UNITED ARAB REPUBLIC

THE INSTITUTE OF NATIONAL PLANNING

مذكرة رقم ٧١٧

الطرق الاحصائية فى الاقتصاد القياسى

ب - طرق التقدير عند تعدد اخطاء المشاهدة .

دكتور محمد محمود الامام

أبريل سنة ١٩٦٧

CAIRO

3, MOHAMED MAZHAR - ZAMALEK

الآراء التى وردت فى هذه المذكـــــــــــــــــــــرة
تمثل رأى الناتب ولاتمثل رأى المعهد ذاتــــــــــــــــه

ب ـ طرق التقدير عند تعدد أخطاء المشاهدة

المحتويـــات

١ ــ **المشكلـــــــة :**

اتضح لنا عند مناقشة قواعد التقدير باستخدام نظرية المربعات الصغرى[١] أن أحد الشـــــروط الاساسية التى يجب أن تتوفر لضمان سلامة التقديرات هو استقلال المتغيرات المحددة عـــــن الانحراف ق الذى يظهر فى المعادلة . غير أنه كثيرا ما نواجه فى الدراسات الاقتصاديـــــة بالموقف التالى :

تنص النظرية الاقتصادية على وجود علاقة رياضية (تامة) بين عدد (م مثلا) من المتغيرات ، بمعنى أنه لو أمكن مشاهدة هذه المتغيرات بدقة كاملة لتحققت المعادلة بدون أى أنحـــراف . وسنرمز الى هذه المتغيرات النظرية بالرمز $\bar{ص}_{ر}$ ($ر$ = صفر ، ١ ، ٢ ، ..... ، م-١) ، فاذا كانت العلاقة خطية أمكننا أن نقول

$$\text{أ}_{٠}\,\bar{\text{ص}}_{٠و} + \text{أ}_{١}\,\bar{\text{ص}}_{١و} + \text{أ}_{٢}\,\bar{\text{ص}}_{٢و} + \ldots\ldots + \text{أ}_{م-١}\,\bar{\text{ص}}_{م-١ \text{، } و} + \text{أ}_{م} = \text{صفر} \qquad (١)$$

حيث المعالم $\text{أ}_{ر}$ مجهولة ويراد تقديرها ، وحيث العلاقة صحيحة لأى نقطة من نقـــــــط المشاهدة و (= ١ ، ٢ ، ..... ، ن) .

غير أنه عند اجراء القياس للمشاهدات ترتكب أخطاء لواحد من عدة أسبـــــاب :

(١) الأخطاء الشائعة فى جمع البيانات سواء كان هذا الجمع بطريق الحصر الشامل أو بالعينـــــة . ويرجع فى هذا الشأن الى كتب الاحصاء الاقتصادى .

(٢) الالتجاء الى مقاييس مركبة وفقا للقواعد الاحصائية المعروفة للدلالة على بعض المتغيرات الاقتصادية التى تتعذر مشاهدتها مباشرة . فالسعر مثلا متغير لا يمكن مشاهدته مباشرة ، لأن هنـــــاك أسعار مختلفة فى الأسواق والأوقات المختلفة ، وقد نضطر الى التعبير عنه بمتوسط معـــــين لبعض الاسعار الدالة (فى أوقات معينة أو أسواق محددة) .

(٣) ومن هذا القبيل أيضا الاصطلاحات التى يستخدمها الكتاب النظريون للدلالة على مفاهيم ذات مغزى نظرى واضح ، ومع ذلك لا يوجد لها مقابل عملى مباشر . فالمستوى العام للأسعـــــار هو تعبير نظرى نلجأ للدلالة عليه الى الأرقام القياسية للأسعار ، ومعلوم أن هذه الأرقام ان هى الا مؤشرات تقريبية .

---

(١) مذكرة ٧١٧ جزء (أ)

(٤) وفى كثير من الأحيان يقوم الباحث بدراسة عن فترة ماضية معتمدا على بيانات سبق أن جمعها باحثون آخرون لأغراض مخالفة ، بتعاريف لا تتفق بالضرورة مع تعريفاته النظرية ، ويضطر فى سبيل ذلك الى الأخذ بهذه التعاريف فى أقرب صورها الى احتياجاته . فنحن قد نرغب فى دراسة الاستثمار الصافى أو الدخل الصافى ، ومع ذلك لا تتاح لنا الا البيانات الاجمالية ، فنضطر الى الاستعاضة بها عن المتغيرات الحقيقية اللازمة لنا — وذلك على سبيل التقريب .

هذا النوع الأخير من الأخطاء شائع الحدوث بصور مختلفة ، خاصة وأن الهيئات التى تجمع البيانات ليست هى التى تقوم بتحليلها ، ولا يملك الباحث أن يقوم بعملية جمع البيانات من مصادرها الأولية فى أغلب الأحوال . فضلا عن ذلك فانه حتى عندما تتوفر للهيئات المسئولة عن جمع البيانات كافة الامكانيات اللازمة فانها لا تستطيع أن توفر كل المشاهدات بالدقة التامة ، وقد تكتفى بأيراد التقديرات مع ذكر هامش الخطأ فى كل منها ($\pm$ ٥% أو $\pm$ ٢٠% مثلا)

اذن يمكننا أن نقول أن القيم $\tilde{\text{ص}}_{\text{رو}}$ قلما تشاهد عمليا وانما الذى يشاهد هو قيم أخرى $\text{ص}_{\text{رو}}$ تختلف عنها بخطأ قدره $\text{ط}_{\text{رو}}$ ، وهو مقدار مجهول ، والا أمكن تصحيح المشاهدات به للوصول الى القيم الحقيقية . وبذلك يتلخص الموقف فى أن المشاهدات تتكون من جزئين مجهولين :

(١) جزء حقيقى أو منتظم $\tilde{\text{ص}}_{\text{رو}}$ (Systematic or ideal)

(٢) خطأ فى المشاهدة $\text{ط}_{\text{رو}}$ (Measurement or Observation Error)

بحيث تكون المشاهدات هى

$$\text{ص}_{\text{رو}} = \tilde{\text{ص}}_{\text{رو}} + \text{ط}_{\text{رو}} \qquad (٢)$$

فاذا حاول الباحث تقدير المعالم $\text{أ}_{\text{ر}}$ فى (١) باستخدام المشاهدات الخاطئة نشأت لديه معادلة جديدة هى :

$$\text{أ}_{٠}(\text{ص}_{٠\text{و}} - \text{ط}_{٠\text{و}}) + \cdots + \text{أ}_{\text{م}-١}(\text{ص}_{\text{م}-١،\text{و}} - \text{ط}_{\text{م}-١،\text{و}}) + \text{أ}_{\text{م}} = \text{صفر}$$

هذه المعادلة يمكن كتابتها كالاتــــى

$$\text{أ}_{\cdot}\,\text{ص}_{\cdot\text{و}} + \text{أ}_{١}\,\text{ص}_{١\text{و}} + \cdots + \text{أ}_{\text{م}-١}\,\text{ص}_{\text{م}-١\text{،و}} + \text{أ}_{\text{م}} = \text{ط}_{\text{و}} \qquad (٣)$$

حيث

$$\text{ط}_{\text{و}} = \text{أ}_{\cdot}\,\text{ط}_{\cdot\text{و}} + \text{أ}_{١}\,\text{ط}_{١\text{و}} + \cdots + \text{أ}_{\text{م}-١}\,\text{ط}_{\text{م}-١\text{،و}} \qquad (٤)$$

أى أنها مجموع لأخطاء المشاهدات كلها ، كل منها مرجح بوزن يساوى المعاملات الخاصة بمتغيره .

هذه الصورة الجديدة للمعادلة أظهرت أنها معادلة احصائية تحتوى على خطأ (عشوائى) هو $\text{ط}_{\text{و}}$ ، مما يغرى الباحث بأن يسعى لاستخدام طريقة المربعات الصغرى . وهذا هو ما كان شائعا حدوثه سواء بين الاقتصاديين الذين ألموا بعض الالمام ببعض الطرق الاحصائية ، أو بين الاحصائيين الذين لم يسعوا الى دراسة خصائص المشاهدات الاحصائية الاقتصادية ، ولذلك صاغوا المعادلة (١) مباشرة فى الصورة (٣) دون توضيح (٢) .

فاذا كان هناك ما يدعو الى اعتبار أن أحد المتغيرات $\text{ص}_{\cdot}$ مثلا متغيرا تابعا ، استبقى هذا المتغير فى الطرف الأيمن بمعامل يساوى الواحد الصحيح ونقلت باقى المتغيرات الى الطرف الأيسر لتبدو كمتغيرات متبوعة وفقا للمنطق الاقتصادى . وينتقل الأمر بعد ذلك الى ترجمة هذا الاتجاه للعلاقة السببية أن يعتبر أن $\text{ص}_{\cdot}$ هو المتغير التابع احصائيا ، بينما الباقين متبوعين فيؤخذ انحداره عليهم . فنحن اذا نقلنا المتغيرات $\text{ص}_{١}$ الى $\text{ص}_{\text{م}-١}$ الى الطرف الأيسر فانها تشغل مكان المتغيرات $\text{ع}_{\text{ر}}$ ، وتصبح المعادلة هــى :

$$\text{ص}_{\cdot\text{و}} = \text{ب}_{١}\,\text{ص}_{١\text{و}} + \text{ب}_{٢}\,\text{ص}_{٢\text{و}} + \cdots + \text{ب}_{\text{م}-١}\,\text{ص}_{\text{م}-١\text{،و}} + \text{ب}_{\text{م}} + \text{ق}_{\text{و}} \qquad (٥)$$

حيــث

$$\text{ب}_{\text{ر}} = -\text{أ}_{\text{ر}} / \text{أ}_{\cdot} \qquad (\text{ر} = ١\text{، ....، م})$$

$$\text{ق}_{\text{و}} = \text{ط}_{\text{و}} / \text{أ}_{\cdot}$$

وهذه الصورة توحى بتطبيق المربعات الصغرى ، ولكن هل هذا جائز ؟

من الواضح أن فرض استقلال المتغيرات " المتبوعة " عن البواقى ق لا يتحقق لأن ق تحتوى

على الخطأ $\text{ط}_{\text{ر}}$ الذي هو جزء من $\text{ص}_{\text{ر}}$ ، وهذا يهدم أحد الشروط الأساسية للمربعات الصغرى[1] ، وعلينا أن نبحث عن طريقة جديدة للتقدير ، ومن هنا نجد أن النظرية الاحصائية يجب أن تتطور بما يخدم أغراض البحث الاقتصادي وظروفه ، وكانت هذه الملاحظة هي أول لبنة وضعت في صرح علم الاقتصاد القياسي .

٢ ـ **الفروض :**

كما فعلنا بالنسبة للمربعات الصغرى ، علينا أن نبدأ بتحديد الفروض التي تناسب الموقف الجديد ، وبالذات نبرز خصائص المتغيرات العشوائية $\text{ط}_{\text{ر}}$ عن طريق تحديد بعض المعالم الأساسية لتوزيعها . وهذه الفروض هي :

(١) توقع كل خطأ هو الصفر لكل نقطة من نقط المشاهدة

$$\text{ت} \left(\text{ط}_{\text{رو}} \right) = \text{صفر} \qquad (\text{لجميع ر ، و}) \qquad (٦)$$

وهذا ينفي وجود تحيز في قياس مشاهدة ما ، يجعل طريقة القياس المستخدمة تعطي دائما نتيجة أعلى من الواقع أو دون الواقع . (لاحظ أن هذا قد لا يتحقق أحيانا : فرقم لاسبيرز القياسي متحيز الى أعلى بعكس رقم باشي . غير أننا سنعتبر أنه حتى لو استخدمت صيغة مثلى فستظل هناك أخطاء أخرى عشوائية يمكن أن تكون تارة بالزيادة وأخرى بالنقص بحيث نستطيع أن نعتبر قيمتها المتوسطة النظرية هي الصفر) .

(٢) الأخطاء مستقلة عن بعضها البعض سلسليا Serially Independent بمعنى أن القيمة لخطأ معين في نقطة معينة مستقلة عن قيمته وقيمة غيره من الأخطاء في نقطة أخرى . وأحد شروط الاستقلال أن يكون :

$$\text{ت} \left(\text{ط}_{\text{رو}} \times \text{ط}_{\text{ر}'\text{و}'} \right) = \text{صفر} \qquad (\text{لجميع ر ، ر}' \text{ حيث و} \neq \text{و}') \qquad (٧)$$

(لاحظ أيضا أن هذا قد لا يتحقق في الدراسات الاقتصادية ، فقد نعتمد على تعداد إنتاج يؤخذ كل عشر سنوات لانشاء سلسلة زمنية باستخدام بيانات عن السنوات بين التعدادات تبنى على رقم التعداد ، مما قد يؤدي إلى تكرر خطأ معين لعدد من السنوات . ولذلك فان عملية جمع البيانات الاقتصادية عملية مستمرة ودائبة التصحيح كلما توفرت معلومات جديدة) .

---

(١) أنظر المذكرة رقم ٧١٧ ـ القسم أ صفحة ١٣ ، ١٨ .

(٣) العلاقة السابقة (٧) لم تتعرض للحالة التى فيها و = وَ ، أى التى تنتمى فيها الأخطاء الى نفس الفترة . فنلاحظ أولا أنه اذا كانت ر = رَ فان هذا التوقع يكون هو توقع مربع ط$_{\text{رو}}$ أى التباين . وكما فى المربعات الصغرى ، اذا رمزنا الى التباين بالرمز ى فانه يفترض أن كل خطأ له تباين لا يختلف من نقطة مشاهدة لأخرى :

تبا (ط$_{\text{رو}}$) = ى$_{\text{ر}}$ (أيا كانت و) (٨)

(ر = ٠ ، ١ ، ... ، م−١)

(٤) أما اذا كانت ر ≠ رَ فانه يصبح لدينا تغاير خطئين . ومعلوم أنه فى بعض الحالات يرتبط خطأ مشاهدة متغير بخطأ مشاهدة متغير آخر . فمثلا قد نقيس الاستهلاك بأنه فرق الدخل عن الاستثمار ، ولذلك فأن أى خطأ فى الاخيرين ينتقل الى الأول . كذلك قد نقسم الدخل النقدى والاستهلاك النقدى على رقم قياسى لأسعار التجزئة لنستبعد أثر التغير فى السعر ، ولذلك فان الخطأ فى هذا الاخير ينعكس بنفس الشكل فى المتغيرين السابقين .

ومع ذلك فأن بعض النظريات التى سوف نستخدمها تفترض غياب هذا النوع من العلاقات بين الأخطاء :

تغا (ط$_{\text{رو}}$ ، ط$_{\text{رَو}}$) = صفر (لجميع ر ≠ رَ ولجميع و) (٩)

(٥) أما الفرض المناظر لاستقلال المتغيرات المحددة عن الأخطاء فى المربعات الصغرى فانه ينتقل الآن الى شرط استقلال الجزء الحقيقى للمتغيرات عن الأخطاء سواء لنفس المتغير أو غيره :

تغا (صَ$_{\text{رو}}$ ، ط$_{\text{رَو}}$) = صفر (لجميع ر ، رَ) (١٠)

ويترتب على ذلك أن :

تغا (صَ$_{\text{رو}}$ ، ق$_{\text{و}}$) = صفر (١٠َ)

وفى نفس الوقت نجد أن :

تغا (ص$_{\text{رو}}$ ، ق$_{\text{و}}$) = تغا (صَ$_{\text{رو}}$ ، ق$_{\text{و}}$) + تغا (ط$_{\text{رو}}$ ، ق$_{\text{و}}$)

= صفر + ت (ط$_{\text{رو}}$ × مجـ$_{\text{هـ}=٠}^{\text{م}-١}$ ب$_{\text{هـ}}$ ط$_{\text{هـو}}$)

≠ صفر

ولذلك فان طريقة المربعات الصغرى لا تنطبق ، ولابد من طريقة أخرى للتقدير .

(٦) وكما فى حالة المربعات الصغرى فان تقدير المعالم المجهولة التى عددها م يستلزم أن يكون عدد المشاهدات هو م على الاقل :

$$\text{ن} \geq \text{م} \qquad (\text{١١})$$

فلو فرض أن توفر العدد اللازم من المشاهدات فما هو السبيل الى إجراء التقدير ؟

٣ — <u>الاسس العامة للتقدير</u> :

لنعد مرة أخرى الى المعادلة بصورتها (٣) التى لا يميز فيها أحد المتغيرات كمتغير تابع . وواضح أن التعويض بالمشاهدات فيها يعطى ن معادلة

$$\sum_{\text{ر}=\text{٠}}^{\text{م}-\text{١}} \text{أ}_{\text{ر}}\,\text{ص}_{\text{رو}} + \text{أ}_{\text{م}} = \text{ط}_{\text{و}} \qquad (\text{و} = \text{١}، \ldots، \text{ن}) \qquad (\text{٣})$$

ومن الممكن استخلاص تقدير للمعلمة أم باستخدام فرض عدم تحيز الاخطاء (٦) :

$$\hat{\text{أ}}_{\text{م}} = -\sum_{\text{ر}=\text{٠}}^{\text{م}-\text{١}} \hat{\text{أ}}_{\text{ر}}\,\bar{\text{ص}}_{\text{ر}} \qquad (\text{٤})$$

أو ، اذا استخدمنا الصورة (٥) بدلا من (٣) ، فان الحد المطلق يكون تقديره هو :

$$\hat{\text{ب}}_{\text{م}} = \bar{\text{ص}}_{\text{٠}} - \sum_{\text{١}}^{\text{م}-\text{١}} \hat{\text{ب}}_{\text{ر}}\,\bar{\text{ص}}_{\text{ر}} \qquad (\text{٤}')$$

وعلى ذلك تتركز المشكلة فى تقديرات المعاملات الاخرى $\hat{\text{أ}}_{\text{ر}}$ (ر = صفر ، ١ ، ... ، م-١) .
واذا حذفنا التقدير $\hat{\text{أ}}_{\text{م}}$ من المعادلة الاصلية وكتبنا ض للدلالة على انحرافات المتغيرات ص عن متوسطاتها الحسابية ، فان

$$\sum_{\text{٠}}^{\text{م}-\text{١}} \text{أ}_{\text{ر}}\,\text{ض}_{\text{رو}} = \text{ط}_{\text{و}} \qquad (\text{١٢})$$

فلو أننا حاولنا استخدام الاسلوب الذى توصلنا به الى التقديرات فى حالة توفر شروط المربعات الصغرى لكان علينا أن نضرب المعادلة فى كل من المتغيرات $\text{ض}_{\text{هو}}$ ثم نجمع بالنسبة لجميع نقط المشاهدة و :

$$\therefore \underset{ر=٠}{\overset{م-١}{\text{مجـ}}} أ_{ر} \left(\underset{و=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ض_{رو}\, ض_{هـو} \right) = \underset{و=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ط_{و}\, ض_{هـو}$$

(هـ = ٠ ، ١ ، ... ، م — ١)

وبذلك نحصل على م معادلة يمكن حلها للحصول على التقديرات المطلوبة اذا أمكن حساب جميع حدودها . وهنا نلاحظ أن :

(١) المقادير التي تظهر في الطرف الأيمن هي عزوم المتغيرات ، محسوبة من قيمها المشاهدة :

$$م_{رهـ} = \underset{و=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ض_{رو}\, ض_{هـو} \quad (١٣)$$

(٢) أما المقادير التي تظهر في الطرف الأيسر فانه لا يمكن حسابها مباشرة طالما أن الأخطاء $ط_{و}$ غير مشاهدة . لذلك نحاول أن نعوض عنها بقيمها المتوقعة ، مع التعويض عن $ط_{و}$ وفقا لتعريفها (٤) وعن $ض_{هـو}$ وفقا للتعريف (٢) :

$$\therefore \underset{و=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ط_{و}\, ض_{هـو} = \underset{و=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} \left(أ_{٠}ط_{٠و} + أ_{١}ط_{١و} + \cdots + أ_{م-١}ط_{م-١\,و} \right)\left(\bar{ض}_{هـو} + ط_{هـو} \right)$$

$$\therefore ت \left(\underset{و=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ط_{و}\, ض_{هـو} \right) = \text{صفر} + ت \left(\underset{و=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} أ_{هـ}\, ط^{٢}_{هـو} \right)$$

$$= ن\, أ_{هـ}\, ى_{هـ}$$

ويلاحظ أن توقع حاصل ضرب $ط_{و}$ في $\bar{ض}_{هـو}$ يساوي الصفر نتيجة للفرض (١٠) .

ومن جهة أخرى فان توقع حاصل ضرب $ط_{و}$ في $ط_{هـو}$ يعطي حدودا عددها م كل منها بالصورة : $أ_{ر}\, ط_{رو}\, ط_{هـو}$. وبتطبيق الفرضين (٩) ، (٨) نجد أنه طالما ر تختلف عن الصفر فان التوقع هو الصفر ، ويبقى الحد الوحيد الذي فيه ر = هـ وهنا نحصل على $أ_{هـ}\, ط^{٢}_{هـو}$ ، وتوقعها هو $أ_{هـ} ى_{هـ}$. فاذا عوضنا عن القيم بتوقعاتها فان :

$$\underset{ر=٠}{\overset{م-١}{\text{مجـ}}} أ_{ر}\, م_{رهـ} = ن\, أ_{هـ}\, ى_{هـ} \quad (١٤)$$

وعلى ذلك اذا أمكن الحصول على تقديرات للتباينات $ى_{هـ}$ (هـ = ٠ ، ١ ، ... ، م — ١) فاننا نستطيع التعويض بها وحل هذه المجموعة من المعادلات للحصول على تقديرات المعاملات $أ_{هـ}$.

ويمكن القول أن طرق التقدير المختلفة تسعى فى الواقع الى التوصل الى تقديرات مناسبة لهذه التباينات ، بحيث يمكن حل المجموعة (١٤) بما يتفق مع هذه التقديرات التى لابد من أن تكون بدورها متفقة مع الفروض الخاصة بالانحرافات . فطريقة المربعات الصغرى يمكن اعتبارها حالة خاصة فيها تختفى جميع الأخطاء $\text{ط}_{\text{هـ}}$ وبالتالى التباينات $\text{ى}_{\text{هـ}}$ ماعدا الخطأ فى المتغير رقم صفر . ولذلك اذا استبعدنا من (١٤) المعادلة الأولى (هـ = صفر) فانه تبقى (م — ١) معادلة (هـ = ١ ، ... ، م — ١) هى

$$\sum_{\text{ر}=٠}^{\text{م}-١} \text{أ}_{\text{ر}}\ \text{م}_{\text{ر هـ}} = \text{صفر}$$

ويمكن اعادة كتابتها بوضع $\text{أ}_{٠} = -١$ ، وبالتالى تتحول باقى المعاملات الى $\text{ب}_{\text{ر}}$

$$\therefore \sum_{\text{ر}=١}^{\text{م}-١} \hat{\text{ب}}_{\text{ر}}\ \text{م}_{\text{ر هـ}} = \text{م}_{١\text{هـ}}$$

وهذه هى مجموعة المعادلات التى يؤدى حلها الى تقديرات المربعات الصغرى ، كما هو معلوم . ويلاحظ أن المعادلة الباقية التى لم تستخدم فى التقدير (والتى لم تكن لازمة لتقدير المعاملات) تستخدم فى تقدير المعلمة الأخيرة وهى التباين $\text{ى}_{٠}$ لبواقى المعادلة . وبذلك يمكن استكمال كل التقديرات .

هذا الأسلوب لا يصلح اذا كان هناك أكثر من متغير يحتوى على خطأ حيث تحتوى المجموعة على معالم أخرى هى تباينات الأخطاء الأخرى . وسوف نناقش فيما يلى بعض الطرق التى تختلف كل منها من حيث معالجة تقدير هذه التباينات .

أولا — طريقة الانحدار القطرى

٤ — الفــروض :

كان الكاتب النرويجى فريش Ragnar Frisch هو أول من عالج هذا الموضوع ولفت النظر الى خطورة الاعتماد على المربعات الصغرى خاصة وأن التقديرات تتعرض فى هذه الحالة الى مصدر خطأ جديد هو احتمال وجود أكثر من علاقة خطية بين نفس المتغيرات . وتتلخص مجموعة الفروض فيما سبق أن ذكرناه :

أ — لدينا م من المتغيرات تربط أجزاءها الحقيقية معادلة خطية تامة بدون خطأ هـــى المعادلة (١)

ب — تتكون كل مشاهدة من خطأ بجانب الجزء الحقيقي ، وفقا للمعادلة (٢)

حـ — الأخطاء غير متحيزة ، أى أن توقعها الصفر (معادلة ٦)

د — الأخطاء مستقلة سلسليا (معادلة ٧)

هـ — لكل خطأ تباين ثابت لجميع نقط المشاهدة (معادلة ٨)

و — الأخطاء فى المتغيرات المختلفة مستقلة عن بعضها البعض (معادلة ٩)

ز — الأجزاء الحقيقية مستقلة عن الأخطاء (معادلة ١٠)

ح — المشاهدات تكوّن المجتمع الكلى للأخطاء وليست مجرد عينة

ولتفادى أثر وحدات القياس ، يعمد فريش الى قياس كل متغير بوحدات معيارية أى يقسم كـــل مشاهدة على الانحراف المعيارى للمتغير الخاص بها ، ويترتب على ذلك :

١ — أن العزوم تتحول (بعد قسمتها على ن) الى معاملات ارتباط .

٢ — أن تباين الخطأ فى متغير معين يتحول الى نسبة من تباين المتغير نفسه

ويمكن تبين ذلك كالاتـــى :

تباين المتغير $ص_{ر}$ هو : $\sigma_{ر}^{٢} = \frac{1}{ن} م_{رر}$

فيكون انحرافه المعيارى هو $\sigma_{ر}$ ، وبالتالى فانه عند نقطة المشاهدة رقم و يكون المشاهدة $ص_{رو}$ بوحدات معيارية = $\frac{ض_{رو}}{\sigma_{ر}}$

ويكون الوسط الحسابى بهذه الوحدات هو $\frac{\bar{ض}_{ر}}{\sigma_{ر}}$ ، والانحرافات عنه $\frac{ض_{رو}}{\sigma_{ر}}$

أى الانحرافات بالوحدات الاصلية مقسومة على الانحراف المعيارى . وبالتالى فان

عزم المتغيرين ر ، هـ بالوحدات المعيارية = $مجـ_{و} \left(\frac{ض_{رو}}{\sigma_{ر}} \times \frac{ض_{هـو}}{\sigma_{هـ}} \right)$

$$= \frac{م_{رهـ}}{\sigma_{ر}\,\sigma_{هـ}}$$

ولكن معامل الارْتباط بين هذين المتغيرين هو

$$\text{ر}_{\text{ره}} = \frac{\text{م}_{\text{ره}}}{\text{ن}\ \sigma_{\text{ر}}\ \sigma_{\text{ه}}} = \frac{\text{م}_{\text{ره}}}{\sqrt{\text{م}_{\text{رر}} \cdot \text{م}_{\text{هه}}}} \qquad (١٥)$$

فاذا كانت $\text{ر} = \text{ه}$ فان معامل الارْتباط بين المتغير ونفسه هو الواحد الصحيح ٠

لنرمز الآن بالرموز $\text{ح}_{\text{ر}}$ الى المعاملات $\text{أ}_{\text{ر}}$ مضروبة فى الانْحراف المعيارى $\sigma_{\text{ر}}$

$$\text{ح}_{\text{ر}} = \text{أ}_{\text{ر}}\ \sigma_{\text{ر}} \qquad (١٦)$$

فتصبح المعادلة الاصْلية (٣) المراد تقديرمعالمها هـــى :

$$\text{ح}_{٠} \frac{\text{ص}_{٠\text{و}}}{\sigma_{٠}} + \text{ح}_{١} \frac{\text{ص}_{١\text{و}}}{\sigma_{١}} + \dots + \text{ح}_{\text{م}-١} \frac{\text{ص}_{\text{م}-١،\text{و}}}{\sigma_{\text{م}-١}} + \text{أ}_{\text{م}} = \text{ط}_{\text{و}} \qquad (١٧)$$

وبأخذ الانْحرافات عن الوسط الحسابى ثم أخذ العزوم كما فى (١٤) ، نحصل على معامـــلات الارْتباط وفقا للتعريف السابق ٠ ومن جهة أخرى اذا رمزنا الى نسبة تباين الخطأ الى تبايـــن المتغير بالرمز

$$\text{ك}_{\text{ر}} = \frac{\text{ى}_{\text{ر}}}{\sigma_{\text{ر}}^{٢}} \qquad (١٨)$$

فانه يمكن اعتبار أن هذه النسبة بمثابة مقياس لمدى الخطأ فى المتغير ولذلك يطلق عليها فريـــش اسم <u>كثافة الخطأ</u> disturbing intensity ٠ ويلاحظ أنه نظرا لكون :

$$\text{ص}_{\text{ر}} = \tilde{\text{ص}}_{\text{ر}} + \text{ط}_{\text{ر}}$$

فان أخذ تباين الطرفين وملاحظة أن $\tilde{\text{ص}}_{\text{ر}}$ مستقلة عن $\text{ط}_{\text{ر}}$ (تغايرهما صفر) :

$$\therefore \quad \sigma_{\text{ر}}^{٢} = \frac{١}{\text{ن}} \tilde{\text{م}}_{\text{رر}} + \text{ى}_{\text{ر}} + \text{صفر}$$

∴ بقسمة الطرفين على $\sigma_{\text{ر}}^{٢}$ فان

$$\text{ك}_{\text{ر}} = ١ - \text{مقدار موجب} \qquad (١٩)$$

حيث $\text{ك}_{\text{ر}}$ هى الاخْرى موجبة باعتبارها نسبة بين تباينين ٠ أى أن $\text{ك}_{\text{ر}}$ نسبة موجبة تقـــع بين الصفر والواحد الصحيح ٠ فهى صفر عند انعدام الخطأ ، وتصل الى الوحدة عندما يختفـــى الجزء الحقيقى ، ولذلك فكلما زادت النسبة عن الصفر واقتربت من الوحدة فان هذا يدل علـــى زيادة كثافة الخطأ فى مشاهدة المتغير ٠

وبالتعويض فى المعادلة (١٤) مع ملاحظة أن

$$م_{ره} = ن\, σ_{ر}\, σ_{ه}\, ر_{ره}$$

$$،\quad ى_{ه} = ك_{ه} \cdot σ_{ه}^{2}$$

$$\therefore \sum_{ر=٠}^{م-١} \frac{ح_{ر}}{σ_{ر}} \left(ن\, σ_{ر}\, σ_{ه}\, ر_{ره} \right) = ن \frac{ح_{ه}}{σ_{ه}} \left(ك_{ه} \cdot σ_{ه}^{2} \right)$$

وبقسمة الطرفين على $ن\, σ_{ه}$ نجد أن

$$\sum_{ر=٠}^{م-١} ح_{ر}\, ر_{ره} = ح_{ه}\, ك_{ه} \qquad (٢٠)$$

وهذه نفس مجموعة المعادلات التى يمكن الحصول عليها من (١٧) بضربها فى $\frac{ص_{هو}}{σ_{ه}}$ ثم الجمع بالنسبة الى و ، والقسمة على ن .

٥ ـ <u>أسس التقديـــر</u> :

بالرجوع الى المعادلات (٢٠) نلاحظ أنه من الممكن حل هذه المجموعة لو أننا استطعنـــا بوسيلة ما تقدير النسب ك . ولكن المشكلة هى أنه ليس من السهل الحصول على مثل هــذه التقديرات ، ولذلك يمكن أن نفكر كالاتـــى :

طالما أننا استطعنا تحديد الحدود القصوى للنسب ك فاننا نستطيع أن نصل الى حدود للمعاملات ح تتناسب مع تلك الحدود . ولتوضيح ذلك نفرض أن لدينا <u>متغيرين فقـــــط</u> $ص_{٠}$ ، $ص_{١}$ فتصبح (٢٠) مكونة من المعادلتين :

$$ح_{٠}\, ر_{٠٠} + ح_{١}\, ر_{١٠} = ح_{٠}\, ك_{٠}$$

$$،\quad ح_{٠}\, ر_{١٠} + ح_{١}\, ر_{١١} = ح_{١}\, ك_{١}$$

أى أن :

$$\left.\begin{aligned} (١ - ك_{٠})\, ح_{٠} + ر_{١٠}\, ح_{١} &= صفر \\ ر_{١٠}\, ح_{٠} + (١ - ك_{١})\, ح_{١} &= صفر \end{aligned}\right\} \qquad (٢١)$$