الجمهورية العربية المتحدة

معهد التخطيط القومى

مذكرة رقم ٧١٧

الطرق الاحصائيه فى الاقتصاد القياسى

١ ـ طريقه المربعات الصغرى

اعداد

دكتور / محمد محمود الامام

يناير سنة ١٩٦٧

القاهرة

٣ شارع محمد مظهر ـ بالزمالك

المحتويـــــات

١ ـ الهدف من البحث القياسي في الاقتصـــاد	١
٢ ـ دور الأحصاء في البحث القياســي	٣
٣ ـ طريقة المربعات الصغـــرى	٦
ـ المشكلـــة	٦
ـ صفات الانحرافات ق	٩
ـ تعريف العـــزوم	١٤
ـ ملخص فروض المربعات الصغرى	١٦
٤ ـ دراسة العلاقة بين متغيرين	١٨
ـ مثـــال	٢٠
ـ استخدامات المعادلة	٢٢
ـ قياس درجة العلاقـة	٢٤
ـ تقدير تباين الانحرافات	٢٥
ـ تحليل التباين	٢٨
ـ اختبار معنوية تقديرات المعالم	٣٢
ـ وضع حدود ثقة للتقديرات	٣٥
ـ ملخص النتائج	٣٧
ـ تمارين	٤١
٥ ـ دراسة العلاقة بين أكثر من متغيرين	٤٣
ـ أ) التقديـــرات	٤٣
ـ ب) درجة العلاقة وتباين الانحرافات	٤٤
ـ مثـــال	٤٦
ـ خطوات العمل	٥١
ـ أعادة تصحيح التقديرات	٥٤
ـ تابع حل المثال	٥٧
ـ اختبار وجود علاقة خطية بين المعاملات	٦٠

الطرق الاحصائية فى الاقتصاد القياسى

أ ـ طريقة المربعات الصغرى

الهدف من البحث القياسى فى الاقتصاد :

يهتم علم الاقتصاد بمعالجة العلاقات التى تقوم بين عدد من الظواهر التى تعتبر ذات طبيعة اقتصادية ، وفقا للتعريف الذى يؤخذ به لذلك العلم . ويلجأ الكتاب الاقتصاديون النظريون الى اسلوب البحث الاستنباطى الذى يسعى الى استخلاص قواعد عامة تأخذ شكل الدعاوى النظرية استنادا الى عدد من البديهيات والفروض الاولية . ونظرا لان الحياة الاقتصادية لا تخضع لاسلوب التجربة فان اسلوب التجريد يقوم مقام التجربة وأن كان تجربة ذهنية افتراضية تساعد على ابراز المشاكل موضع الدراسة وعزلها عن جميع الجوانب الاخرى المرتبطة بها فى الحياة العملية بما يساعد على التعمق فى تحليلها دون ادخال قدر كبير من التفصيلات البعيدة عن الموضوع ، وأن كانت تمسه بالضرورة من قريب او بعيد .

ومعنى هذا ان النظريات الاقتصادية لها جانب من الصحة ، ولكنها فى نفس الوقت عرضة للخطأ لواحد أو أكثر من الاسباب الاتية :

أ ـ خطأ الفروض والبديهيات الاولية .

ب ـ خطأ الاستدلال المنطقى .

جـ ـ خطأ راجع الى المغالاة فى التجريد بما يستبعد من الدراسة عوامل عظيمة الاثر فيها ، او بما يدخل فيها عوامل اقل من غيرها شأنا .

فاذا استبعدنا من حسابنا اخطاء الاستدلال المنطقى ـ وهى التى يسهل تداركها بمراجعة النظرية ذاتها ـ فان الاخطاء الاخرى تظل قائمة ولا بد من اختبارها بمقارنتها بالمشاهدات العملية .

اذن لا بد من مواجهة النظرية بالواقع وتبين الدرجة التى تستطيع بها الاولى أن تفسر الثانى ، مدركين فى نفس الوقت انه ما من نظرية يرجى لها ان تفسر الواقع العملى تفسيرا تاما ، وأن غاية ما نصبو اليه هو نظرية قادرة على تفسير الجانب الاكبر منه بأقل قدر ممكن من

التعقيد . اى اننا سوف نسمح بالضرورة بوجود اخطاء أو انحرافات عن النظرية نظرا لان القواعد التى تحكم السلوك الاقتصادي فى الواقع ليست بتلك الدرجة من الدقة التى تفترضها النظرية فى سعيها للوصول الى نتائج محددة يمكن الاعتماد عليها فى الدراسات العلمية .

ومن جهة اخرى فان مشاهداتنا عن الواقع العملى لا تكون بالضرورة خالية من الاخطاء فنحن نعتمد على الاحصاءات التى تنشرها الجهات المختلفة عن الظواهر الاقتصادية ، سواء عن طريق الحصر الشامل او العينة . فكلا الاسلوبين عرضة للخطأ كما نعلم خاصة اذا كنا نسعى الى قياس ظواهر اقتصادية لها تعريف نظرى مركب لا يشاهد بصورته المباشرة فى الواقع وانما يستنتج من معالجة بعض الظواهر الاولية : مثل الارقام القياسية للاسعار او ما يسمى بالدخل الحقيقى ... الخ .

وتعتبر عملية جمع البيانات الاحصائية الاقتصادية سواء كانت أولية أو مركبة من الموضوعات الهامة فى البحث القياسى ، وأن اهتمت بها علوم اخرى مثل الاحصاء الاقتصادى او المحاسبة القومية او غيرها . غير ان الذى يهمنا هو : الى أى مدى يمكن استخدام هذه البيانات لاغراض دراسة العلاقات الاقتصادية التى تنادى بها النظرية ، كدوال الطلب او الانتاج او الاستهلاك او الاستيراد وغيرها .

نخلص من كل ذلك ان هناك حاجة الى حساب العلاقات الاقتصادية النظرية على اساس من البيانات الاحصائية المتاحة ، وأن هذا الحساب يهدف الى عدة اغراض :

أ — التأكد من مدى صحة النظرية او تضاربها مع الواقع .

ب — التعرف على القيم الفعلية لبعض المعالم التى تظهر فى تلك النظريات (مثل مرونة الطلب على سلعة معينة او الميل الحدى للاستيراد او مكرر الاستثمار) . ومقارنة قيمها فى اقتصاد معين باقتصاد آخر .

جـ — تفسير التطورات او الاحداث الاقتصادية التى تحققت فى الماضى .

د — التنبؤ بما يحتمل حدوثه فى المستقبل أو بما يمكن حدوثه فى ظروف مختلفة .

هـ — رسم السياسات والخطط الاقتصادية على ضوء تلك التنبؤات .

ومع ذلك فان المشاهدات لا يمكن ان ينتظر لها ان تتفق اتفاقا تاما مع النظرية — حتى

وأن صحت هذه الاخيرة — وذلك لوجود نوعين من الخطأ :

أ — الاول هو اخطاء فى العلاقات الفعلية عن النظرية ، او ما يسمى باخطاء المعادلات .

ب — الثانى هو اخطاء فى قياس المتغيرات الاقتصادية الفعلية ، أو اخطاء المشاهدات ويؤدى وجود احد هذين النوعين او كلاهما الى تعذر استخدام الوسائل الرياضية التحليلية فى تقدير القيم الفعلية لتلك العلاقات والمعالم (مثل الطرق المتبعة فى الهندسة التحليلية للتوصل الى التعرف على معالم معادلة الخط المستقيم) ولا بد بالتالى من استخدام النظريات الاحصائية المناسبة لاجراء هذا التقدير .

يمكننا ان نقول اذن أن البحث القياسى يسعى الى تطبيق نظريات احصائية مناسبة من أجل تقدير معالم العلاقات الاقتصادية واختبار معنويتها . وواضح ان هذا يفترض اقامة البحث على دعامتين :

أ — الاولى هى الدعامة الاقتصادية المستمدة من علم الاقتصاد بنظرياته المختلفة .

ب — الثانية هى الدعامة الاحصائية القائمة على النظريات الاحصائية الرياضية التى تتفق وظروف الحياة الاقتصادية .

ويلاحظ ان كلا من هاتين الدعامتين تقوم على اساس تحليل رياضى مرتفع المستوى .

دور الاحصاء فى البحث القياسى :

لن نعرض هنا للجانب الاقتصادى الذى سوف يعالج فيما بعد ، حيث أن الاعتبار الاحصائى سوف يؤثر فيه . فاذا نظرنا الى الجانب الاحصائى وجدنا انه يظهر فى ناحيتين رئيسيتين :

أ — الاولى هى ناحية جمع البيانات الاحصائية اللازمة لاجراء التحليل . وهذه مهمة علم الاحصاء الاقتصادى الذى يهتم بأساليب جمع البيانات وعرضها ثم تلخيصها باستخدام بعض الادوات كالارقام القياسية . غير أن الذى تجدر الاشارة اليه هنا انه مع تقدم البحث القياسى أصبحت مهمة جمع البيانات بهذه الصورة خاضعة بدرجة أكبر لرأى الاقتصاديين كما يمكن أن يتضح من الدراسات الخاصة بالحسابات القومية

وجداول المدخلات والمخرجات وغيرها من الاطارات الاقتصادية التى لها اكبر الاثر فى تحديد نوعية البيانات المستخدمة فى البحوث التطبيقية .

٢ — الثانية هى ناحية تحليل البيانات الاحصائية باستخدام اساليب التحليل الاحصائى ونستطيع ان نميز بين منهجين فى البحث يبدوان متماثلين وان اختلفا فى الواقع اختلافا جذريا .

أ — اسلوب يسعى الى دراسة العلاقات الاحصائية بين البيانات المعطاة بدون الرجوع الى نظرية بعينها ، اكتفاء بالاستنتاجات الاحصائية ذاتها ثم محاولة اعطاء نوع من التبرير لها .

ب — اسلوب يسعى على العكس من ذلك الى استخلاص العلاقات النظرية الاقتصادية وصياغتها باسلوب يمكن من تطبيق وسائل التحليل الاحصائى على البيانات المعطاة لدراسة تلك العلاقات النظرية وبيان مدى مقدرتها على تفسير الواقع .

وواضح ان الاسلوبين يعتمدان على المشاهدات الاحصائية ويستخدمان الادوات التحليلية الاحصائية . ومع ذلك فان اعتماد الاسلوب الثانى على النظرية الاقتصادية هو الذى يميز الاقتصاد القياسى عن الاسلوب الاول الذى يطلق عليه احيانا الاقتصاد الاحصائى . ولكى نوضح الفرق بين الاسلوبين — الذى قد يبدو ضئيلا للوهلة الاولى — نسوق بعض الامثلة :

لنفرض اننا جمعنا بعض المشاهدات عن الاسعار والكميات لعدد من السلع او من الظواهر الاقتصادية الاخرى — مثل الاوراق المالية أو أسعار الفائدة قصيرة الاجل وطويلته ، وهكذا .. وواضح انه نظرا لتشابك الحياة الاقتصادية وترابطها سوف يبدو هناك عدد من العلاقات بين تلك الظواهر ، ولا يحتاج الامر الى نظرية مستفيضة لكى نستخلصها . اذن يمكن لاى باحث ان يحسب معاملات الارتباط (الكلية أو الجزئية) بين أى عدد من هذه الظواهر ثم يستخلص أقواها ويستدل منه على اهمية العلاقة التى يمثلها . وبعبارة اخرى فاننا اذا وجدنا ان هناك ارتباطا قويا بين حجم الاستهلاك من مجموعة من السلع مثلا وأسعار تلك السلع واسعار الفائدة .. الخ فاننا " نستنتج " أن هناك علاقة من هذا النوع تصلح " عمليا " لتفسير تلك الظاهرة .

اما الباحث القياسي فانه يستعرض النظريات الاقتصادية القائمة ويستخدم واحدة منها او اكثر لاستخلاص شكل العلاقة التي يسعى الى دراستها ثم يختبرها احصائيا وفقا للبيانات المتاحة ، ثم " يستنتج " اما ان النظرية " لا تتضارب مع الواقع" او تتضارب معه . فهو اذن لا يحاول استخلاص علاقة نظرية من المشاهدات وانما على العكس من ذلك يواجه النظرية بالمشاهدات .

وقد ادى استخدام الاسلوب الاول الى كثير من المفارقات . فقد حاول احد الكتاب الربط بين الكميات المشتراة من الحديد وبين سعره فوجد أن هناك علاقة طردية بينهما واستنتج ان قانون الطلب على السلع الانتاجية يختلف عن قانون الطلب الاستهلاكي الذي بناه مارشال على اساس نظرية تناقص المنفعة والواقع ان هذا الكاتب تجاهل ما تقول به النظرية من ان الكميات المشتراة في السوق لا تمثل الطلب فقط وانما تمثل كلا من الطلب والعرض وأنه مع مضي الزمن قد ينتقل موضع منحنى الطلب او العرض او الاثنين فتتغير بذلك نقطة التوازن . اذن لا بد من الرجوع الى النظرية ودراستها بعناية قبل ان نقفز الى نتائج مستمدة من واقع متغير نحلله بصورة سطحية .

كذلك ذهب بعض الكتاب الى استخدام اساليب تحليل السلسلات الزمنية ودراسة العلاقات بين المتغيرات الزمنية كأساس لاستنتاج علاقات تفيد في التنبؤ وفي تحليل الدورة الاقتصادية والنمو الاقتصادي . والواقع أن مثل هذا الاسلوب قد ثبت فشله نظرا لان العلاقات التي تبدو احصائيا في فترة ، لا يلزم ان تستمر في المستقبل ما لم يكن هناك مبرر سببي لها . فمن الجائز أن نجد ان الاستثمار في فترة معينة ومع ذلك ينقص الانتاج والعكس بالعكس ولا يعني هذا ان هناك علاقة عكسية بين الاثنين . ولعل اكبر امثلة فشل هذا الاسلوب هو ما حدث بالنسبة لما اطلق عليه اسم البارومترات الاقتصادية وهي عبارة عن ارقام قياسية يمثل كل منها مجموعة من الظواهر الاقتصادية المتقاربة (الانتاج - النقود الاوراق المالية .. الخ) ثم نستخلص علاقات احصائية بينها لبيان الفترة التي تنقضي بين حدوث تغير في احدها ثم حدوث تغير مماثل (او عكسي) في الاخرين حتى يمكن التنبؤ بتغيرات البعض على اساس مشاهدة تغيرات في البعض الاخر . فقد اتضح من تحليل

العلاقات بين تلك البارومترات فى امريكا والمانيا خلال فترات زمنية ماضية ان بعضها يسبق الاخر بحوالى نصف سنة أو سنة ، وذهب انصار هذه المدرسة الى المناداة باستخدامها للتنبؤات المستقبلة اعتمادا على تلك العلاقات المشاهدة التى لم تستند الى اى تحليل نظرى سليم .

ومع ذلك فقد حدثت تغيرات ضخمة لم تتمكن تلك البارومترات من كشفها كان اهمها الازمة الثلاثينية . وكانت هذه الازمة الاخيرة ثمنا غاليا دفعه العالم ليدرك اهمية استخدام الادوات التحليلية الاحصائية مطبقة على علاقات اقتصادية مدروسة بعناية من الوجهة النظرية ومن هنا كانت نشأة الاقتصاد القياسى .

غير ان محاولة الربط بين متطلبات النظرية والواقع أظهرت بجلاء عدم كفاية النظريات الاحصائية الشائعة لمواجهة احتياجات البحث القياسى . ومن هنا كانت ضرورة تعديل النظريات الاحصائية ذاتها لاخذ تلك الاحتياجات فى الحسبان وقبل ان نتعرض للنظريات القياسية الحديثة يجدر بنا ان ندرس النظريات التقليدية لسببين : الاول هو بيان الحدود التى يمكن استخدامها فيها فى البحث القياسى لانها لا تزال صالحة فى بعض الاحوال ولا بد من معرفتها ومعرفة شروط صلاحيتها حتى يمكن استخدامها استخداما سليما . والثانى ان النظريات الحديثة ان هى الا تطوير للنظريات التقليدية ولا بد لذلك من معرفة هذه الاخيرة حتى يمكن متابعة تطويراتها .

وسوف نقصر بحثنا هنا على واحدة من تلك النظريات التقليدية المعروفة ، وهى نظرية المربعات الصغرى التى تسعى الى بيان وسيلة تقدير معالم معادلة معينة تربط بين عدد من المتغيرات وفقا لفروض معينة .

طريقة المربعات الصغرى

المشكلة :

فى الدراسات التطبيقية سواء فى المجال الاقتصادى او الاجتماعى أو غيرهما من

المجالات تصادفنا كثيرا المشكلة التالية :

يقوم الباحث بدراسة نظرية لمشكلة معينة ويتوصل الى نتيجة نظرية تقول بأن احد المتغيرات (ولنرمز له بالرمز ص) يتوقف فى تغيراته على عدد من المتغيرات الاخرى (ع$_{1}$ ، ع$_{2}$ ، ..... ، ع$_{م}$) . بحيث يمكن التعبير عن هذه العلاقة رياضيا بالصورة

ص = د (ع$_{1}$ ، ع$_{2}$ ، ..... ، ع$_{م}$) (١)

هذه الصورة الدالية العامة لا تصلح مباشرة للقياس ، ولا بد من التعبير عنها بصورة صريحة ، اى لا بد من النص على ما اذا كانت تأخذ شكل معادلة جبرية او مثلثية او غير ذلك ، ثم أذا كانت جبرية ، هل هى خطية ام غير خطية أم أسية وهكذا .. وطبيعى ان تحديد هذه الصورة الصريحة يجب أن يتم بحيث تحقق المعادلة الخصائص النظرية المناسبة .

مثال : لنفرض ان الانتاج ص دالة فى عنصر متغير ع . أى أن ص = د (ع) ، لو عبرنا عن هذه العلاقة فى صورة خطية ، فسوف نحتاج الى ادخال مقادير جديدة هى معاملات او ثوابت تظهر عادة فى معادلة الخط المستقيم وتكتب المعادلة بالصورة :

ص = أ + ب ع

ولكن ما معنى هذه المعاملات أو الثوابت ؟

واضح أن أ هى قيمة ص عندما تكون ع = صفر أى حجم الانتاج الذى يتم بدون استخدام هذا العنصر ، وممن الممكن ان يكون هذا الحجم مقدارا موجبا اذا كانت العناصر الاخرى المستخدمة مع العنصر المتغير قادرة على الانتاج بدونه . اما اذا كان سالبا فانه يساعدنا على التعرف على الحد الادنى من العنصر الذى يجب استخدامه حتى يمكن البدء فى الانتاج . لان تلك العلاقة يمكن اعادة صياغتها كالاتى :

ع = $-\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{ب}}$ ص

وتكون ع = $-\frac{أ}{ب}$ عندما الانتاج ص = صفر (حيث أ سالبة وبالتالى — أ موجبة) أى أنه لا يمكن الحصول على انتاج موجب قبل استخدام قدر من ع يساوى تلك القيمة على الاقل .

أما ب فتمثل معدل تغير الانتاج بالنسبة لتغير العنصر بوحدة (أو $\frac{ك ص}{ك ع}$) وهذا هو تعريف الانتاجية الحدية . ولكن معنى هذا ان الانتاجية الحدية ثابته وتساوى المقدار الثابت ب . وتتوقف قيمة ب على طبيعة العلاقات الانتاجية وقد تتغير من عملية انتاجية لاخرى او من اسلوب تكنولوجى لآخر . ولذلك فمن الافضل تسمية المقادير أ ، ب معالم Parameters تمييزا لها عن المتغيرات (ص ، ع) مع عدم المبالغة فى اضفاء صفة الثبات عليها .

ويصبح من اللازم التأكد من شيئين :

١ — أن ص هى التى تتأثر بالمتغير ع وليس العكس — اى دراسة العلاقة السببية .

٢ — ان المعالم أ ، ب وغيرها تحقق المتطلبات النظرية . فعلينا ان نتأكد مثلا من مدى صحة فرض ثبات الانتاجية الحدية ، أو ثبات مرونة الطلب .

على أن هذا ليس من عمل الاحصائى بل هو أمر يقتضى ان يعالجه الباحث باعتباره اقتصاديا . وقد يرى مثلا أن يستخدم صورة أخرى مثل :

لو ص = جـ + م لو ع

وفى هذه الحالة تتناسب الانتاجية الحدية مع الانتاجية المتوسطة أى أنهما تتغيران معا . ولكن تبقى العلاقة خطية فى اللوغارتيمات بدلا من المتغيرات ذاتها .

اذن بوجه عام لو قلنا أن لدينا معادلة خطية :

$$ص = حـ_{0} + حـ_{1} ع_{1} + حـ_{2} ع_{2} + \cdots + حـ_{م} ع_{م} \qquad (٢)$$

فان هذه المعادلة تعتبر خطية فى المعالم (حـ ر) وهذه هى الصفة الاولى فيها . ومع ذلك فانها لا يلزم أن تكون خطية فى المتغيرات بمعنى أن ص ، ع ر قد تكون هى المتغيرات الاقتصادية المشاهدة أو قد تكون دوالا فيها ، مثلا لوغارتيماتها او قوى أعلى من الدرجة الاولى فيها وهكذا .

هذه الصورة " الصريحة " للعلاقة الاقتصادية النظرية لا تصلح مباشرة للقياس ،

لانها لو كانت كذلك لامكننا ان نعوض بقيم مشاهدة لكل من المتغيرات ص ، ع ر ليتساوى الطرفان فعلا . ولكن ، كما سبق أن أشرنا هناك أخطاء راجعة اما الى القياس او الى تكوين المعادلة أو الاثنين معا . وسوف نرمز الى هذه الأخطاء بالرمز ق :

$$ص = حـ_{0} + حـ_{1} ع_{1} + حـ_{2} ع_{2} + \cdots + حـ_{م} ع_{م} + ق \qquad (٣)$$

وتنشأ هنا مشكلة جديدة نظرا لان الأخطاء ق غير مشاهدة . وهنا نخطو خطوة جديدة تنتقل بالبحث من ميدان التحليل الرياضي الى ميدان التحليل الاحصائي ، لأن هذا الاخير يعطينا وسيلة علمية مناسبة للتغلب على مشكلة جهل القيم الحقيقية للمتغير ق عن طريق افتراض توزيع مناسب لها ، وهذا هو أول خطوات عمليات الاستنتاج الاحصائي .

صفات الانحرافات ق :

سنفترض ان التغيرات في ص تتكون من جزئين :

(١) جزء منتظم $\bar{ص}$ وهو

$$\bar{ص} = حـ_{0} + حـ_{1} ع_{1} + \cdots + حـ_{م} ع_{م} \qquad (٢)$$

(٢) الباقي ق وهو بالتالي جزء يمكن ان نفترض انه يرجع الى عوامل الصدفة وليس الى عوامل منتظمة . وبعبارة اخرى نعتبر أن ق متغير عشوائي وعلينا اذن ان نحدد صورة مناسبة لتوزيعه الاحصائي .

وتتضمن عملية التوصيف لمثل هذا التوزيع التعبير عن متوسطه وتشتته وغير ذلك من الصفات (كالالتواء والتفرطح .. الخ) اذا لزم الامر . وسوف نجد انه يمكننا ان نكتفي في الجزء الاكبر من النظرية بالمتوسط والتباين فقط . فنظرا لأن ق تعبر عن انحرافات عن القيم النظرية ، فمن المناسب أن نعتبر أن متوسط هذه الانحرافات يساوي الصفر نظريا ، لانه لو ساوى قيمة غير صفرية لأمكننا ادخالها ضمن الجزء المنتظم $\bar{ص}$.

ولكن ما هو المقصود بالمتوسط النظري ؟

ذلك فلن نحتاج الى هذا الفرض فى كل الاحوال ولذلك سنهمله الا اذا اقتضت الضرورة غير ذلك .

على أن اعتبار ان ق$_و$ متغيرات عشوائية لا يعنى بالضرورة ان حصولنا على قيمة من قيمها يتم بصورة مستقلة عن الباقين ، لان هذا يتوقف على طريقة انتخاب هذه القيم بغض النظر عن عشوائيتها من عدمها . فكما نعلم فى نظرية العينات ، نحاول ان نجعل عملية انتخاب عينة معينة تتم بحيث تكون كل مفردة مستقلة عن الباقين لسهولة معالجة العينات العشوائية عن غيرها من العينات . ولكى نبين اهمية هذا الفرض نفرض ان فردا معينا فى العينة التى نبحثها زاد من استهلاكه عن المستوى النظرى ، فجاءت لذلك ق$_و$ موجبة . فلو ان شخصا آخر فى نفس العينة (رقم و$'$ مثلا) تأثر بهذا السلوك وزاد من استهلاكه هو الاخر فان ق$_{و'}$ تكون موجبة نتيجة لكون ق$_و$ موجبة ، والعكس بالعكس ، وكمثال اخر نفرض ان نقط المشاهدة كانت هى السنوات وكانت لدينا دالة عرض وجاءت ق$_و$ موجبة فى سنة من السنوات مما أدى بالمنتجين الى المبالغة فى انقاص انتاجهم عما تتطلبه النظرية فسوف تكون ق$_{و'}$ فى السنة التالية سالبة لذلك السبب .

مثل هذه الحالات يمكن ان تنشأ عمليا ولكننا سوف نفترض عدم تحققها عند اجراء البحث الا اذا ثبت عكس ذلك ، وسوف نعالج هذه الحالة على حدة فيما بعد . وعلى ذلك يمكننا ان نفترض حاليا أن تغاير أى انحرافين هو الصفر كواحد من شروط استقلال الانحرافات عن بعضها البعض .

$$\text{ت} (\text{ق}_و \ \text{ق}_{و'}) = \text{صفر} \qquad (و \neq و') \qquad (٨)$$

ويلاحظ ان التغاير هو توقع حاصل ضرب انحرافى المتغيرين عن وسطهما الحسابيين وهما الصفر ، ولذلك اكتفينا باخذ توقع حاصل الضرب مباشرة .

ننتقل الان الى توصيف علاقات هذه الانحرافات بالمتغيرات ص ، ع$_ر$ نفسها فنلاحظ ان طريقة المربعات الصغرى تتطلب ان تكون المتغيرات ع$_ر$ متغيرات غير عشوائية فاذا كانت القيم المشاهدة فى النقطة (و) هى ع$_{رو}$ (ر = (، ٠٠٠ ، م) فاننا

عندما نتصور فرضا اعادة اجراء المشاهدة لنفس النقطة فسوف تبقى المتغيرات ع$_{ر}$ عند قيمتها المشاهدة ع$_{ر و}$. وعلى ذلك تبقى ع$_{ر و}$ ثابته لاى نقطة و وبالتالى يكون توقعها هـــو قيمتها (لان متوسط المقدار الثابت هو نفسه هذا المقدار) .

∴ ت (ع$_{ر و}$) = ع$_{ر و}$ (لجميع قيم ر ، و) (٩)

ويترتب على ذلك ان تغاير المتغيرات ع مع البواقى ق هو الصفر لان

تغا (ع$_{ر و}$ ، ق$_{و}$) = ت (ع$_{ر و}$ ق$_{و}$) = ع$_{ر و}$ ت (ق$_{و}$) = صفر (١٠)

وهذا يعنى اولا ان المتغيرات ع$_{ر}$ مشاهدة بدون اخطاء وانها كذلك مستقلة عن الخطأ فى المعادلة ، وبالتالى تكون الاخطاء ق هى اخطاء فى ص فقط اما لخطأ مشاهدة ص او لعدم مطابقة المعادلة تماما للواقع بالنسبة لتفسير ص .

هذه النقطة الاخيرة من النقط الرئيسية التى كثيرا ما اغفلها الكتاب ، لانه لا يوجد ما يدعو لان نعتبر ان المعادلة بصورتها السببية المنطقية متفقة مع هذا الشرط الاحصائـــى او بعبارة اخرى فان توقف ص على المتغيرات ع$_{ر}$ من الناحية المنطقية لا يعنى بالضـــرورة ان ينحصر الخطأ العشوائى فى المعادلة الاقتصادية فى ص نفسها ، كما انه لا يستتبع ان يكون خطأ المشاهدة قاصرا عليها فقط .

اذن فالصيغة الاحصائية للمعادلة لا تستخلص اساسا من الصورة السببية النظرية ، وانما تقتضى دراسة لخصائص ق وتعيين المتغير التابع ص على اساس انه المتغير الذى يتأثر بالخطأ ق . ولعل السبب فى فشل كثير من البحوث الاحصائية فى الاقتصاد راجع الى عـــدم ادراك هذه النقطة الهامة :

(١) فمن الجائز ان يكون ص هو المتغير التابع سببيا ومع ذلك فان ق تؤثر فى متغير آخـــر غيره . وفى هذه الحالة علينا ان نعتبر هذا المتغير الاخير هو المتغير التابع بالمعنى الاحصائى .

(٢) كذلك قد يظهر من التحليل ان هناك اكثر من متغير واحد يتأثر بالانحراف ق ، كأن تكون هناك اخطاء مشاهدة فى اكثر من متغير او ان يتأثر متغيران او اكثر بالخطأ فى المعادلة وفى هذه الحالة لا يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى .

ولتفادى الخلط بين اتجاه العلاقة السببية وشكل العلاقة الاحصائية سوف نطلق على المتغيرات ع اسم المتغيرات المحددة حيث انها تبقى محددة القيمة مهما تغيرات قيم المتغيرات العشوائية ويكون ص هو المتغير التابع لتأثره بالقيم العشوائية المتغيرة ٠

تعريف العزوم :

اذا كان لدينا متغيران س ، ص مشاهدان لعدد من النقط (ن) فان عزمهما حول نقطة معينة يعرف بانه مجموع حواصل ضرب انحرافاتهما عن هذه النقطة ٠ فمثلا يكون العزم حول نقطة الاصل (الصفر) هو مح س ص ٠ واهم انواع العزوم هو ذلك المحسوب حول الوسط الحسابى لكل من المتغيرين ٠ وكحالة خاصة فان عزم س ، ص ان هو الا مجموع مربعات انحرافات س عن وسطها الحسابى ٠ فاذا رمزنا الى العزم بالرمز م ورمزنا الى الانحرافات عن الوسط الحسابى للمتغيرات التى تظهر فى المعادلة (٤) بالرموز :

$$\text{ض}_{و} = \text{ص}_{و} - \bar{\text{ص}} \quad ، \quad \text{غ}_{ر و} = \text{ع}_{ر و} - \bar{\text{ع}}_{ر} \qquad (١١)$$

فان

$$\left.\begin{aligned} \text{م}_{\text{ص ص}} &= \frac{\text{مح ض}^{٢}_{و}}{\text{و}} \quad ، \quad \text{م}_{\text{ص}_{ر}} = \frac{\text{مح ض}_{و} \text{غ}_{ر و}}{\text{و}} \\ \text{م}_{\text{ر ر}} &= \frac{\text{مح غ}^{٢}_{ر و}}{\text{و}} \quad ، \quad \text{م}_{\text{ر ص}} = \frac{\text{مح غ}_{ر و} \text{ض}_{و}}{\text{و}} \end{aligned}\right\} \qquad (١٢)$$

ويلاحظ انه عند اجراء العمليات الحسابية يمكن استخدام القاعدة الخاصة باستخدام وسط فرضى ثم تصحيح الناتج فى الخطوة الاخيرة ٠ فاذا كان الوسط الفرضى هو الصفر فأن :

$$\text{م}_{\text{ص ص}} = \frac{\text{مح ص}^{٢}_{و}}{\text{و}} - \bar{\text{ص}}^{٢} = \frac{\text{مح ص}^{٢}_{و}}{\text{و}} - \frac{(\text{مح ص}_{و})^{٢}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{١}{\text{ن}} \left\{ \text{ن مح ص}^{٢}_{و} - (\text{مح ص}_{و})^{٢} \right\}$$

فاذا ضربنا الطرفين فى ن فاننا نحصل على ما يسمى بالعزوم المبكرة :

$$\left.\begin{aligned} \text{ن م}_{\text{ص ص}} &= \text{ن مح ص}^{٢}_{و} - (\text{مح ص}_{و})^{٢} \\ \text{بالمثل} \quad \text{ن م}_{\text{ر ر}} &= \text{ن مح ع}^{٢}_{ر و} - (\text{مح ع}_{ر و})^{٢} \end{aligned}\right\} \qquad (١٣)$$