د. محمود عبد [illegible]
مركز [illegible]

الجمهورية العربية المتحدة

التخطيط القومى

معهد التخطيط القومى

مذكرة رقم (٨٨٢)

نظريــة الصفــــوف وتطبيقاتهـــــا

اعـــداد

الدكتــور / يوســف نصـر الدين محمــد

مايو سنة ١٩٦٩

القاهــرة
٣ شارع محمد مظهر - بالزمالك

الآراء التي وردت في هذه المذكـــــــــــــــــــرة

تمثل رأى الكاتب ولاتمثل رأى المعهد ذاتـــــــــــه

نظريـة الصفـوف وتطبيقاتهـا :

مقدمـة :

يقصد بنظرية الصفوف الوصول التتابعى لطلبات يراد خدمتها • فاذا كان معدل تأدية الخدمة أقل من معدل وصول الطلبات فان على بعض هذه الطلبات ان تنظرلتأدية الخدمة لهـا مكونة صف أمام أجهزة الخدمـة •

الهدف من النظرية هو دراسة الخدمات الجماهيرية دراسة عملية وتوجيهها الى صالـح المجموعة التى تتطلب هذه الخدمة •

مجالات تطبيق نظرية الصفوف كثيرة ومتعددة منها مثلا الخدمة التى يقوم بها البائع فـى المحال التجارية والموظف فى شباك بيع تذاكر السينما او المسرح او السكك الحديدية • وكـذلك الخدمات التى تقدمها مراكز اصلاح الاجهزة الكهربية والسيارات ، الى جانب خدمات التليفـون والتلغراف ومراكز الاسعاف والمستشفيات • وأيضا الى جانب الخدمة فى الموانى البحرية والجويـة كما ان لها تطبيقات فى مجال الصناعة والزراعة والمجال العربى •

من الطبيعى ان يتساءل فى كل هذه المجالات عن كمية الخدمة وكيفية ادائها ومعرفـة ما سيتحقق منها وهل هى تتلاءم وظروفنـا ؟

عند دراسة مشكلة خدمة نظرية الصفوف فاننا نستدل على حلها بمؤشرات مختلفة منهـا ـ طول صف الانتظار ـ متوسط فترة الانتظار ـ احتمال رفض الخدمة (او قد ترفض الخدمـة لسبب ما) وهذه المؤشرات دون شك لها اهميتها القصوى كما انها تعتمد على كثير من العوامـل فمثلا طول الصف على شباك صرف تذاكر القطار يعتمد على كثير من العوامل منها خبرة الشخـص الذى يقوم بصرف التذاكر كما يعتمد ايضا على حالته النفسية وعلى طريقة الحديث بالنسبة الـى الشخص المسافر •

كما يعتمد ايضا على الجهة واقبالها على العدد المتوجه اليها • وواضح ان بعـض العوامل تكون اساسية اى انها تؤثر على طول الصف مباشرة وبعضها يكون تأثيره ثانويا ويمكـن اهماله ونرى فى هذا المثال من اهم العوامل التى تؤثر على طول الصف هى عدد المسافريـن وسرعة تلبية الطلب وتوزيع اماكن صرف التذاكر بالنسبة الى القطارات المختلفة • ونرى انه لوامكننا

تحسين عملية سرعة تلبية الطلب (ولو انها لحدود معينة) فانه لا يمكن معرفة عدد المسافرين لانه كمية عشوائية ولذا فلا يمكن التأثير على هذا العامل ويبقى امامنا طريق واحد هو تغيير نظام الخدمة وذلك يجعل كل موظف يقوم بصرف تذاكر قطار واحد فقط ولذا فاننا نتوقع أن أى مسافر مهما كانت وجهته لانتظر فى الصف اكثر من اى شخص فى نفس صف الانتظار. ومن الامثلة الاخرى فى — فى مراكز خدمة اصلاح السيارات نرى ان هناك اهمية كبرى لمعرفة كمية التصليح كما انه لا يقل عنها اهمية هو تنظيم عملية الخدمة داخل مراكز التصليح فمثلا يجب معرفة عدد العمال الذين يقومون بكمية التصليح وما لديهم من اجهزة وأدوات ونوعها فلو كانت هذه العوامل قليلة لنتج عن ذلك صف من السيارات المتعطلة فلو كان التصليح على مستوى المحافظة او الجمهورية لادى ذلك الى خسارة كبيرة . وقد تكون السيارات المتعطلة تكلف اكثر من التوسع فى مركز الخدمة ولكن ليس من المعقول ان يكون هذا التوسع بدون حدود بل يجب ان يكون المقصود منه هو تقليل فترة انتظار الخدمة دون ان يكون هناك عمالا أو أدوات اكثر من اللازم ولكن كيف يكون ذلك ؟ هناك طريقتان :

<u>الطريقة الاولى :</u> أن يبدأ مركز الخدمة بعامل واحد فقط وبعض الادوات فاذا وجدنا ان كمية العمل تفوق طاقته جعلنا من مساعدة وهو عامل آخر. فاذا وجدنا ان العمل يفوق طاقتهما نلجأ الى اضافة عامل آخر وهكذا الى أن نصل الى عدد العمال والادوات كاف بكافة مركز الخدمة . ولو ان تلك الطريقة تكلفنا وقتا كثيرا حتى نصل الى نقطة الكفاية .

<u>والطريقة الثانية : استخدام نظرية الصفوف :</u> أمكن التوصل الى نتائج حسنة دون الحاجة الى اجراء التجارب كما فى الطريقة الاولى ويمكن صياغة المشكلة السابقة فى صورة نموذج من نماذج نظرية الصفوف على الوجه التالى :

عندما تتعطل سيارة عن العمل فانه يستوجب تصليحها ولذا فانها تتوجه الى مركز الخدمة التى بها عدد معين من العمال فيقوم احد العمال بالتصليح فعند ظهور سيارة أخرى متعطلة يقوم عامل آخر بتصليح السيارة الثانية المتعطلة فاذا حدث ان تعطلت سيارة وكان جميع العمال مشغولين فى خدمة سيارات سبقت هذه السيارة فانه يجب عليها ان تقف فى انتظار التصليح طالما كان كل العمال مشغولين فى الخدمة .

وهنا نتساءل عن العدد اللازم من العمال حتى نجعل وقت الانتظار اقل ما يمكن (ربما يقول قائل أن يجب أن نتوسع فى عدد العمال ولكنه خطأ من الوجهة الاقتصادية وغير ممكن من الناحية العملية) ٠

يطلق على العامل الواحد او الجهاز الواحد الذى يقوم بخدمة معينة واحدة بمجموعة الخدمة ذات القناة الواحدة ٠ اما عندما يكون عدد العمال أو الاجهزة أكثر من واحد فان المجموعة فى هذه الحالة تسمى بمجموعة الخدمة ذات القنوات المتعددة وفى حالة تساوى هذه القنوات أو الاجهزة فى الصفات فاننا نطلق عليها القنوات المتكافئة او المتساوية الصفات فى الخدمة ومن أبسط الامثلة فى صالون الحلاقة يوجد به عدد معين من العمال الذين لو اسند لكل منهم العمل (مثل حلاقة الذقن أو الشعر) لا مكن أن يقوم به ويقال عنهم انهم متساوون فى الصفات ٠

والنماذج الرئيسية فى نظرية الصفوف هى :

(١) نموذج رفض الخدمة ٠ *

(٢) نموذج لانتظار الخدمة ٠ *

الا انه نتيجة لنظام الخدمة المتبع فانه يوجد انواع عديدة من نظم الخدمة منها :

(١) عند وصول اى طلب للخدمة يتوجه الى الجهاز الغير مشغول وفى حالة ما اذا كانت جميع الاجهزة مشغولة فان الطلب ترفض خدمته ومن امثلة ذلك خدمة المكالمات التليفونية وعد التذاكر على شباك السينما والمسرح ٠

(٢) قد تكون اجهزة الخدمة ذات ارقام خاصة فعند وصول اى طلب فانه يتوجه الى الجهاز الذى يليه فان وجده مشغولا فى خدمة طلب سبقه فانه يتوجه الى الجهاز الذى يليه وهكذا ٠ وعلى ذلك فان اى طلب جديد يخدمه فقط اقل رقم من أرقام الاجهزة الغير مشغولة من الاجهزة التى لها ارقام مثال ذلك فى التليفونات الاوتوماتيكية ٠

(٣) عند وصول اى طلب للخدمة يتوجه الى اى جهاز من الاجهزة الغير مشغولة وفى حالة ما اذا كانت جميع الاجهزة مشغولة فانه يأخذ دوره فى صف انتظار الخدمة وبمجرد خلو أى جهاز يتوجه اليه الطلب الذى دوره فى الخدمة (النظام المتبع فى هذه الحالة " من وصل الى جهاز الخدمة اولا يخدم اولا ") ومن امثلة ذلك صف المسافرين امام شباك التذاكر والخدمة فى الموانى البحرية والجوية ٠

* سنقوم بشرحها فيما بعد ٠

(٤) قد يكون الانتظار مرتبط بعدد معين من الطلبات الممكن تأدية خدمته وبعد هذا العدد فان الطلب الجديد يترك جهاز الخدمة مباشرة ولا ينتظر الخدمة اما العدد المحدود هذا فننظر حتى تؤدى خدمته أى أن شرط الانتظار هو ان العدد اللازم وجوده فى صف الانتظار لا يتعدى عدد معين • ومن امثلة ذلك نرى ان لكل مركز خدمة طاقة محدودة بعدد معين من الطلبات بعده ترفض خدمة اى طلب جديد كلما كان لدى المركز عدد من الطلبات يساوى طاقته •

(٥) قد يكون وقت الانتظار محدود اى مرتبط بوقت معين بعده يترك الطلب جهاز الخدمة سواء أديت الخدمة أم لم تؤد ومثال ذلك المسافر الذى سينتظر لمدة ساعة مثلا فى محطة بها مركز للخدمات به عمال يقومون بالخدمة وامام هؤلاء العمال عدد من المنتظرين فان اى مسافر يريد خدمة ما فان يقف فى صف الانتظار مع المنتظرين فبعد انتهاء المدة المقررة لانتظاره يترك المسافر مركز الخدمة سواء أديت الخدمة أم لم تؤد • ومن الامثلة الاخرى : مثال البضائع التى ترتبط بمدة زمنية معينة يفقد بعدها صلاحيتها ويستوجب بعد ذلك اعدامها فلو اعتبرنا ان البضائع يقوم مقام الشخص المراد خدمته بينما يلعب دور مركز الخدمة هو محل البقالة الذى يقوم العمال فيها ببيع البضاعة ويجب عليه ان يقوم بالبيع خلال الفترة المرتبطة بها صلاحية البضاعة •

(٦) قد تكون فى الخدمة مفاضلة بين الطلبات اى تفضل نوع على آخر عند اجراء الخدمة لعدة انواع مختلفة من الطلبات المراد خدمتها • فمثلا يوجد نوعين من التلغرافات العادى والمستعجل فلو انه وصل تلغراف مستعجل اثناء ارسال تلغراف عادى فسيبدأ المختص فورا بالتلغراف المستعجل الوارد اليه فى هذه اللحظة ويأخذ التلغراف العادى دوره فى انتظار الانتهاء من مناولة التلغرافات المستعجلة ونرى انه هنا تتكون لدينا صفان احدهما من التلغرافات العادية والاخر من التلغرافات المستعجلة او الخدمة من الموانى البحرية اذ يفضل خدمة السفن الكبيرة اولا •

لقد لعبت نظرية الصفوف دورا كبيرا فى التخطيط على مجال الوحدة فمثلا لعبت دورا كبيرا فى <u>مجال التخطيط الصناعي</u> وامكن بواسطتها الوصول الى حلول مرضية لمشاكله

فعند اقامة مصنع ما فان كل ما يهمنا هو طاقته الانتاجية وكيفية الوصول بها الى اقصى قيمة ممكنة ولذا فاننا نتساءل اولا ما هي طاقته الالية التى تلزم للوصول الى المستوى الانتاجى المطلوب قد يعاوننا وجود عدد من العمال يقومون بملاحظة عدد من وحدات الغزل والنسيج فاذا تعطلت وحدة من هذه الوحدات لسبب ما فان احد العمال سوف يتوجه الى الوحدة المتعطلة ويقوم بعمل اللازم لاصلاحها ويستغرق منه بعض الوقت (الذى يسمى بوقت الخدمة وهو لا يمكن تحديده مسبقا اذ انه كمية عشوائية) ماذا نصادف بان عدد الوحدات المتعطلة اكبر من عدد العمال فانه نتيجة لذلك ينشأ صف من الوحدات المتعطلة مما يؤدى الى خسارة اقتصادية ويهدد بتوقف الانتاج ٠ وقد يبدو لنا أن كثرة عدد العمال تؤدى الى تقليل الخسارة الا ان ذلك لا يتمشى مع الوجهة الاقتصادية اذ سيرتفع بالتالى سعر المتر من القماش نتيجة لازدياد التكاليف وهنا يتساءل عما هو مطلوب منا حتى نقلل من فترة تعطل الوحدة مع الوصول الى سعر مناسب للمتر ؟

وقد يقابلنا وجود عدد n من الوحدات الاساسية وعدد m من الاحتياطى وان مدة تشغيل الوحدة كمية عشوائية فعند تعطل احدى الوحدات الاساسية واستبدالها بوحدة من الاحتياطى والقيام باصلاحها ومدة التصليح كمية عشوائية فاذا افترضنا ان عدد العمال القائمين بالتصليح هو ٠

وهنا يتساءل عن الطريقة المثلى فى تشغيل هذه المجموعة باكملها بما يتمشى مع الناحية الاقتصادية باستقلالها اكبر مدة ممكنة ٠

قد يحدث فى المجال الزراعى ان تتعطل وحدة زراعية (محراث مثلا) ويستلزم القيام باصلاحه عن طريق مركز الخدمة الموجود فى نفس مكان العمل او فى المركز الرئيسى الموجود فى مكان بعيد عن الحقل ٠ ففى مركز الخدمة المجاور للحقل قد يكون العامل مشغولا باصلاح وحدة سبقت هذه المتعطلة وهنا تأخذ الوحدة المتعطلة دورها فى الانتظار مما قد يؤدى الى توقف العمل وما يتبع ذلك من خسارة مادية ٠ أما المركز الرئيسى البعيد عن مكان العمل فقد يقوم باصلاح الوحدة بمجرد وصولها اليه الا أن نقل الوحدة الى المكان الرئيسى قد يكلف الكثير وهنا نتساءل عن الطريقة المثلى اتباعها فى التصليح هل من الافضل القيام بالتصليح فى مكان

العمل أم فى المركز الرئيسى ؟ كما أنه يمكننا هنا توزيع اماكن الخدمة الرئيسية بحيث يمكن لنا المفاضلة فى اجراء عملية التصليح هناك ٠

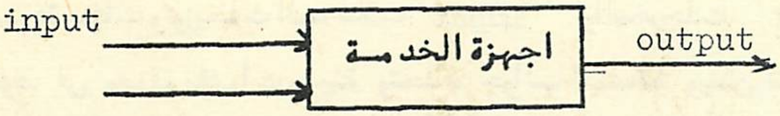
فى التكنيك الحربى الحديث أعطت نظرية الخدمة الطرق المثلى عن كيفية استخدام ما لديك من اسلحة وذخيرة لالحاق اكبر خسارة ممكنة بالعدو باقل خسارة ممكنة ٠

فى مجالات الخدمة العامة : مثلا فى مجال الطب حيث عدد الاسرة فى المستشفى محدود والمرضى المراد علاجهم لا يمكن تحديد اعدادهم اذ انه كمية عشوائية ٠ فعندما يكون عدد المرضى اكبر من عدد الاسرة فان ذلك يتطلب ان ينتظر المرضى الزائدون فى صف خارج المستشفى حتى يتم شفاء احد المرضى ويفرغ سرير ونتساءل عن الطريقة المثلى التى يجب اتباعها لنجعل من فترة الانتظار اقل ما يمكن حتى لا يؤدى طول فترة الانتظار الى مضاعفات تؤدى بحياة المريض ٠ وقد يقابلنا حالة المفاضلة فى الخدمة بمعنى ان هناك من يستحق اجراء عملية له بسرعة ولا يحتمل الانتظار ٠ وهنا نتساءل عن الطريقة الواجب اتباعها لجعل فترة انتظار هذا المريض اقل مايمكن ؟ ومن الامثلة الاخرى ٠ فان وجود عدد معين من الارصدة فى اى من الموانى البحرية عند وصول سفينة الى الميناء وانشغال جميع الارصفة فى تفريغ شحنات سفن سبقتها فانها تأخذ دورها فى الانتظار خارج الميناء ويتبع ذلك ما تتعرض له الشركة صاحبة السفينة من خسارة نتيجة لتأخير تفريغها كما يعرض ذلك ادارة الميناء نفسها الى الغرامة نتيجة لتعطيل السفينة خارج الميناء وهنا نتساءل عن الطريقة المثلى الواجب اتباعها لتقليل الخسارة من الجانبين ونجعل المكسب دائما فى صف ادارة الميناء ٠

كما ان ارتباط منتجات صناعية بفترة معينة بعدها تفقد صلاحيتها ونتساءل عن الطريقة المثلى الواجب اتباعها لكى يكون متوسط التالف من البضاعة اقل ما يمكن ومثال آخر وجود عدد محدود من الخطوط التليفونية لكل مؤسسة أو وحدة والمطلوب تحديد عدد الخطوط اللازمة لتسير العمل داخل المؤسسة او الوحدة الانتاجية ٠

ودراسة اى مشكلة من المشاكل السابقة بنظرية الصفوف يمكن تقسيمها الى تيار المدخلات input وأجهزة تقوم بخدمة هذا التيار وفى النهاية تيار المخرجات كما أن

تيار المخرجات يكون معتمدا على أجهزة الخدمة • والرسم التالى يوضح نموذج نظرية الصفوف :



فتيار المدخلات : عبارة عن تيار الطلبات المراد خدمتها وتكون مصحوبة بفترات زمنية بين كل طلب وآخر كما اننا نلاحظ انه من الصعب تحديد لحظات وصول الطلبات او طول الفترات بين طلب وآخر ولذا فان تيار المدخلات يعتبر متغير عشوائى يعتمد على الزمن ولذا فان من أهم الخطوات هو معرفة صفات هذا المتغير واعداد توزيع احتمالى لسلوكه من التوزيعات الكثيرة لتيار المدخلات توزيع بواسوان وهو أن احتمال وصول عدد k من الطلبات خلال فترة t هو :

$$P(X(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad -e^{\lambda t}$$

حيث λ عبارة عن توقع عدد الطلبات فى وحدة الزمن •

أما تيار المخرجات : عبارة عن الطلبات التى أجريت لها أم لم تجرى لها الخدمة ومن الواضح ان لكل طلب أجريت له الخدمة قضى فترة من الوقت لتأديتها • وتسمى هذه الفترة بمدة الخدمة ومن الواضح ايضا ان طول هذه الفترة يعتمد كما عوامل كثيرة منها كمية الخدمة ونوعيتها وحالة الجهاز الذى يقوم بالخدمة فلذا فانها عبارة عن متغير عشوائى ولذا فان من الاهمية معرفة توزيعات هذه المدة اى المطلوب تعيين :

$$P(\eta < t) = G(t) \qquad t > 0$$

حيث η مدة الخدمة

وهى احتمال ان مدة الخدمة لا تتعدى مدة محدودة t

ومن التوزيعات كثيرة الاستخدام التوزيع الاسى وهو على الصورة :

$$G(t) = 1 - e^{-\mu t}$$

حيث μ تمثل متوسط مدة الخدمة •

وفيمايلى سنعالج بعض النموذج مع ذكر الامثلة بفرض ان أجهزة الخدمة متكافئة •

....

بعض النماذج الاساسية فى نظرية الصفوف :

بمعرفة صفات وتوزيعات المدخلات input والمخرجات output يمكن تطبيق نظرية الصفوف فى معرفة مؤشرات معينة وتحدد جوانب المشكلة ويمكن للمخطط منها اعطاء التوجيهات السليمة التى على أساس علمى سليم ٠

وسنتعرض هنا لذكر بعض النماذج الاساسية للخدمة مع المؤشرات التى يمكن التوصل اليها مع ذكر امثلة عددية ٠ والنماذج هى :

(١) نموذج رفض الخدمة ٠

(٢) نموذج الخدمة بعدد غير محدود من الاجهزة ٠

(٣) نموذج انتظار الخدمة وينقسم الى :

(أ) خدمة الانتظار فى حالة خدمة عدد محدود من المدخلات ٠

(ب) " " فى حالة خدمة عدد غير محدود من المدخلات ٠

(حـ) " " فى حالة عدد معين فقط من الطلبات بعد هذا العدد ترفض أى طلب آخر ٠

(٤) نموذج الخدمة بالنسبة الى ترتيب الاجهزة ٠

أولا : نموذج الرفض :

نفرض ان لدينا عدد n من أجهزة الخدمة وأن نظام الخدمة هو بمجرد وصول طلب يراد خدمته وانشغال جميع اجهزة الخدمة فى خدمة طلبات سبقت فان خدمته ترفض ٠

ونفرض أن معدل وصول الطلبات فى وحدة الزمن λ ومعدل الخدمة فى وحدة الزمن μ ونفرض أن P_k احتمال وجود عدد k من الاجهزة مشغولة كما أن P_K تحقق المعادلات التالية فى حالة الاتزان أى فى حالة

$$\lim_{t \to \infty} P_k(t) = p_K$$

حيث $P_k(t)$ احتمال وجودعدد k من الطلبات خلال الزمن

$$\therefore \quad p_1 = \frac{\lambda}{\mu} \; p_o$$

$$(\lambda + k\mu)\, p_k = \lambda p_{k-1} + (k+1)\, \mu p_{k+1}$$

$$p_n = \frac{\lambda}{n\mu} \; p_{n-1}$$

ومنها نجد أن

$$(1) \qquad p_k = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} \; p_o \qquad (k=1, \ldots , n) \ldots.$$

حيث p_o يمكن الحصول عليها من العلاقـة

$$\sum_{k=o}^{n} p_k = 1$$

أى أن

$$(2) \qquad p_o = \left[\sum_{k=o}^{n} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} \right]^{-1} \ldots$$

واحتمال رفض الخدمة يسـاوى

$$(3) \qquad p_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \; p_o \qquad \ldots..$$

والتوقع لعدد الاجهزة المشغولة يساوى

$$(4) \qquad M_1 = \sum_{k=1}^{n} kp_k = \sum_{k=1}^{n} k. \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} \Big/ \sum_{k=o}^{n} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} \qquad \ldots.$$

ودرجة التحميل على الاجهزة مشغولة يساوى

$$(5) \qquad \frac{M_1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k-1)!} \Big/ \sum_{k=o}^{n} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{k!} \qquad \ldots..$$

والتوقع لعدد الاجهزة الغير مشغولة يساوى

$$(6) \qquad M_2 = \sum_{k=o}^{n-1} (n-k)\, p_k = \sum_{k=o}^{n-1} (n-k) \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} \; p_o \qquad \ldots..$$

<u>مثال ١ :</u>

عند التخطيط لمبنى مركز رئيسى لاحدى المؤسسات العامة المطلوب تحديد عدد الخطوط التليفونية اللازمة لسير العمل بحيث لا يتعطل العمل نتيجة لعدم اتمام المكالمة فى حينها واحتمال رفض المكالمة أقل من 0.01 . واذا فرض ان متوسط عدد المكالمات فى وحدة الزمن (الدقيقـة) هما ثلاثة ومتوسط مدة المكالمة $\frac{2}{3}$ دقيقـة .

الحـل :

نفرض ان العدد المطلوب هو n والمطلوب تحديد قيمة n التى تحقق المتباينة

$$p_n \leqslant 0,01$$

أى أن

$$\frac{\dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(\frac{\lambda}{u})^k}{k!}} \leqslant 0.01$$

وحيث أن $\frac{1}{\mu} = 2 \;, \lambda = 3 \;, \lambda/u = \frac{3}{2} = 1.5$

لايجاد n التى تحقق المتباينة السابقة نفرض أن $n = 5$ ويحقق منها هل تحقق المتباينة أم لا اذا كانت تحقق المتباينة تقلل قيمة n الى أن نصل الى n أما اذا لم تحقق المتباينة فاننا نكبر لقيم n ونرى أن

لقيمة $n = 5$ فان

$$(\frac{\lambda}{\mu})^5 \;/\; 5! = (5)^5 \;/\; 5! = \frac{u}{15}$$

$$\therefore \quad \sum_{k=0}^{5} \frac{(\frac{\lambda}{u})^k}{k!} = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} =$$

$$= 1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + 2/3 + 4/15 = 7.266$$

ومنها فان

$$p_5 = 0.0367$$

أى أن $n=5$ لا تحقق المتباينة السابقة وعلى ذلك فان خمس خطوط لا تكفى حيث أن احتمال الرفض أكبر من القيمة المطلوبة .

نفرض أن $n=6$ وبنفس الطريقة السابقة نجد أن

$$P_6 = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{61}}{6!} \;/\; \sum_{k=0}^{6} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^k}{k!} = 0.01209$$

أى أن ستة خطوط أيضا غير كافية .

نفرض أن $n = 6$ ونجد فى هذه الحالة أن

$$P_7 = 0.0034$$

أى انها اقل من 0.01

وبذلك فان المؤسسة يلزمها لكى يسير العمل على اكمل وجه (احتمال الرفض 0.01) هو ان يكون عدد الخطوط على الاقل سبعة .

ولتحديد مدى استغلال كل هذه الخطوط نوجد التوقع لعدد الخطوط المشغولة

$$M_1 = \sum_{k=o}^{7} k\, p_k$$

ومن الجدول :

عدد الخطوط المشغولة

k	p_k/p_o	p_k	$k\,p_k$
0	1,0000	0.1355	0.0000
1	2.0000	0.2710	0.2710
2	2,0000	0.2710	0.5420
3	1.3330	0.1807	0.5421
4	0.6670	0.0903	0.3612
5	0.2670	0.0361	0.1807
6	0.0889	0.0120	0.0720
7	0.0254	0.0034	0.0238
		1.0001	2.0128

نرى أن

$$M_1 = 2.0128$$

أى انه فى المتوسط خطان من السبعة خطوط دائما مشغولين وفترة استغلال كل خط تساوى

$$\frac{M_1}{n} = \frac{2,0128}{7} = 0.2875$$

أى أن كل خط يشغل 0.2875 من فترة العمل اليومى .

مثال ٢ : قاعدة مضادة للطائرات بها عدد ثلاث أجهزة قاذفة للصواريخ يطلق كل جهاز قذيفة واحدة فقط فاذا كان متوسط وقت الانطلاق واصابة الهدف هو اربعة دقائق وكثافة الهدف (طائرات العدو) عبارة عن 0.75 أى $\lambda = 0.75$

المطلوب ايجاد احتمال اختراق مجال القاعدة ٠

الحل : احتمال اختراق مجال القاعدة هو احتمال رفض الخدمة (أى عدم اصابتها) وبما أن

$$\frac{\lambda}{\mu} = 3 \quad , \quad \lambda = 0.75 \quad , \quad \frac{1}{\mu} = 4 \qquad n = 3$$

$$P_3 = \frac{3^3}{3!} \; p_o$$

حيث p_o تساوى

$$p_o = \frac{1}{1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!}} = 0.077$$

أى انه تقريبا 8% من الوقت يكون الاجهزة وبالتعويض عن قيمة p_o نحصل على

$$p_3 = \frac{3^3}{3!} \; 0.077 = 0.346$$

أى أن من 1000 طائرة ممكن اصابة 654 طائرة وتخترق القاعدة عدد قدره 346 طائرة ٠

نلاحظ كما فى المثال السابق يمكن تحديد عدد أجهزة القذف التى ممكن لها الحاق اكبر خسارة لطائرات العدو (أى أن اصافة الهدف تساوى $1 - \mathcal{E}$ حيث $\mathcal{E}$ كمية صغيرة) أى يوجد قيمة n التى تحقق المتباينة

$$P_n \leqslant \mathcal{E}$$

ثانيا : نموذج الخدمة لعدد غير محدود من الاجهزة :

فى هذا النموذج عدد اجهزة الخدمة غير محدود بمعنى ان احتمال رفض خدمة اى طلب يساوى صفرا كما أن معدل وصول الطلبات فى وحدة الزمن هو λ ومتوسط مدة الخدمة هو $\frac{1}{\mu}$ فان