التخطيط دراسه الظواهر الاقتصاديه المختلفه ومحاوله تفهم الطريقة التى ترتبط مع بعضها البعض بغرض تسيير الاقتصاد القومى فى الاتجاه الذى يشبع اكبر قدر من رغبات المجتمع.

ولاشك ان مجموع هذه العلاقات الاقتصادية معقدة يصعب معالجتهـــا كما هى فى الواقع . ولذلك نلجأ الى شىء من التجريد عن طريق وضع نموذج يساعدنا على تفهم هذه العلاقات . ويستلزم الامر ان يكون النموذج قابلا للتقدير والاستخدام. والا فقد اهميته العملية .

ومن اهم مستلزمات هذه العمليه الالمام بالطرق الكمية المستخدمة فـــى هذا المجال . وهذه المحاضرات محاولة لمعالجة اهم الافكار الكمية المستخدمـــة فى الاقتصاد تهدف الى زيادة كفاءة العاملين فى المجال التخطيطى والسعـــى نحو استخدام هذه الاساليب بطريقة اكثر فعالية .

الفصل الاول

اساسيات نظرية الاحتمالات

عرفنا الاقتياس على انه استخدام للرياضيات والاحصاء فى تقدير واختبار النظريات الاقتصادية وذلك بطريقة كمية . ولذلك يتعين علينا ان نتعرض للاحصاء ولو بشئ من التبسيط. ومن المعروف ان النظرية الاحصائية تقوم على قوانين الاحتمالات وهذا ما سنعالجه فى هذا الفصل .

ويهدف القياس الاحصائى فى الاقتصاد ، شأنه فى ذلك شأن التجارب المعملية فى العلوم الطبيعية الى ايجاد علاقات يمكن التنبؤ بها بين حوادث معينة واسباب هذه الحوادث . ومن الممكن التحكم معمليا بدرجة او اخرى فى الظروف الخارجية المحيطة بحادثة ما والاسباب التى تؤثر فيها . ولذلك يستطيع الباحث فى العلوم الطبيعية تغيير الاسباب الموضوعة ثم يختبر ما اذا كانت الحادثة تسير فى الطريق المتنبأ به فى ظل هذه الظروف ام لا . وحتى مع التحكم فى هذه الظروف فان نتائج التجربة تظل خاضعة للتغيير تبعا لاسباب لا يستطيع الباحث التحكم فيها او لا يعلمها . وهذه الاضطرابات او التأثيرات او الاخطاء العشوائية هى التى تخلق الحاجة الى مفاهيم الاحتمالات .

وبالمثل نحدد بعض الظواهر فى مجال الاقتصاد كمسببات لظواهر اجتماعية اخرى . فمثلا نفترض ان الاستهلاك القومى يتحدد او " يتسبب" بالدخل القومى . ولا نستطيع اعداد تجربة فى معناها المحدد فى علم الاقتصاد نظرا لاننا لا نستطيع التحكم فى الاسباب والظروف المحيطة بحادثة ما . ولكننا نستطيع ان نحدد اسبابا

للحادثة — مثال ذلك ان الدخل هو "سبب" الاستهلاك • وعند قياس او اختبار العلاقة بين السبب والنتيجة نجد ان النتيجة قد تأثرت باسباب غير الاسباب الموضوعة• ولذلك تلعب الاخطاء العشوائية وفكرة الاحتمال دورا هاما فى مجال الاقتياس ايضا •

اولا : مفهوم الاحتمال :

من الممكن ان نطلق على متغير عشوائى ما اسم متغير احتمالى • واذا كنا نستطيع اعطاء المتغير المنتظم قيما محدده مؤكدة فاننا لا نستطيع اعطاء المتغير العشوائى الا قيما لها درجة محددة من الاحتمال • ولكن ما معنى هذا الاحتمال؟ لكى نجيب على هذا السؤال اجابة وافية تجب دراسة نظرية المجموعات التي تعتبر اساسا نظرية الاحتمالات • الا اننا سنتجنب ذلك وسنعالج هذا الموضوع بطريقة عملية•

ويبدأ التعريف الاحصائى للاحتمال بفكرة التوزيع النسبى • لنفرض اننا سنرمى عملة مائة مرة ، واننا سنرميها بطريقة عشوائية• ومن المعروف انه لا يمكن التنبؤ بطريقة محددة بما اذا كانت النتيجة صورة ام رقما • وستحدد القوى العشوائية الجانب الذى ستقع عليه العملة • ولنفرض اننا حصلنا على ٤٥ رقما فى المائة رمية ،فاننا نقول بأن التكرار النسبى للارقام فى هذه التجربة هو $\frac{٤٥}{١٠٠}$ • وعموما فان التكرار النسبى لحادثة ما عبارة عن عدد حدوث هذه الحادثة مقسوما على عدد المحاولات فى التجربة•

ولنضرب مثالا آخرا ، عند دراسة السكان قد يرغب الباحث فى تحديد نسبة المواليد الذكور• ونتساءل اولا ما هى التجربة التى سيجريها؟ فى هذه الحالة نعتبر ان كل حالة ميلاد عبارة عن محاولة فى التجربة ، وان مجموع المواليد المسجلين هو التجربة • ولنفرض ان مجموعة البيانات المنشورة تظهر ان هناك حالة ميلاد قد حدثت خلال فترة محددة من الزمن ، وان س من هذه الحالات كانت ذكورا • ولذلك يكون التكرار النسبى للمواليد الذكور هو $\frac{س}{ن}$ •

والاحتمال هو عبارة عن قيمة التكرار النسبي عند الحد كلما اقترب عدد المحاولات من مالا نهاية ، وعلى فرض ان سلسلة التجارب عشوائية. فاذا اجرينا عددا من التجارب فان نسبة عدد وقوع حادثة ما الى مجموع المحاولات يقترب من العدد ح. وعموما يزيد اقتراب هذه النسبة من ح كلما كبر عدد المحاولات. ونعرف احتمال حادثة ما على انه ح . وبالرموز نقول ان احتمال حدوث حادثة ث اى أ (ث) هو

$$أ\ (ث) = \text{نهـا}_{ن \leftarrow \infty} \frac{س}{ن} = ح \qquad (١)$$

حيث ن = عدد المحاولات العشوائية ، س = عدد مرات وقوع الحادثة.

وتتطلب فكرة الاحتمال ان تكون سلسلة المحاولات عشوائية. ونعنى بالسلسلة العشوائية ان اى اختيار تحكمى من ن محاولة يعطى نفس قيمة ح لكل محاولة. فاذا افترضنا اننا نختار كل محاولة ثالثة من مجموع ن محاولة . فاذا حصلنا على $ن_٣$ محاولة بحيث تكون $ن_٣$ اقل من ن وان الحادثة موضع المشاهدة تحدث $س_٣$ مرة فى $ن_٣$ محاولة . فاذا كانت السلسلة الاصلية المكونة من ن محاولة عشوائية حقا فاننا نجد ان

$$أ\ (ث) = \text{نهـا}_{ن_٣ \leftarrow \infty} \frac{س_٣}{ن_٣} = ح \qquad (٢)$$

حيث تعادل ح فى المعادلة رقم (٢) نفس القيمة فى المعادلة رقم (١). ثم نفترض اختيار كل محاولة سابعة والتى تعطينا $ن_٧$ محاولة منها $س_٧$ مرة تظهر فيها الحادثة موضع البحث.

$$أ\ (ث) = \text{نهـا}_{ن_٧ \leftarrow \infty} \frac{س_٧}{ن_٧} = ح \qquad (٣)$$

وذلك اذا كانت السلسلة الاصلية عشوائية • ونستطيع تكرار هذه العملية لاى عـــدد من الاختبار الافتراضى • وعموما نقول بأن السلسلة المكونة من ن محاولة والتى يظهـر فيها س مرة الحادثة ث عشوائية اذا اخترنا ن/ محاولة من السلسلة الاصلية المكونة من ن محاولة بأى طريقة تحكمية لكى نحصل على س/ مرة من الحادثة ث فان

$$\text{أ (ث)} = \text{نهـــا}_{\text{ن/} \leftarrow \infty} \frac{\text{س/}}{\text{ن/}} = \text{نهـــا}_{\text{ن} \leftarrow \infty} \frac{\text{س}}{\text{ن}} = \text{ح} \qquad (٤)$$

وقد يكون من المفيد فى بعض الاحيان كتابة الاحتمال بطريقة اخرى • فنرمـز للحادثة بالرمز ث ويكون لدينا ن مشاهدة (او محاولة) عن ث • ونعرف المتغـير س بأنه $\text{س}_{\text{ر}}$ = ١ اذا وقعت الحادثة ث فى المشاهدة رقم ر ، $\text{س}_{\text{ر}}$ = صفر اذا لـم تقع الحادثة فى المشاهدة رقم ر• ونرمز لاحتمال الحادثة ث بالرمز أ (ث) بحيـث تكون

$$\text{أ (ث)} = \text{نهـــا}_{\text{ن} \leftarrow \infty} \frac{١}{\text{ن}} \text{مجـ}_{\text{ر} = ١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} = \text{ح} \qquad (٥)$$

وفى هذه الحالة يكون لدينا $\frac{\text{س}_{١}}{\text{ن}} + \frac{\text{س}_{٢}}{\text{ن}} + \cdots + \frac{\text{س}_{\text{ن}}}{\text{ن}}$ بحيث تقترب ن مـن مالا نهاية • ومن السهل ان نرى ان المعادلة رقم (٥) تناظر الصيغة رقـم (١) فحيث س = ١ اذا وقعت الحادثة ، س = صفر اذا لم تقع فان هذا المجموع يعطـى التكرار النسبى لهذه الحادثة كلما كبر عدد المشاهدات بحيث يقترب من مالا نهايـة•

وبالرغم من ان فكرة الاحتمال مجردة الا انه يمكن مشاهدتها تطبيقيا وذلـك لانها تعادل التكرار النسبى • ونقدر الاحتمالات من واقع النتائج التجريبية• ولنأخـذ مثال العملة غير المتحيزة مرة اخرى • وتكون حادثتنا هى ظهور الرقم ونتساءل عـن

احتمال ظهور الرقم اذا رمينا العملة بطريقة عشوائية ؟ ولكى نجيب على هذا السؤال نقوم بالقاء العملق ن مرة ثم نقدر الاحتمال من التكرار النسبى . ونعرف المتغير العشوائى س$_ر$ بحيث تكون س$_ر$ = ١ اذا ظهر الرقم فى الرمية ر ، س$_ر$ = صفر اذا لم يظهر الرقم فى الرمية ر . ولنفترض ان عدد المحاولات يساوى ثلاثين . ومن الممكن ان تكون نتائج التجربة هى المبينة فى الجدول رقم ١ حيث ترمز م للرقم ، هـ للصورة ونجد ان التكرار النسبى للرقم فى الثلاثين محاولة هو $\frac{١٦}{٣٠}$.

جدول رقم (١)

المحاولة	النتيجة	س$_ر$	المحاولة	النتيجة	س$_ر$	المحاولة	النتيجة	س$_ر$	المحاولة	النتيجة	س$_ر$
١	م	١	٩	هـ	صفر	١٧	هـ	صفر	٢٤	هـ	صفر
٢	م	١	١٠	م	١	١٨	م	١	٢٥	م	١
٣	هـ	صفر	١١	م	١	١٩	هـ	صفر	٢٦	هـ	صفر
٤	م	١	١٢	هـ	صفر	٢٠	م	١	٢٧	م	١
٥	هـ	صفر	١٣	م	١	٢١	م	١	٢٨	هـ	صفر
٦	هـ	صفر	١٤	هـ	صفر	٢٢	هـ	صفر	٢٩	م	١
٧	هـ	صفر	١٥	م	١	٢٣	م	١	٣٠	هـ	صفر
٨	م	١	١٦	م	١						

ونختبر عشوائية هذه السلسلة عن طريق اختبار الحوادث الزوجية فقط اى رقم ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٠٠٠ ، ٣٠ . فيكون عندنا خمس عشرة محاولة التكرار النسبى للرقم بها هو $\frac{٧}{١٥}$. وهذه النسبة قريبة جدا من التكرار النسبى للسلسلة الاصلية . ونتيجة اختيار المحاولات ذات الارقام الفردية هى $\frac{٩}{١٥}$ وهى لاتختلف كثيرا عن التكرار النسبى

الاصلى اذا اخذنا فى الحسبان صغر عدد المحاولات ٠ ولقد دلت التجربة على انه اذا زاد عدد المحاولات الى ٣٠٠٠٠ مثلا بدلا من ٣٠ مرة فقط فيقترب التكرار النسبى من $\frac{١}{٢}$ ٠ ولهذا نقول ان احتمال ظهور الرقم هو

$$أ (م) = \text{نهـا}_{ن \leftarrow \infty} \frac{س}{ن} = \frac{١}{٢} \qquad (٦)$$

ويتراوح احتمال وقوع حادثة ما بين صفر وواحد صحيح ٠ وعادة ما يكون نسبه بين هذين الرقمين ففى مثال رمى العمله لا نستطيع الحصول على عدد من الصور يزيد عن عدد الرميات ، ولا يمكن ان يقل عدد مرات ظهورها عن الصفر ٠ وكذلك لا يمكن ان يزيد عدد المواليد الذكور عن اجمالى عدد المواليد ، او الا يكون هناك مواليد ذكور على الاطلاق ٠ اما اذا كان التكرار النسبى لحادثة ما يساوى واحد فان الحادثة تقع باستمرار فى ن محاولة ، واذا ساوى صفرا فان الحادثة لا تقع على الاطلاق فى ن محاولة ٠ ومن ثم فان احتمال التأكد هو ١ واحتمال الاستحاله يساوى صفرا ٠ ويعبر الاحتمال المتراوح بين صفر وواحد صحيح على وجود عدم التيقن ٠

ومن هذه العلاقة نستنبط علاقة اخرى وهى انه اذا كان احتمال وقوع حادثة يعادل أ (ث) فان احتمال عدم وقوعها يساوى ١ ـ أ (ث) ٠ فاذا كان احتمال ظهور الصورة هو $\frac{١}{٢}$ فان احتمال ظهور الرقم يساوى ١ ـ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ ٠ واذا كان احتمال وقوع حادثة معينة = $\frac{١}{٥}$ فان احتمال عدم وقوعها يساوى ١ ـ $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٤}{٥}$ وهكذا ٠

ثانيا : حساب الاحتمالات :

لنفترض ان احتمال وقوع حادثة ما هو ح وان احتمال عدم وقوعها هـــو ل = ١ — ح . واذا كان لدينا ن محاولة والتى نراقب فى كل منها وقوع حادثـة ام لا . فما هو احتمال وقوع الحادثة س مرة فى ن محاولة مستقلة ؟ .

لكى نجيب على هذا السؤال يجب ان نعرف التوافيق . والمقصود بالتوافيـــق هو عدد المرات التى بواسطتها يمكن اختيار س شيئا من ن اشياء مختلفة . ونحصل على ذلك من واقع الصيغة التالية :

$$\text{ن ق س} = \frac{\text{ن !}}{\text{س ! (ن — س)!}}$$

اى ان توافيق س شيئا من ن شيئا مختلفا يساوى مضروب ن مقسوما علـــى مضروب س فى مضروب الفرق بينهما . حيث مضروب ن (ن !) = ن (ن — ١) (ن — ٢) ... (٣) (٢) (١) .

ولكى نحصل على احتمال وقوع الحادثة ث عدد قدره س مرة فى ن محاولـــة نضرب معامل ذى الحدين فى الاحتماليين ح ، ل مرفوعين للقوتين س ، (ن — س) علـى التوالى اى :

$$\text{أ (ث س)} = \text{ن ق س ح س ل (ن — س)}$$

وترمز ث س الى وقوع الحادثة ث عدد من المرات قدره س من مجموع محاولات قدره ن محاولة .

فاذا افترضنا اننا رمينا عملة غير متحيزة خمس مرات فما هو احتمال ظهور الصورة في ثلاث مرات منها ؟ وفي هذه الحالة ن = ٥ ، س = ٣ واحتمال ظهور الصورة ح = $\frac{١}{٢}$ واحتمال ظهور الرقم ل = $\frac{١}{٢}$ وبذلك تكون قيمة الاحتمال هي

$$أ\ (ث_{٣}) = {}^{٥}ق_{٣}\ ح^{٣}\ ل^{٢} = \frac{!٥}{!٣\ !٢}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = \frac{٥}{١٦}$$

اما اذا رمينا زهرة النرد ثلاث مرات فما هو احتمال ظهور "خمسة" مرتين منها ؟ بتطبيق نفس القاعدة حيث ن = ٣ ، س = ٢ ، ح = $\frac{١}{٦}$ ، ل = $\frac{٥}{٦}$ نجد ان

$$أ\ (ث_{٥}) = {}^{٣}ق_{٢}\ ح^{٢}\ ل = \frac{!٣}{!١\ !٢}\left(\frac{١}{٦}\right)^{٢}\left(\frac{٥}{٦}\right) = \frac{٣٠}{٤٣٢} = ٠٫٠٦٩$$

ثالثا : قوانين الاحتمالات :

قد تكون مشكلة الاحتمالات اكثر تعقيدا من الحالات السابق بيانها . مثال ذلك احتمال وقوع الحادثين ث ، ف ، او احتمال وقوع الحوادث ث ، ف ، ح معا . ولذلك وضعت قواعد لحساب مثل هذه الاحتمالات نوردها فيما يلي :

١ — قاعدة الجمع للحوادث المانعة تبادليا :

اذا كانت حادثتان ث ، ف مانعتين تبادليا ، اى ان وقوع احداهما يحول دون وقوع الاخرى ، فان احتمال وقوع ث أو ف يساوى مجموع احتماليهما المنفصلين :

$$أ\ (ث\ أو\ ف) = أ\ (ث) + أ\ (ف)$$

فاذا فرضنا سحب احد اوراق اللعب عشوائيا فما هو احتمال الحصول على عشرة قلب (نسمي هذه الحادثة ث) او ثمانية سباتي (نطلق عليها اسم الحادثة ف)؟ ولما كانت هاتان الحادثتان ما نعتين تبادليا فان احتمال الحصول على واحدة او الاخرى يساوى مجموع احتماليهما المنفصلين. اى ان

$$أ (ث) = \frac{١}{٥٢} \quad ، \quad أ (ف) = \frac{١}{٥٢}$$

فان $$أ (ث او ف) = \frac{١}{٥٢} + \frac{١}{٥٢} = \frac{٢}{٥٢} = \frac{١}{٢٦}$$

وتنطبق نفس القاعدة على اكثر من حادثتين بشرط ان تكون جميع الحوادث مانعة تبادليا. فاذا فرض ان الحوادث ث ، ف ، ح مانعة تبادليا فان احتمال حدوث اى منها يساوى

$$أ (ث او ف او ح) = أ (ث) + أ (ف) + أ (ح)$$

٢ - قاعدة الضرب للحوادث المستقلة :

اذا كان لدينا الحادثتان ث ، ف بحيث لا يعتمد وقوع الحادثة ف على ما اذا وقعت الحادثة ث ام لا. فيقال ان الحادثتين مستقلتان وان احتمال حدوثهما معا هو عبارة عن حاصل ضرب احتمالهما المنفصلين. اى ان

$$أ (ث و ف) = أ (ث) \times أ (ف)$$

فاذا اردنا معرفة احتمال ظهور صورة فى رميتين متتاليتين لعمله غير متحيزة فاننا نضرب احتمال كل منهما فى بعضهما البعض. اى ان

$$أ (ث و ف) = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٤}$$

وتنطبق هذه القاعدة فى حالة وجود اكثر من حادثتين بشرط ان تكون جميعها مستقلة عن بعضها البعض . فاذا كانت الحوادث ث ، ف ، ح مستقلة عن بعضها البعض فان

$$أ (ث و ف و ح) = أ (ث) \times أ (ف) \times أ (ح)$$

٣ - قاعدة الضرب للحوادث التابعة :

ولنفرض ان وقوع الحادثة ف يعتمد على وقوع الحادثة ث . ففى هذه الحالة يكون احتمال وقوع ث ، ف هو عبارة عن احتمال احدهما مضروبا فى احتمال ظهور الاخر بشرط وقوع الحادثة الاولى . اى ان

$$أ (ث و ف) = أ (ث) \times أ (ف | ث)$$

وترمز أ (ف | ث) الى الاحتمال الشرطى للحادثة ف وتقرأ على انها احتمال حدوث ف عندما تقع الحادثة ث .

فاذا كان لدينا صندوق به سبع كرات منها ثلاث حمراء واربع بيضاء . وترمز الحادثة ث الى سحب كرة حمراء ، فان احتمال سحبها عشوائيا يساوى

$$أ (ث) = \frac{٣}{٧}$$

فاذا لم نعد الكره الحمراء محلها بعد سحبها فان احتمال سحب كرة بيضاء عشوائيا هو أ (ف | ث) = $\frac{٤}{٦}$ والسؤال الان هو : ما هو احتمال سحب كرة حمراء ثم كرة بيضاء مع عدم اعادة الكرة الحمراء ؟ لكى نجيب على ذلك نطبق الصيغة السابقة لكى نحصل على الحدوث المشترك للحوادث التابعة اى

$$أ (ث و ف) = (\frac{٣}{٧}) (\frac{٤}{٦}) = \frac{١٢}{٤٢} = \frac{٢}{٧}$$