الجمهورية العربية المتحدة

معهد التخطيط القومى

مذكرة رقم " ١٨٨ "

محاضرات فى الاقتصاد الرياضى

الدكتور محمد محمود الامام

(الجزء الأول)

٧ يونيه ١٩٦٢

القاهرة
٣ شارع محمد مظهر - بالزمالك

الفصـــــل الأول

مقدمـة رياضيـة

١ـ الاعـداد المركبـة

١/١ـ الاعداد والعمليات الرياضية :

اذا بدأنا بأبسط أنواع الاعداد وجدنا أنه الأعداد الصحيحة (الكامـلة) integers التى تبنى على الاعداد الطبيعية (١ ، ٢ ، ٣ ، ٠٠٠٠) ومن الممكن تطبيق عمليات الجمع عليها ويكون الناتج أيضا أعدادا صحيحة وكما أنه من الممكن تعميم هذه القاعدة الى الضرب ، ثم تعميم الضرب الى عملية الرفع الى أس صحيح موجب ٠

غير أن عملية القسمة لاتؤدى دائما الى أعداد صحيحة وهنا يجب أن يضاف الى مجموعة الأعداد الصحيحة مجموعة أخرى هى الكسور fractions وتتكون من المجموعتين معا ما يعرف بالأعداد القياسية rational numbers ٠ وعلى ذلك نستطيع اجراء عمليات الجمع والضرب والرفع الى أس صحيح والقسمة على هذه المجموعة دون أن نصادف حالات شاذة ٠

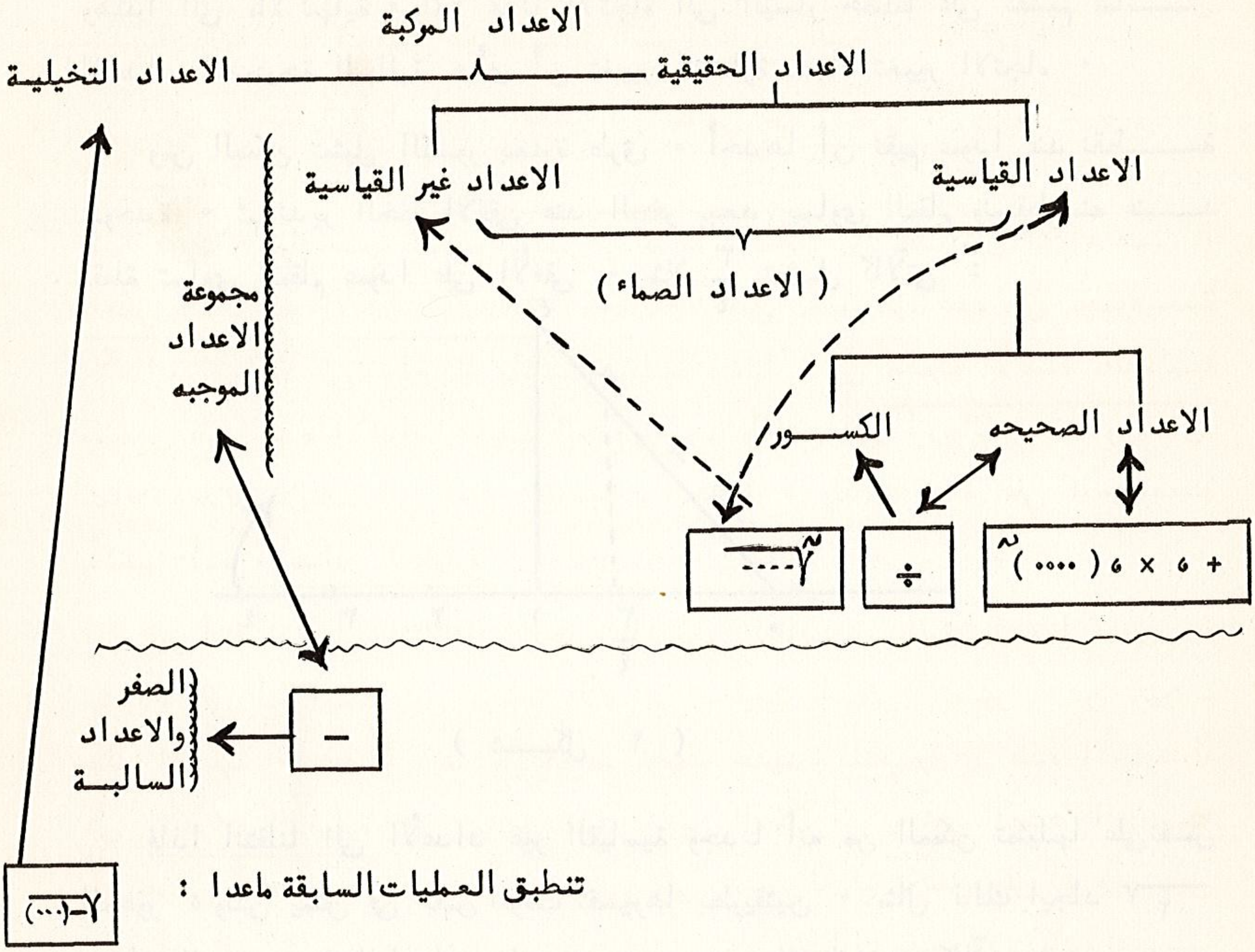
فاذا انتقلنا الى عملية ايجاد الجذور (عكس الأس) نصادف صعوبة مماثلة لتلك التى ظهرت عند القسمة (عكس الضرب) اذ أن الجذر النونى لأى عدد قياسى لايلزم أن يكون عددا قياسيا أى لايلزم أن يكون فى شكل خارج قسمة عدد قياسى على عدد قياسى آخر (باعتبار الواحد الصحيح عدد قياسى) ٠ ولذلك نحتاج الى اضافة مجموعة جديدة هى مجموعة الأعداد غير القياسية irrational numbers للتعبير عن هذه المقادير ٠ ولكن لايجب أن يعنى هذا أن يكون أى عدد منتميا الى احدى المجموعتين ، اذ من الجائز أن يشتمل العدد الواحد

على جزئين أحدهما قياسى والآخر غير قياسى ويعبر عن ذلك بكتابة الجزئين وبينهما علامة (+) وهذا هو ما يطلق أسم الأعداد الصماء Surds

ولكن يلاحظ أن كل هذه العمليات لاتظهر فكرة الاشارة ، ويمكن تسمية المجموعات السابقة كلها بأسم مجموعة الأعداد الموجبة positive number system فاذا أردنا اجراء عملية الطرح وجب أن ندخل اصطلاحين جديدين الأول هو الصفر والثانى هو الأعداد السالبة ، وبذلك نحصل مقابل كل عدد فى مجموعة الأعداد السابقة على نظير له باشارة سالبة ومنها تتكون مجموعة الأعداد السالبة وتنطبق على هذه الأعداد عمليات الجمع والضرب والرفع الى أس والقسمة دون أن نصادف عددا لاينضم الى أحد المجموعات السابقة ، ولذلك نطلق على المجموعة بأكملها أسم الأعداد الحقيقية Real numbers

غير أننا اذا أردنا ايجاد الجذر التربيعى لمقادير سالبة صادفتنا صعوبة جديدة هى أنه ليست بين مجموعة الأعداد الحقيقية ما يمكن التعبير به عن نتيجة هذه العملية ، لذلك لابد من اضافة مجموعة جديدة للتعبير عن هذه الأعداد هى الأعداد التخيلية imaginary ، ومن الممكن أن يحتوى العدد الواحد على جزئين أحدهما حقيقى والآخر تخيلى وفى هذه الحالة نحصل على ما يسمى بالأعداد المركبة complex numbers ، وبذلك يصبح فى مقدورنا أن نجرى جميع العمليات الرياضية الأساسية دون أن نصادف حالة خارجة عن المجموعتين السابقتين ، وعلى ذلك يمكن اعتبار جميع الأعداد أعدادا مركبة ، فاذا كان الجزء التخيلى منها = صفر فان العدد يكون حقيقيا ، واذا كان الجزء الحقيقى = صفر كان العدد تخيليا ،

ويمكن تلخيص هذه المجموعات كالآتى :



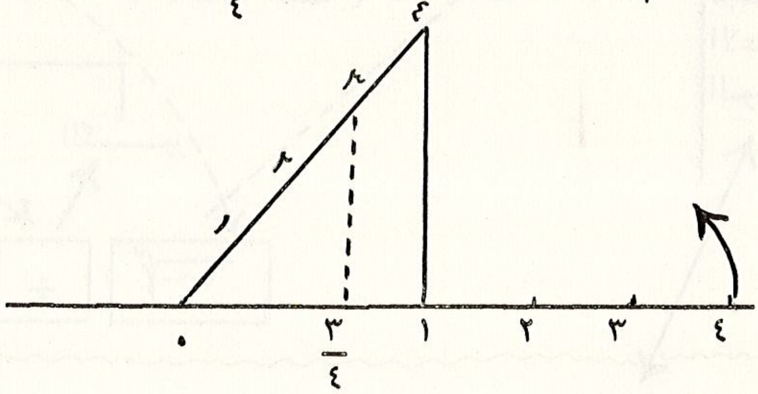
(شكل ١) مجموعات الاعداد

١/٢ـ التمثيل البيانى للاعداد الحقيقية :

يقابل التمثيل الرمزى للاعداد المختلفة والعمليات التى تجرى عليها ، تمثيل بيانى ٠ وهذا يستدعى ادخال فكرة الأبعاد dimensions ونبدأ بخط مستقيم فى المستوى نأخذ نقطة عليه تمثل الصفر ثم مسافة الى يمين الصفر نعتبرها الوحدة وباستخدام أدوات القياس المعروفة نقسم الخط الى مسافات متساوية وكل منها تساوى الوحدة ، فنحصل على متسلسلة تبدأ بالصفر ثم ١ ، ٢ ، ٣ ، ٠٠٠٠٠٠

وهكذا الى مالا نهاية ، واذا غيرنا الاتجاه الى اليسار حصلنا على تقسيم مماثل للاعداد الصحيحة السالبة ، أى أن تغيير الاشارة معناه تغيير الاتجاه .

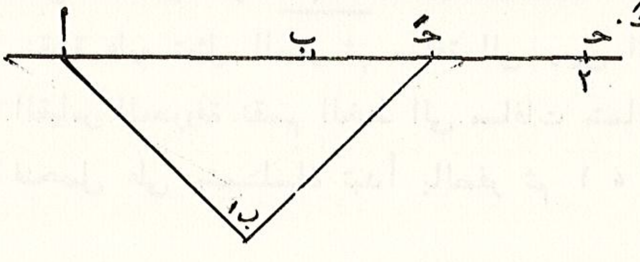
ومن الممكن تمثيل الكسور بعدة طرق ، أحدها أن نقيم عمودا عند نقطة الوحدة ، ثم ندير الخط الأفقى عند الصفر ببعد يساوى المقام ونسقط منه عند نقطة تساوى المقام عمودا على الأفقى ، مثلا $\frac{٣}{٤}$ تمثل كالآتى :



(شكل ٢)

فاذا انتقلنا الى الأعداد غير القياسية وجدنا أنه من الممكن تمثيلها على نفس المحور ، ولكن يمكن فى نفس الوقت تفسيرها بطريقتين ، مثال ذلك ايجاد $\sqrt{٢}$ فعلامة الجذر معناها اجراء عملية معينة ، وهذه العملية تتم كالآتى :

اذا سمينا نقطة الصفر " ا " والوحدة " ب " ونقطة ٢ " حـ " فاننا نستطيع أن نتصور أن الخط انكسر عند النقطة ب التى أخذت الوضع بَ بحيث ظلت ا ثابتة وتحركت حـ يسارا على المحور الافقى بحيث تأخذ الوضع حَ ، حيث يكون ابَ عمودا على بَ حَ .



(شكل ٣)

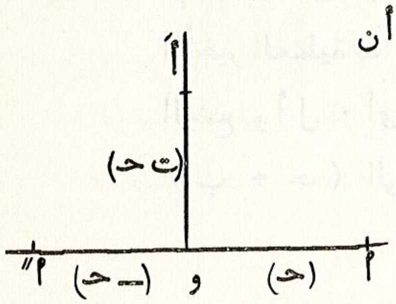
وبذلك يكون أ حَ هو الجذر المطلوب ٠ وعلى ذلك يمكن تفسير العمليـــــــة باحدى طريقتين :

١ـ الأولى هى انكسار أ ب حـ ليأخذ الوضع أ بَ حَ ٠ أى أنه يحتفظ بطولـــه الكلى مع تغيير الاتجاه بصورة منكسرة ٠

٢ـ الثانية هى تحرك حـ لكى تقع على حَ ، أى أن أ حـ يتغير طوله ولكنــــه لايزال محتفظا باتجاهـــه ٠

١/٣ـ الاعداد التخيلية والمركبة :

لنفرض الآن أن لدينا مستوى أى سطحا ذا بعدين ٠ ولنفرض أننا أخذنا على المحور الأفقى البعد الموجب و أ وليكن طوله هو حـ ٠ فاذا تحرك هذا البعد فى اتجاه عمودى على المحور الأفقى أخذ الوضع و أَ على المحور الرأسى لأعلى ، ولـــو أنه يظل محتفظـــا بطوله ولنرمز لهذه العملية operation بالرمز ت حـ (تحويرحـ)*
ثم لنكرر هذه العملية مرة أخرى ، فنجد أن البعد و أ يأخذ الوضع و أً أى أنــه يأخذ الاتجاه العكسى لاتجاهه الأصلى ، فاذا اعتبرنا أن تكرار العملية ت مرتين معناه ضربها فى نفسها أى $ت^{٢}$



(شكل ٤)

$$\therefore \; ت\,(\,ت\,حـ\,) = ت^{٢}حـ = ـــ حـ$$

---

* ويسمى الرمز ت باسم "محوّل" operator وواضح من اللفظة الانجليزية أنــه "أداة اجراء عملية" ، ونحن نقترح الترجمة السابقة نظرا لأن أى عملية يقصـــد بها أســاسا تحويل متغير من صورة لأخرى ٠

فاذا عاملنا العامل $ت^{٢}$ على أنه عدد فان

$$ت^{٢} = -١ \qquad \therefore \; ت = \sqrt{-١} \qquad (١)$$

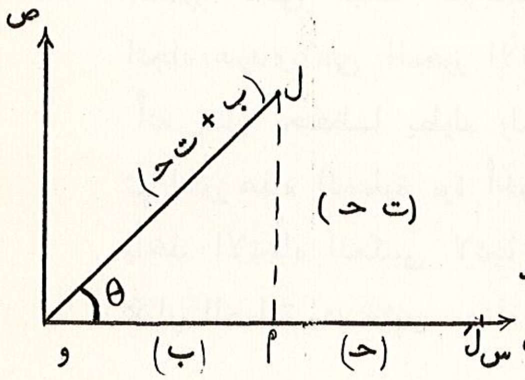
ومعنى هذا أنه اذا كانت الأعداد الحقيقية تمثل على المحور الأفقى ، فان المحور الرأسى يمثل الأعداد التخيلية كما ينظر اليها من المحور الأفقى .

وحسب التعريفات السابقة فان الاعداد المركبة يرمز اليها بالرمز

$$ب + ت ح$$

ويمكن تمثيل هذه الأعداد بيانيا بعدة طرق :

أ — باستخدام المحاور الكرتيزية المتعامدة :



نرسم المحورين المتعامدين وس ، وص ، ونأخذ على المحور الأفقى البعد وا طوله ب ثم البعد ا ل طوله ح . فاذا أدخلنا على الأخير العملية ت فان الخط وأ لَ يأخذ الوضع و أ ل . أى أن العدد يتحول من (ب + ح) الى (ب + ت ح) .

(شكل ٥) رسم أرجاند للعد د المركب

وكما مثلنا العدد الحقيقى بالطول وأ أو النقطة أ فى الاتجاه و أ ، فاننا نعتبر أن العدد المركب قد مثل بالنقطة ل أو بالبعد ول فى الاتجاه ول أو مايسمى الموجه vector ول . ويسمى هذا التمثيل البيانى برسم أرجاند Argand diagram

تعريف : العدد المركب ع هو زوج من الأعداد الحقيقية (ب ، ح) مأخوذة

بهذا الترتيب ، ويتمثل فى المستوى و س ص بالموجه و ل حيث ل هى النقطة التى أحداثياها (ب ، حـ) .

ونلاحظ أن العدد المركب هو <u>زوج</u> من الأعداد الحقيقية وليس الأعداد الحقيقية ذاتها . وكما هو معلوم ، فان طول الموجه و ل هو $\sqrt{\text{ب}^{2} + \text{حـ}^{2}}$ ، وهذا عدد حقيقى ويسمى بالقيمة المطلقة للعدد المركب أى | ع | ، ونظرا لأن هذا العدد يتحدد باتجاهه وطوله فاننا نعين زاوية الاتجاه argument ولتكن الزاوية θ . وتتحدد بدلالة ب ، حـ كالآتى : ظا θ = $\frac{\text{حـ}}{\text{ب}}$. وعلى هذا نلخص نتائجنا فى الآتى :

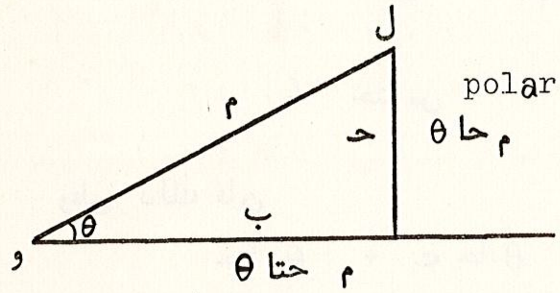
العدد المركب ع = ب + ت حـ يتمثل بالموجه و ل

قيمته المطلقه | ع | = $\sqrt{\text{ب}^{2} + \text{ب}^{2}}$ = م مثلا (عدد حقيقى) (٢)

وزاوية اتجاهه اتجاه (ع) = ظا$^{-1}$ $\frac{\text{حـ}}{\text{ب}}$ = θ مثلا

ب ـ <u>باستخدام الأحداثيات القطبية</u> :

الأحداثيات القطبية polar coordinates لنقطة معينة مثل ل تتحدد ببعد النقطة عن نقطة الأصل



(شكل ٦)

واتجاهها أى الزاوية التى تصنعها مع الأفقى و س . أى بالبعد م والزاويه θ وواضح أن الجزء الحقيقى من العدد أى ب يساوى م حتا θ ، بينما الجزء التخيلى هو ت حـ = ت م حا θ . اذن يمكن كتابة العدد كالآتى :

ع = م (حتا θ + ت حا θ) (٣)

وتكون قيمته المطلقة هى $|ع| = م \sqrt{حتا^{٢}\theta + حا^{٢}\theta} = م$ كما سبق

بينما زاوية اتجاهه $= \theta$

تمثيل العدد المركب بالدالة الأسية :

من المعلوم وفقا لنظرية مكلورين أنه يمكن تمثيل الدالة المتصلة د (س) كالآتى :

$$د(س) = د(٠) + س\,د'(٠) + \frac{س^{٢}}{٢!}\,د''(٠) + \cdots + \frac{س^{ن}}{ن!}\,د^{(ن)}(٠) + \cdots$$

حيث $د^{(ن)}$ هو التفاضل النونى للدالة د بالنسبة الى س ، وجميع التفاضلات محسوبة عند س = صفر . وكما هو معلوم فان

$$\frac{ى\,حا\,س}{ى\,س} = حتا\,س \quad ، \quad \frac{ى\,حتا\,س}{ى\,س} = -\,حا\,س$$

اذن بحساب التفاضلات المتتالية ثم وضع س فيها = صفر فان

$$حا\,س = س - \frac{س^{٣}}{٣!} + \frac{س^{٥}}{٥!} - \cdots$$

$$، \quad حتا\,س = ١ - \frac{س^{٢}}{٢!} + \frac{س^{٤}}{٤!} - \cdots$$

وعلى ذلك فان

$$حتا\,\theta + ت\,حا\,\theta = ١ + ت\,\theta - \frac{\theta^{٢}}{٢!} - \frac{ت\,\theta^{٣}}{٣!} + \cdots$$

$$= ١ + ت\,\theta + \frac{(ت\,\theta)^{٢}}{٢!} + \frac{(ت\,\theta)^{٣}}{٣!} + \cdots$$

$$\therefore\ حتا\,\theta + ت\,حا\,\theta = هـ^{ت\theta} \qquad (٤)$$

بالمثل يمكن أثبات أن

$$\text{حتا}\,\theta - \text{ت حا}\,\theta = \text{هـ}^{-\text{ت}\theta} \qquad (٤')$$

وعلى هذا فان

$$(\text{حتا}\,\theta + \text{ت حا}\,\theta)^{\text{ن}} = (\text{هـ}^{\text{ت}\theta})^{\text{ن}} = \text{هـ}^{\text{ت ن}\theta} = \text{حتا ن}\theta + \text{ت حا ن}\theta \qquad (٥)$$

$$،(\text{حتا}\,\theta - \text{ت حا}\,\theta)^{\text{ن}} = (\text{هـ}^{-\text{ت}\theta})^{\text{ن}} = \text{هـ}^{-\text{ت ن}\theta} = \text{حتا ن}\theta - \text{ت حا ن}\theta \qquad (٥')$$

هذه النتائج تعرف باسم نظرية دى موافر De Moivre

وعلى هذا فان العدد الموكب يمكن تمثيله بدلالة الدالة الأسية :

$$\text{ع} = \text{م هـ}^{\text{ت}} \qquad (٦)$$

والنظرية السابقة تعطينا نتيجة هامة بالنسبة لرفع هذه الأعداد الى أس ن.

٤/١ــ القواعد الجبرية للاعداد الموكبة :

القواعد الجبرية هى مجموعة العمليات التى تعالج بها مجموعة معينة من الأعداد . وهذه القواعد هى أساسا اصطلاحية ، ولما كانت القواعد الجبرية الخاصة بالأعداد الحقيقية شائعة الاستخدام فمن المفيد أن نستخدمها للتعبير عن العمليات المناظرة بالنسبة للأعداد الموكبة . وسنرمز الى العدد الموكب $\text{ع}_{\text{ر}}$ (ر = ١ ، ٢ ، ......) بالرمز ($\text{س}_{\text{ر}}$ + ت $\text{ص}_{\text{ر}}$) وبناء على ذلك نعرف القواعد الجبرية كالآتى :

١ـ تعريف الصفر : وفقا لتعريف العدد ع بأنه النقطة (س ، ص) ، فان ع = صفر معناه النقطة التى أحداثياها هما س = صفر ، ص = صفر ، ويؤول الموجه ول الى نقطة الأصل فى المستوى . فالصفر ، كأى عدد موكب ، يتكون من عنصرين ولا يجب اعتباره كعدد حقيقى عادى .

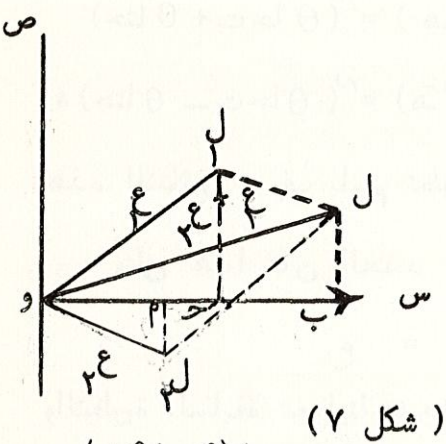
٢ـ التساوى : اذا كان ع_1 = (س_1 + تص_1) يساوى ع_2 = (س_2 + ت ص_2) فان $\text{س}_1 = \text{س}_2$ ، $\text{ص}_1 = \text{ص}_2$

أى أن الجزء الحقيقى يساوى الحقيقى بينما التخيلى يساوى التخيلى .

٣ـ الجمع : اذا عرفنا المجموع $ع_١ + ع_٢$ بأنه العدد $ع = س + ت ص$ فان :

$$ع = (س_١ + ت ص_١) + (س_٢ + ت ص_٢) = (س_١ + س_٢) + ت (ص_١ + ص_٢) \qquad (٧)$$

ومن قاعدة التساوى يتضح أن الجزء الحقيقى فى المجموع هو مجموع الجزئين الحقيقيين $س = س_١ + س_٢$ ، بينما الجزء التخيلى يساوى مجموع الجزئين التخيليين : $ص = ص_١ + ص_٢$. أى أن المجموع هو الآخر عدد مركب . ومن الممكن تمثيل عملية الجمع بيانيا ، بتكملة متوازى الأضلاع الذى ضلعاه $ع_١$ ، $ع_٢$ فيكون المجموع هو الموجه الذى



(شكل ٧) ، (ص١ + ص٢)

يمثل قطر متوازى الأضلاع و ل ، وأحداثيا ل هما $(س_١ + س_٢)$ ، فمن الواضح أن $وأ = س_٢$ بينما $س_١ = وحـ = اب$

اذن $وأ + أب = وب = س_١ + س_٢$. وبالمثل بالنسبة للأحداثى الرأسى .

٤ـ الضرب فى عدد حقيقى : يؤدى ضرب العدد $ع_١$ فى عدد حقيقى أ الى الحصول على عدد مركب $ع = أ ع_١$ ، عنصراه هما حاصلا ضرب عنصرى العدد الأصلى فى العدد أ . أى أن

$$ع = أ ع_١ = (أ س_١ ، أ ص_١) \qquad (٨)$$

ومعنى هذا تغيير طول الموجه و $ل_١$ بالنسبة أ : ا مع الاحتفاظ باتجاهه .

٥ـ ضرب الاعداد المركبة : يمكن تعريف عملية الضرب بسهولة باستخدام الصورة الأسية :

$ع_١ = م_١ هـ^{ت\theta_١}$ ، $ع_٢ = م_٢ هـ^{ت\theta_٢}$

∴ $ع = ع_١ \times ع_٢ = م_١ \times م_٢ \times هـ^{ت(\theta_١ + \theta_٢)}$ (٩)

فاذا كتبنا حاصل الضرب $ع = م هـ^{ت\theta}$ فان $م = م_١ م_٢$ ، $\theta = \theta_١ + \theta_٢$

ولتحويل هذه النتيجة الى الصورة الأصليـة نلاحظ أن

$$ع = م_١ م_٢ \left[حتا (\theta_١ + \theta_٢) + ت\ حا (\theta_١ + \theta_٢) \right]$$

$$= م_١ م_٢ \left[(حتا \theta_١ حتا \theta_٢ - حا \theta_١ حا \theta_٢) + ت (حا \theta_١ حتا \theta_٢ + حتا \theta_١ حا \theta_٢) \right]$$

$$= م_١ م_٢ \left[\left(\frac{س_١}{م_١} \times \frac{س_٢}{م_٢} - \frac{ص_١}{م_١} \times \frac{ص_٢}{م_٢}\right) + ت \left(\frac{ص_١}{م_١} \times \frac{س_٢}{م_٢} + \frac{س_١}{م_١} \times \frac{ص_٢}{م_٢}\right) \right]$$

∴ $ع = (س_١ س_٢ - ص_١ ص_٢) + ت (س_١ ص_٢ + س_٢ ص_١)$ (١٠)

أى أن حاصل الضرب $ع = ع_١ ع_٢$ هو العدد المركب

$$\{ (س_١ س_٢ - ص_١ ص_٢) ، (س_١ ص_٢ + س_٢ ص_١) \}$$

ومن الممكن استخلاص هذه النتيجة بتطبيق طرق الضرب العادية على حاصل الضـــرب مباشـــرة

$(س_١ + ت ص_١) \times (س_٢ + ت ص_٢)$ مع ملاحظة أن $ت^٢ = -١$

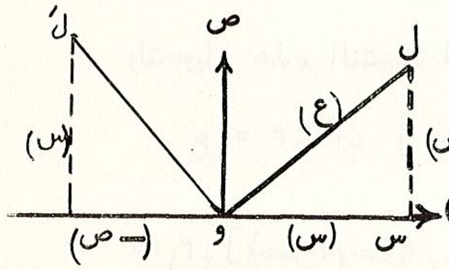
٦ـ حالات خاصة : يمكن تعريف الوحدة " ا " بأخذ موجه على المحور الأفقى يسـاوى (١ ، صفر) وتكون زاوية اتجاه الموجه θ = صفر ٠ كما يمكن تعريف المحول "ت" بأنه (صفر ، ١) وواضح من (٢) أن زاوية اتجاهه θ هى $\frac{ط}{٢}$ ٠

أى أن كلا منهما عبرنا عنه بشكل عدد مركب ٠ ومن الواضح أن العـــدد أ هو أ × ١ = (أ ، صفر) بينما ت حـ = (صفر ، حـ) ٠ اذن

أ + ت حـ = (أ ، صفر) + (صفر ، حـ) = (أ ، حـ)

أى أن كل عدد مركب (س ، ص) يمكن التعبير عنه بمجموع عددين مركبين الأول هو العدد المركب الوحدة مضروبا فى عدد حقيقى س ، والآخر هو العدد المركب ت مضروبا فى العدد الحقيقى ص •

ولتمثيل عملية الضرب فى الوحدة وفى ت نلاحظ أنه اذا كان لدينا العدد ع يمثله الموجه و ل فان حاصل الضرب :



(شكل ٨)

١ × ع = (١ ، صفر) (س ، ص) = (س ــ صفر ، ص + صفر)

= (س ، ص) = ع = الموجه و ل

، ت × ع = (صفر ، ١) (س ، ص) = (صفر ــ ص ، صفر + س) = (ــ ص ، س) = الموجه و لَ

أى أن الضرب فى ت يؤدى الى تحوير الموجه بزاوية قائمة $\theta = \frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ • فعملية الضرب تنطوى على عملية جمع للزوايا ، فيضاف الى الزاوية θ الأصليه الزاوية $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ • وكذلك •

$\text{ت}^{٢}$ = (صفر ، ١) × (صفر ، ١) = (صفر ــ ١ ، صفر + صفر) = (ــ ١ ، صفر)

$\text{ت}^{٢}$ = (ــ ١) × ١ (١١)

حيث (ــ ١) هو العدد الحقيقى ــ ١ بينما ١ هو الوحدة المركبة وهنا يتم التحوير مرتين •

ومن الممكن استخلاص هذه النتائج باستخدام الأحداثيات القطبية • فبوضع م = ١ ، $\theta = \frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ نجد أن العدد بالصورة الأسيية يكون هو ع = $\text{هـ}^{\text{ت}\frac{\text{ط}}{\text{٢}}}$ = حتا $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ + ت حا $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ ومنها ت = $\text{هـ}^{\text{ت}\frac{\text{ط}}{\text{٢}}}$ ، ــ ت = $\text{هـ}^{-\text{ت}\frac{\text{ط}}{\text{٢}}}$ (١٢)

∴ $\text{هـ}^{\text{ت}\frac{\text{ط}}{\text{٢}}}$ + $\text{هـ}^{-\text{ت}\frac{\text{ط}}{\text{٢}}}$ = صفر (١٣)