الجمهورية العربية المتحدة

معهد التخطيط القومي

مذكرة رقم (٧٦٦)

دراسات
فى الاقتصاد القياسى

جزء (٢)

دكتور
محمد جلال الدين أبو الدهب

يونيو ١٩٦٧

القاهرة
٣ شارع محمد مظهر - بالزمالك

الاراء التى وردت فى هذه المذكرة
تمثل رأى الكاتب ولا تمثل رأى المعهد ذاته

*

الطرق الاحصائية المستخدمة فى
الاقتصاد القياسـي

يلجأ الاقتصاديون فى تحليلاتهم للمتغيرات الاقتصادية الى استخدام احدى الطريقتين الأساسيتين الآتيتين :

أولا : التحليل الايجابى Positive Analysis

وهذه تعنى أنه يمكن التنبأ بالعلاقات الكمية بين المتغيرات المختلفة فى لحظة زمنية معينة ، ولذا يطلق على هذه الطريقة فى بعض الأحيان بالطريقة الوصفية أو الطريقة التوقعية وذلك لأنها تعتمد اعتمادا كليا على العلاقات الكمية بين المتغيرات وبالحالة التى تتواجد بها . ولذا يمكن استخدام النتائج المتحصل عليها فى عمليات التنبأ للعلاقات الكمية التى قد تسود فى المستقبل اذا لم يحدث تغير حقيقى فى الأحوال الاقتصادية السائدة ، والطريقة الاحصائية الأساسية التى تستخدم فى التحليل الايجابى هى طريقة الانحدار .

ثانيا : التحليل النموذجى Normative Analysis

وتمكن هذه الطريقة الباحثين من الوصول ـ عن طريق تحليلهم للبيانات المتوفرة ـ الى الحالات المثلى للانتاج ، والاستهلاك والتوزيع ، وذلك بهدف تنظيم الوحدات الانتاجية وما الى ذلك . أى بمعنى أن التحليل النموذجى يمكننا من معرفة ما يجب أن تكون عليه العلاقات الاقتصادية المختلفة تحت فروض معينة ـ ويطلق على هذه الطريقة بعض الأحيان التحليل الارشادى Prescriptive Analysis وأهم الطرق المستخدمة تحت هذا النوع من التحليل هى طريقة البرمجة Programming Technique .

طـرق القيــــاس

يستخدم الباحثون الكثير من طرق القياس فى دراستهم ، وتحليلهم ، وتقديرهم للعلاقــات الاقتصادية المختلفة . وتمثل هذه الطرق المحاولات الكثيرة التى قام بها رجال الاقتصاد لتفهـم ، وتحليل ، وشرح الظواهر الاقتصادية المختلفة سواء ما ظهر منها فى الماضى أو فى الحاضر أو مـا يتوقع أن تكون عليه فى المستقبل ، ويعتمد بعض هذه المحاولات اعتمادا كليا على الرسوم البيانيـة فى حين أن يستخدم البعض الآخر الطرق الاحصائية المعقدة . ويلاحظ أن البعض يعتمد فـى تحليله على بيانات تاريخية فى صورة سلاسل زمنية فى حين أن البعض الآخر يستخدم بيانات مصدرها عينات ممثلة للمتغيرات المدروسة . وفى بعض الأحيان تتطابق النتائج المتحصل عليها من استخـدام طريقتين مختلفتين فى بحث مشكلة ما وفى الأحيان الأخرى قد تختلف النتائج اختلافا بينا . كمـا يلاحظ أن لكل من هذه الطرق مزاياها وعيوبها . وسنتعرض فيما يلى باختصار أهم هذه الطرق .

<u>الطرق البيانيــة</u>

Graphical Method

تعتمد هذه الطريقة اعتمادا كليا على استخدام الرسوم البيانية فى فهم وشرح العلاقــة المختلفة بين المتغيرات الاقتصادية . فعن طريق رسم عدة منحنيات للبيانات التى تمثل العلاقــة بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة ، ثم دراسة هذه المنحنيات فانه يمكن استنتاج أى هـــذه المتغيرات المستقلة لها التأثير الأكبر على المتغير المستقل .

وأول من استخدم هذه الطريقة سنة ١٩٢٩ هو بروفسور بين (L.H. Bean) وتتلخص هذه الطريقة فى الآتى :

١ ــ نفرض أن لدينا متغير (تابع) وليكن (Y) والذى يعتمد على ثلاث متغيرات مستقلـة ولتكن (X_1) ، (X_2) ، (X_3) .

٢ — يرسم ثلاث رسوم بيانية موضحا فى كل منها العلاقة التى تمثل (Y مع X_1) ، (Y مع X_2) (Y مع X_3) فعن طريق دراسة الرسوم الثلاثة يمكن معرفة أى من المتغيرات المستقلة الثلاثة يمكن أن يعزى اليه الاختلافات (التغيرات) فى المتغير (التابع) .

٣ — يحدد عن طريق دراسة رسم (Y مع X_1) العلاقة التقريبية بين X_1 , Y .

٤ — يحدد عن طريق البحث العلاقة التقريبية بين X_3 (أو X_2) والفروق المتبقية (الانحرافات) عن العلاقة التقريبية بين (Y , X_1) .

٥ — ترسم الفروق المتبقية من المنحنى المتحصل عليه فى الخطوة السابقة مع المتغير X_2 (X_3) لتحديد العلاقة بين X_2 (أو X_3) والفروق المتبقية النهائية للمتغير Y.

٦ — ترسم الفروق المتبقية من المنحنى المتحصل عليه من الخطوة السابقة أى الانحرافات عن المنحنيات التقريبية السابقة ، ثم يعمل منحنى تقريبى ثان لتقليل قيمة الفروق المتبقية (الانحرافات) فاذا أظهر المنحنى التقريبى فى الرسم الممثل Y , X_1 العلاقة بين X_1 , Y فان الفروق الحقيقية (أى المسافات الرأسية من المنحنى) تكون مرتبطة بالمتغيرين الآخرين X_2 & X_3 . فاذا رسمنا رسما بيانيا يمثل المسافات الرأسية لانحدار (Y مع X_1) مع X_3 فاننا نحصل على رسم بيانى تظهر فيه طبيعة العلاقة بين X_3 والفروق المتبقية من Y (أى بعد ازالة تأثير X_1 من Y) ومن ثم يمكن اكتشافها .

ولقد استخدم هذه الطريقة كثير من الاقتصاديين فى تحليل أسعار السوق أو فى تحليل الطلب والعرض لبعض السلع الزراعية أو الصناعية . ويلاحظ أن هذه الطريقة تعتمد أساسا على السلاسل الزمنية للمتغيرات الاقتصادية المراد دراسة العلاقة بينها .

وتعتبر هذه الطريقة بسيطة للغاية وخاصة اذا كانت طبيعة العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية يمكن ملاحظتها من المشاهدات الأصلية . ولكن فى كثير من الأحيان فان النقط التى تمثل هذه العلاقات فى الرسم البيانى تكون مبعثرة للغاية مما يصعب معها تحديد العلاقة بين المتغيرات بدقة .

تحليل الانحدار

Regression Analysis

يستخدم الاقتصاديون البيانات المتوفرة الخاصة بالمتغيرات الاقتصادية فى صورة سلاسل زمنية لتحديد العلاقات التى قد توجد بينها ٠ وتتلخص هذه الطريقة فى توفيق منحنى أو معادلة خاصة للمتغيرات المطلوب دراستها ، وباستخدام هذه المعادلة أو المنحنى يمكن تقدير العلاقات المختلفة والتى بالتالى تساعد الباحث على التنبأ ٠ أى أنه يمكن بواسطتها تقدير القيم الغير معلومة لمتغير ما باستخدام القيم المعلومة لمتغيرات أخرى ٠ وتسمى المنحنيات أو المعادلات التى تربط بين المتغيرين اللذين بينهما علاقة بمنحنيات أو معادلات الانحدار ٠ وتعتبر طريقة تحليل السلاسل الزمنية طريقة ايجابية أو وصفية أو توقعية ٠ وتستخدم الطرق الآتية فى تحليل السلاسل الزمنية :

١ ـ الانحدار البسيط ـ معادلة انحدار واحدة Simple Regresstion

وهذا يعنى أن المتغير الغير مستقل (التابع) يعتمد على متغير مستقل واحد وأن العلاقة بينهم يمكن أن تمثل وتحدد بمعادلة واحدة ٠

٢ ـ الانحدار المتعدد ـ معادلة انحدار واحدة Multipule Regresstion

وهذا يعنى أن المتغير الغير مستقل (التابع) يعتمد على متغيرين مستقلين أو أكثر وأن العلاقة بينهم يمكن أن تمثل وتحدد بمعادلة واحدة ٠

٣ ـ انحدار المجموع Canonical Regression

وهذا يعنى أن يعتمد أكثر من متغير غير مستقل (تابع) كمجموعة ـ على أكثر من متغير مستقل ٠ ومثال ذلك الكميات المعروضة لمجموعة من السلع ككل تعتمد على أسعار المجموعة كلها ٠

٤ ـ المعادلات الآنية Simultaneous Equations

تستخدم المعادلات الآنية فى تحليل السلاسل الزمنية لتقدير العلاقات الاقتصادية المختلفة ٠ وتستخدم المعادلات الآنية عندما يعتمد المتغير الغير مستقل (التابع) على

عدد من المتغيرات المستقلة والتى تعتمد بالتالى على متغيرات اقتصادية أخرى • وتعتبر هذه الطريقة ذو فائدة كبرى حيث أنها تمكن الباحث من أن يستخدم عددا لا بأس به من المتغيرات الاقتصادية والتى بالتالى تساعد على شرح أسباب التباين فى المتغير الغير مستقل (التابع) •

وتتلخص طرق تحليل السلاسل الزمنية ـ من الناحية الهندسية فى أن كل زوج من المشاهدات المدروسة يحدد نقطة فى مستوى الورقة بالنسبة لمحورين متعامدين يمثل احدها قيم احد المتغيرين فى حين يمثل المحور الآخر قيم المتغير الآخر • وعند تمثيل قيم كل أزواج المشاهدات المرتبطة بالنقط على مستوى الورقة فاننا نحصل على ما يسمى شكل الانتشار Scatter Diagram

والنقط التى تمثل قيم أزواج المشاهدات فى شكل الانتشار قد تتركز حول اتجاه معين فيقال ان المتغيرين بينهما ارتباط • أو تكون مبعثرة بلا نظام أو اتجاه وفى هذه الحالة لا يكون هناك ارتباط بين المتغيرين • وقد يكون الاتجاه الذى تتركز حوله النقط مستقيما أو قد يكون خطا منحنيا وحتى يكون الاتجاه المستقيم أو المنحنى ممثلا للنقط أحسن تمثيل فانه يجب أن يمر بأكبر عدد ممكن من النقط التى تمثل قيم أزواج المشاهدات وأن يمر بين باقى النقط بالتوازن ويسمى الخط .فى هذه الحالة بخط الانتشار أو خط الانحدار • ويمكن الحصول على هذا الخط اما بالرسم أو باستخدام طريقة المربعات الصغرى •

طريقة المربعات الصغـــرى

Method of Least Squares

معيار توفيق أحسن الخطوط :

يعتبر الخط المستقيم (أو أى منحنى) مطابقا وممثلا للبيانات المدروسة أحسن تمثيل اذا كان حاصل مجموع مربع انحرافات النقط (الملاحظات) على الخط المستقيم من القيم المناظرة لها فى شكل الانتشار أصغر ما يمكن • وتعرف الطريقة التى يمكن بها توفيق أحسن خط أو منحنى ليمثل هـــذه البيانات وتحقق فى نفس الوقت المعيار السابق بطريقة المربعات الصغرى •

لنفرض أن لدينا سلسلة زمنية للمتغيرين الاقتصاديين X & Y (عدد المشاهدات $= n$) والمطلوب توفيق منحنى خطى لهما بطريقة المربعات الصغرى مع العلم بأن Y هى المتغير التابـع ، X هى المتغير المستقل • لذا يمكن القول بأن المطلوب هو ايجاد — وذلك باستخـدام قيم المشاهدات للمتغيرين X & Y — القيم الغير معلومة ϵ ، β ، α فى النمـوذج الخطى التالى

$$Y = \alpha + \beta X + \epsilon$$

حيث أن α عبارة عن الجزء المقطوع من المحور الصـادى•

β عبارة عن ميل خط الانحدار •

ϵ تمثل انحراف كل نقطة مشاهدة عن خط الانحدار •

وتكون معادلة الخط المستقيم فى تقديرنا هى

$$\hat{y} = a + b_x$$

حيث أن a تقدير ل

b تقدير ل

$\hat{y}$ قيمة y المقدرة باستخدام معادلة خط الانحدار •

وتكون

$$y = a + b_x + d_{y.x}$$

حيث أن $d_{y.x}$ تقدير ل (E) أى الفرق بين $(y - \hat{y})$ • أى الفرق بين الحقيقية والقدرة •

وحتى يمكننا استخدام الاختبارات الاحصائية فى تحليلنا هذا ،وجب علينا وضع بعض الفروض للمتغير (٤) (البواقى) ٠

<u>وهذه الفروض هى :</u>

١ — يعتبر المتغير (٤) متغيرا عشوائيا ومستقلا عن باقى الانحرافات ، أى بمعنى أن احتمال الحصول على انحراف سلبى أو انحراف موجب يكون مستقلا عن باقى الانحرافات الأخرى ٠

٢ — يكون توزيع هذه الانحرافات يتبع التوزيع العادى بمتوسط يساوى صفرا وتباين يساوى σ^2 ,

ولتحقيق المعيار السابق — أى أن حاصل مجموع مربع انحرافات نقط على الخط المستقيم من لنقط المناظرة لها فى شكل الانتشار اصغر ما يمكن — وجب علينا تصغير القيم الآتية لكل زوج من المشاهدات :

$$(y - \hat{y})^2 = (y - a - b\,x)^2$$
$$= y^2 + a^2 + b^2 x^2 - 2ay - 2byx + 2abx$$

ويكون مجموع هذه القيم هو :

$$\sum_{i=1}^{n}(y-\hat{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y^2 + na^2 + b^2\sum_{i=1}^{n} x^2 - 2a\sum_{i=1}^{n} y - 2b\sum_{i=1}^{n} yx + 2ab\sum_{i=1}^{n} x.$$

ولتحديد قيم المجهولين a , b والتى تجعل $\sum_{i=1}^{n}(y-\hat{y})^2$ أصغر ما يمكن وجب الحصول على التفاضل الجزئى لذلك المقدار بالنسبة ل a & b ثم مساواته بالصفر ٠

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n}(y-\hat{y})^2}{\partial a} = 2na - 2\sum_{i=1}^{n} y + 2b\sum_{i=1}^{n} x. \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n}(y-\hat{y})^2}{\partial b} = 2b\sum_{i=1}^{n} x^2 - 2\sum_{i=1}^{n} yx + 2a\sum_{i=1}^{n} x. \qquad (2)$$

وبمساواة كل من المعادلتين (١) ، (2) بالصفر نحصل من المعادلة رقم (١) على :

$$2na - 2\sum_{i=1}^{n} y + 2b\sum_{i=1}^{n} y = 0$$

أى أن

$$na + b\sum_{i=1}^{n} x = \sum_{i=1}^{n} y \qquad (3)$$

ونحصل من المعادلة رقم (2) على :

$$2b\sum_{i=1}^{n} x^2 - 2\sum_{i=1}^{n} yx + 2a\sum_{i=1}^{n} x = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x + b\sum_{i=1}^{n} x^2 = \sum_{i=1}^{n} xy \qquad (4)$$

وتكون المعادلتين (3) ، (4) هما المعادلتين الطبيعيتين والتى يمكن حلها معا لايجاد قيم المجهولين a & b

فمن المعادلة رقم (3) يكون

$$na = \sum_{i=1}^{n} y - b\sum_{i=1}^{n} x$$

وبقسمة طرفى المعادلة على (n)

$$\therefore \quad a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y}{n} - b\,\frac{\sum_{i=1}^{n} x}{n}$$

$$a = \bar{y} - b\,\bar{x}$$

أى أن

$$a = M_y - b\,M_x$$

حيث أن M_y المتوسط الحسابى لقيم y .

M_x المتوسط الحسابى لقيم x .

وبالتعويض فى المعادلة رقم (4) بقيمة (a) فانه يمكن الحصول على قيمة b

$$a\sum_{i=1}^{n} x + b\sum_{i=1}^{n} x^2 = \sum_{i=1}^{n} xy \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x\left[M_y - bM_x\right] + b\sum_{i=1}^{n} x^2 = \sum_{i=1}^{n} xy$$

وحيث أن $\sum_{i=1}^{n} x = nM_x$ فيكون

$$nM_xM_y - nb\,M^2_x + b\ x^2 = \sum_{i=1}^{n} xy$$

$$b\sum_{i=1}^{n} x^2 - bnM_x^2 = \sum_{i=1}^{n} xy - nM_x\,M_y$$

$$b\left(\sum_{i=1}^{n} x^2 - nM^2_x\right) = \sum_{i=1}^{n} xy - n\,M_xM_y$$

$$\therefore \quad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} xy - n\,M_xM_y}{\sum_{i=1}^{n} x^2 - n\,M^2_x}$$

$$\therefore \quad b = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}} = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum (x-\bar{x})^2}$$

وبذلك نكون قد قدرنا ثوابت معادلة الانحدار :

$$\hat{y} = a + bx$$

كفاءة التقديرات من معادلة الانحدار :

بعد حصولنا على قيم الثوابت a & b من العينة ، وجب علينا اختبار مدى كفاءة هذه التقديرات أى بمعنى أنه كيف يمكن استخدام المبادىء العامة للاحصاء فى اختبارنا لتحليل الانحدار فمن المحتمل أن لا تتساوى أى قيمة للمتغير y مع القيمة المقدرة له $\hat{y}$ (أى بمعنى أنه من المحتمل أن لا تقع أى من النقط فى شكل الانتشار على خط الانحدار) وقد تكون القيم المقدرة $\hat{y}$ قريبة من قيم y . وبما أننا نتوقع بعض الأخطاء فى تقديراتنا ، فانه يصبح من الضرورى قياس مقدار هذا الخطأ وبالتالى تحديد درجة الثقة التى يمكن اعطائها لتقديراتنا .

الخطأ المعيارى لمعامل الانحدار :

يقدر الخطأ المعيارى لمعامل الانحدار (b) بطريقة مشابهة لتلك التى تستعمل لتقدير الخطأ المعيارى بمتوسط العينة • ويرمز للخطأ المعيارى لمعامل الانحدار بالرمز s_b • ويمكن ايجاد قيمة مربعة كالآتى :

$$s_b^2 = \frac{n\sum y^2 - (\sum y)^2 - \dfrac{(n\sum xy - \sum x\sum y)^2}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}}{(n-2)\left\{n\sum x^2 - (\sum x)^2\right\}}$$

وتكون

$$s_b = \sqrt{s_b^2}$$

وحيث أن الأخطاء الناتجة عن تقدير y بـ $\hat{y}$ تتوزع توزيعا طبيعيا ، فان الكمية

$$t = \frac{b - \beta}{s_b}$$

تتبع (توزيع t) بدرجات حرية مساوية (n - 2) ودرجات الحرية هنا عددها يقل عن عدد المشاهدات باثنين وذلك راجع لأن قيم الثابتين a & b قد قدرتا من العينة •

واختبار (t) هنا ما هو الا مقياس للاختلاف بين معامل الانحدار المقدر من العينة ومعامل الانحدار الحقيقى للمجتمع • مع الأخذ فى الاعتبار أخطاء المعاينة •

والطريقة المتبعة أن يجرى اختبار للمعنوية ،أى اختبار معنوية معامل الانحدار المقدر (b) فاذا لم توجد علاقة خطية بين المتغيرين X & Y فى المجتمع فان معامل انحدار المجتمع (β) سيساوى صفرا • والفرض المراد اختباره فى هذه الحالة هو (β = 0) بدرجة معنوية معينة • فاذا رفضنا هذا الفرض ،فاننا نقول أن معامل الانحدار b يختلف عن الصفر • واذا قبلنا الفرض فهذا يعنى احصائيا أن b غير معنوى أى أن العلاقة بين X و Y من المحتمل أن لا تكون خطية • واختبار (t) هذا يعطينا القيمة المقدرة أو قيمة (t) من العينة ، وباختيارنا لمستوى المعنوية الذى سنجرى عليه اختيارنا للفرض القائل بأن (β = 0)

فانه يمكننا مقارنة القيمة المقدرة لـ (t) مع قيمة (t) من جدول توزيع (t) بدرجات حرية (n - 2) • فاذا كانت قيمة (t) المقدرة من العينة تساوى أو أكبر من قيمة (t) المناظرة لها من جدول توزيع (t) فاننا نرفض الفرض القائل بأن ($\beta = 0$) بدرجة المعنوية المختارة أى أنه توجد علاقة خطية بين المتغيرين • أما اذا كانت قيمة (t) المقدرة من العينة أقل من قيمة (t) من جدول توزيع (t) فاننا نقبل الفرض القائل بأن ($\beta = 0$) أى أنه لا توجد علاقة خطية بين المتغيرين X , Y .

ويمكن حساب قيمة s_b كالآتى

$$s_b = \frac{s_{y.x}}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2}}$$

حيث أن $s^2_{y.x}$ هو تباين الانحرافات أو الفروق $d_{y.x}$ عندما تكون y مستقلة عن x ويعرف كذلك بأنه تباين المتغير y حول خط الانحدار وليس حول الوسط الحسابى $\bar{y}$ • ويحسب هذا التباين كالآتى :

$$s^2_{y.x} = \frac{\Sigma d^2_{y.x}}{(n-2)} = \frac{\Sigma(y-\hat{y})^2}{(n-2)}$$

حيث أن $d_{y.x}$ تساوى الفرق أو الانحراف ($y - \hat{y}$) ، (n - 2) درجات الحرية •

حدود الثقة لمعامل الانحدار :

يمكن حساب حدود ثقة لمعامل الانحدار (β) وذلك بدرجة الثقة المعينة ودرجات الحرية الملائمة وذلك بالتعويض عن قيمة (t) من جدول توزيع (t) فى المعادلة •

$$\frac{b-\beta}{s_b} = \pm\, t$$

وتكون حدود الثقة لمعامل الانحدار β وبدرجة ثقة ٩٥٪ مساوية •

$$P_r\left\{ b - t_{(.05,\, d.f.)}\, s_b \leq \beta \leq b + t_{(.05,\, d.f.)}\, s_b \right\} = 0.95$$

الارتبـــــاط البسيط Simple Correlation

اذا فرض أن كل النقط التى تمثل الأزواج المختلفة من المشاهدات وقعت كلها على خـــــط الانحدار فيكون بالتالى الانحراف المعيارى للتقدير ($\hat{y}$) مساويا صفرا ٠ ويكون تقدير قيم (y) من قيم (x) ذو درجة عالية من الدقة ٠ وعلى عكس ذلك ، فقد يكون خط الانحدار أفقيا تماما بمعنى أن المتوسط الحسابى للمتغير (y) يكون مساويا لقيمة (y) لجميع قيم المتغير (x) المختلفة ،وفى هذه الحالة فان معرفة قيمة (x) لن تساعد فى تقدير قيمة (y) ٠ وفى هـــذه الحالة فان الخطأ المعيارى للتقدير ٠يكون مساويا تماما للانحراف المعيارى للمتغير (y) ٠أى أن ٠

$$\sigma_{y.x} = \sigma_y$$

$$\sqrt{\frac{\sum(y-\hat{y})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum(Y-\bar{Y})^2}{N}}$$

ويكون فى هذه الحالة

$$\sum(Y-\hat{Y})^2 = \sum(Y-\bar{Y})^2$$

مما سبق يمكن القول بأن الحد الأدنى لقيمة الانحراف المعيارى للتقدير $\hat{Y}$ سيكون مساويـــا صفرا وأن الحد الأعلى لقيمة الانحراف المعيارى للتقدير $\hat{Y}$ سيكون مساويا σ_y أى أن

$$0 \leqslant \sigma_{y.x} \leqslant \sigma_y$$

وبقسمة كل حد على σ_y وتربيعه فاننا نحصل على

$$0 \leqslant \frac{\sigma^2_{y.x}}{\sigma^2_y} \leqslant 1$$

والنسبة $\frac{\sigma^2_{y.x}}{\sigma^2_y}$ تساوى مربع معامل الارتباط البسيط للمجتمع ويعرف بـ (R^2)

ويطلق عليه معامل التحديد Coefficient of determination

ويكون تقدير معامل الارتباط البسيط من العينة مساويا

$$r = \frac{s_{\hat{y}}}{s_y} = \frac{s_{y.x}}{s_y}$$

من هذا يتبين أن معامل الارتباط البسيط ما هو الا عبارة عن النسبة بين الانحراف المعيارى للقيم المتوقعة أو المقدرة للمتغير التابع الى الانحراف المعيارى للقيم المشاهدة للمتغير التابع • ويقيس معامل الارتباط العلاقة بين المتغيرين $\hat{y}$ و y حيث أنه يقارن بين التباين الكلى للمتغير y ، مع التباين الكلى فى y عندما يأخذ فى الاعتبار التباين الناتج عن المتغير المستقل • والطريقة العملية لحساب معامل الارتباط تكون كالآتى :

$$r = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum (x-\bar{x})^2 \sum (y-\bar{y})^2}}$$

وتكون الصورة المبسطة كالآتى

$$r = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum x^2 - n\bar{x}^2)(\sum y - n\bar{y}^2)}}$$

فاذا كانت قيمة (r) موجبة فهذا يعنى أن العلاقة بينهم علاقة موجبة أى أنها علاقة طردية واذا كانت قيمة (r) سالبة فهذا يعنى أن العلاقة سلبية أى أنها علاقة عكسية •

معامل التحديد Coefficient of Determination

يعرف مربع معامل الارتباط البسيط للمجتمع (R^2) بمعامل التحديد •

ويحصل عليه بقسمة تباين القيم المتوقعة للمتغير التابع فى المجتمع على تباين القيم المشاهدة للمتغير التابع • أى أن

$$R^2 = \frac{\sigma^2_{y.x}}{\sigma^2_{y}}$$

ويكون معامل التحديد مقدرا من العينة

$$r^2 = \frac{s^2_{y.x}}{s^2_{y}}$$

من هذا يتبين أن معامل الارتباط البسيط ما هو الا عبارة عن النسبة بين الانحراف المعيارى للقيم المتوقعة أو المقدرة للمتغير التابع الى الانحراف المعيارى للقيم المشاهدة للمتغير التابع . ويقيس معامل الارتباط العلاقة بين المتغيرين $\hat{y}$, y حيث أنه يقارن بين التباين الكلى للمتغير y ، مع التباين الكلى فى y عندما يأخذ فى الاعتبار التباين الناتج عن المتغير المستقل . والطريقة العملية لحساب معامل الارتباط تكون كالآتى :

$$r = \frac{\sum(x-\bar{x})\,(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2\,\sum(y-\bar{y})^2}}$$

وتكون الصورة المبسطة كالآتى

$$r = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum x^2 - n\,\bar{x}^2)\,(\sum y - n\bar{y}^2}}$$

فاذا كانت قيمة (r) موجبة فهذا يعنى أن العلاقة بينهم علاقة موجبة أى أنها علاقة طردية واذا كانت قيمة (r) سالبة فهذا يعنى أن العلاقة سلبية أى أنها علاقة عكسية .

معامل التحديد Coefficient of Determination

يعرف مربع معامل الارتباط البسيط للمجتمع (R^2) بمعامل التحديد .

ويحصل عليه بقسمة تباين القيم المتوقعة للمتغير التابع فى المجتمع على تباين القيم المشاهدة للمتغير التابع . أى أن

$$R^2 = \frac{\sigma^2_{y.x}}{\sigma_{Y^2}}$$

ويكون معامل التحديد مقدرا من العينة

$$r^2 = \frac{s^2_{y.x}}{s^2_y}$$

مثـــــال :

لنفرض أنه لدينا سلسلة زمنية مكونة من ١٦ سنة وأنه لدينا زوج من المشاهدات للكميات المطلوبة (Y) والسعر (X) لكل سنة كما هو مبين بالجدول رقم (١) والمطلوب ايجاد العلاقة بـــين الكميات المطلوبة وأسعارها • ويتبع فى ذلك الخطوات الآتية :

أولا : ارسم أزواج المشاهدات فى شكل انتشار ، فنلاحظ أن النقط التى تمثل المشاهـــــدات المعطاة لنا لن تقع على خط مستقيم ولكن بدراسة الشكل العام لشكل الانتشار فانه يمكــــن استنتاج أن معادلة الخط المستقيم ستمثل النقط أحسن تمثيل • وتكون المعادلة المطلوب تقدير ثوابتها هى :

$$Y = \alpha + \beta X$$

حيث أن α ، B هما المعالم الغير معروفة للمجتمع والمطلوب تقديرها من المعادلة

$$\hat{y} = a \quad bx$$

حيث أن a التقدير من العينة للثابت α ،

b التقدير من العينة لمعامل الانحــــدار β.

وتكون

$$y = a + bx + dy.x$$

حيث أن $dy.x$ تمثل الانحراف أو الفرق بين القيمة المشاهدة والقيمة المقدرة للمتغير y أى تســـاوى $(y - \hat{y})$.

والجدول رقم (١) مبين به القيم اللازمة لتقديرنا لمعادلة خط الانحدار •

Table 1.

Year	Y	X	X^2	YX	Y^2
1940	10	8.00	64.00	80.00	100
1941	28	4.50	20.25	126.00	784
1942	34	3.80	14.44	129.20	1156
1943	32	7.10	50.41	227.20	1024
1944	18	6.00	36.00	108.00	324
1945	60	4.00	16.00	240.00	3600
1946	60	2.00	4.00	120.00	3600
1947	78	1.00	1.00	18.00	6084
1948	87	2.30	5.92	200.10	7569
1949	66	3.00	9.00	198.00	4356
1950	48	7.00	49.00	336.00	2304
1951	41	6.40	40.96	262.40	1681
1952	44	2.50	6.25	110.00	1936
1953	25	7.40	54.76	185.00	625
1954	53	6.80	46.24	360.40	2809
1955	65	6.10	37.21	396.50	4225
Totals	749	77.90	454.81	3156.80	42177

$$n = 16, \ \bar{Y} = \frac{\Sigma Y}{n} = 46.81 \ , \ \bar{X} = \frac{\Sigma x}{n} = 4.87$$

ثانيا : يمكن الحصول على قيم a ، b من البيانات السابقة كالآتى :

$$b = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}} = \frac{3156.80 - \frac{(749)(77.90)}{16}}{454.81 - \frac{(77.90)^2}{16}}$$

$$b = \frac{3156.80 - 3646.50}{454.81 - 379.28} = \frac{-489.70}{75.53} = -6.48$$

وتكون

$$\begin{aligned} a &= \bar{y} - b\,\bar{x} \\ &= 46.81 - (-6.48)(4.87) \\ &= 46.81 + 31.56 \\ &= 78.37 \end{aligned}$$

أى أن معادلة الطلب تكون فى الصورة

$$Y = 78.37 - 6.48\,X$$

ولاختبار معنوية معامل الانحدار (b) وجب ايجاد قيمة s_b

$$s_b = \frac{n\sum Y^2 - (\sum Y)^2 - \left\{\frac{(n\sum XY - \sum X \sum Y)^2}{n\sum X^2 - (\sum X)^2}\right\}}{(n-2)\left\{n\sum X^2 - (\sum X)^2\right\}}$$

$$s_b = \sqrt{\frac{(16)(42.177) - (749)^2 \left\{ \frac{\left[(16)(3156.80) - (77.90)(749)\right]^2}{(16)(454.81) - (77.90)^2} \right\}}{(16 - 2) \left[(16)(454.81) - (77.90)^2\right]}}$$

$$= \sqrt{\frac{113788.8799}{16919.70}} = \sqrt{6.7252} = 2.5933$$

وتكون قيمة (t) المقدرة من السلسلة الزمنية

$$t = \frac{-6.48 - 0}{2.5933} = -2.5026$$

وبالكشف فى جدول توزيع (t) عند ٥٪ مستوى المعنوية وبدرجات حرية = ١٤ درجة فاننا نجد أن قيمة (t) = ١٤٥ر٢ ، وحيث أن قيمة (t) المقدرة أكبر من قيمتها من جدول (t) فاننا نرفض الفرض القائل بأن معامل الانحدار للمجتمع يساوى صفرا ٠

معنى معامل الانحدار :

تعتبر قيمة معامل الانحدار (b) (ـ ٦ر٤٨) المقدره من السلسلة الزمنية هى تقدير لمعامل انحدار المجتمع (β) • وهو عبارة عن ميل خط الانحدار بالنسبة للمتغير (Y) الخاص بالكميات المطلوبة • ومعامل الانحدار فى هذه المعادلة له اشارة سالبة وهذا يعنى أنه عندما تزداد الكميات المطلوبة بوحدة واحدة فان سعر السلعة سينخفض بمقدار ٦ر٤٨ وحدة • وهذا يعنى أن العلاقة بين الكميات المطلوبة من السلعة وسعرها هى علاقة عكسية أى سلبية •

حساب حدود الثقة لمعامل الانحدار :

ان معامل الانحدار b = ـ ٦ر٤٨ ما هو الا تقدير نقطة المقايسة لمعامل انحدار المجتمع (β) ، ويمكن ايجاد حدود الثقة التى تقع بينها قيمة معامل انحدار المجتمع (β) بالطريقة الآتية :

$$P_r \left\{ b - t_{(.05,14)}\, sb \leqslant \beta \leqslant b + t_{(.05,14)}\, sb \right\} = .95$$

$$P_r \left\{ (-6.48) - 2.145 \times 2.5933 \leqslant \beta \leqslant (-6.48) + 2.145 \times 2.5933 \right\} = .95$$

$$P_r \left\{ (-6.48) - 5.56 \leqslant \beta \leqslant (-648) + 5.56 \right\} = .95$$

$$P_r \left\{ (-12.04 \leqslant \beta \leqslant -0.92 \right\} = .95$$

وحدود الثقة هذه تعنى أن القيمة الحقيقية للمجتمع لمعامل الانحدار (β) من المحتمل أنها تقع بين هاتين القيمتين (-0.92) ، (-12.04) . أى أنه اذا قمنا بتقدير (β) بنفس الطريقة من عدد كبير من العينات ، وليكن عدد العينات مائة أى أنه سيكون لدينا مائة تقدير لمعامل الانحدار (β) فان خمسة فى المائة من التقديرات ستقع قيمتها خارج هذه الحدود . أى أننا نكون واثقين بدرجة ٩٥٪ بأن تقديرنا لمعامل انحدار المجتمع (β) سيقع بين القيمتين (-12.04) ، (-0.92) .

تقدير معامل الارتباط البسيط :

يمكن حساب معامل الارتباط البسيط بين المتغيرين y ، x وذلك كالآتي :

$$r = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum x^2 - n\bar{x}^2)(\sum y^2 - n\bar{y}^2)}}$$

$$= \frac{3156.80 - 16 \times 4.87 \times 46.81}{\sqrt{\left[454.81 - 16 \times (4.87)^2\right]\left[42177 - 16 \times (46.81)^2\right]}}$$

$$= -.67$$

وهذا يعنى أن العلاقه بين المتغيرين x,y علاقة عكسيه اى انه كلما زادت اسعار السلعة كلما قلت الكميات المطلوبه • وتختبر معنويه معامل الارتباط كالآتى : الفرض المراد اختباره هو أن (R=0) اى ان معامل الارتباط البسيط بين المتغيرين Y , X فى المجتمع الاصلى يساوى صفرا •

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$= \frac{-.67\sqrt{16-2}}{\sqrt{1-.4489}} = \frac{-.67 \times \sqrt{14}}{\sqrt{.5511}}$$

$$= \frac{-.67 \times 3.742}{.7417} = \frac{-2.5071}{.7417} = -3.382$$

وبالكشف فى جدول توزيع (t) عند ٥٪ مستوى معنويه وبدرجات حرية = ١٤ درجة فاننا نجد ان قيمة (t) = ٢٫١٤٥ ، وحيث ان القيمه المطلقه ل (t) المقدره اكبر من قيمها من الجدول فاننا نرفض الفرض القائل بان معامل الارتباط البسيط يساوى صفرا •

تقدير معامل التحديـــد :

اذا اردنا معرفة نسبة التباين فى المتغير (y) التى يمكن شرحها من التغاير فـــى المتغير (x) وجب علينا حساب معامل التحديد (r^2) ويحسب كالآتى •

$$r^2 = \frac{\left[\sum xy - n\bar{x}\bar{y}\right]^2}{(\sum x^2 - n\bar{x}^2)(\sum y^2 - n\bar{y}^2)}$$

$$= \frac{\left[3156.80 - (16)(4.87)(46.81)\right]^2}{\left[454.81 - (16)(4.87)^2\right]\left[42177 - (16)(46.81)^2\right]}$$

$$= \underline{\underline{.4489}}$$

اى ان التغير فى سعر السلعة (y) سيفسر حوالى ٤٥٪ من التغير فى الكميات المطلوبـــة من السلعه (Y) فى السوق • والجزء الباقى من التباين فى الكميات المطلوبة ناتج عن الاخطاء • وهذه الاخطاء إما نتيجه لاخطاء فى المشاهدات الملاحظة او اخطاء ناتجه عن عدم الاخذ فـــى الاعتبار التغيرات فى مستوى الدخول ، والتغيرات فى اسعار السلع البديله والمنافسه ، والتغيرات فى اذواق المستهلكين •

ويمكن تقدير مرونة الطلب لهذه السلعه • فتكون مرونة الطلب للسلعة (Y) عند متوســـط السعر ومتوسط الكميات المطلوبه مساويا :

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = (-6.49)\left(\frac{4.87}{46.81}\right) = -6.8$$

من هذا يمكن القول بان الطلب على السلعه (Y) هو طلب غير مرن نسبيا •

دالة الاستهلاك Consumption Function:

قد يلاحظ الباحث فى كثير من الاحيان ـ عند دراسته للعلاقات بين المتغيرات الاقتصادية ـ ان التغيرات التى قد تحدث فى المتغير التابع ـ كنتيجه للتغيرات فى المتغير المستقل ـ قد لا تظهر فى نفس الوقت الذى تحدث فيه التغيرات فى المتغير المستقل بل تتأخر بعض الوقت . ولتوضيح ذلك سنأخذ مثالا من نظريه الدخل ، فقد يمكن الفرض بان الاستهلاك فى الشهر الحالى يعتمد على دخل الشهر الماضى . اى بمعنى انه اذا زاد الدخل فى شهر ما فاننا نتوقع الزيادة فى الاستهلاك فى الشهر التالى . ويمكن تمثيل ذلك بالعلاقه الداليه الآتية:

$$c_t = f(y_{t-1})$$

حيث ان c تمثل اجمالى الاستهلاك القومى ،
y تمثل اجمالى الدخل القومى ،
t تمثل الفتره الزمنيه .

والعلاقة بين الاستهلاك والدخل هى علاقه طرديه موجبه اى كلما زاد الدخل كلما زاد الاستهلاك والعكس صحيح اى ان

$$\frac{dc_t}{dy_{t-1}} > 0$$

وهذه تعنى ان النسبه بين التغير فى الاستهلاك والتغير فى الدخل تكون اكبر من الصفر اى انها علاقه موجبة.

والفترة الزمنيه هنا قد تكون شهر او سنه او حسب البيانات المتوفره لدينا والجدول الآتى يبين مثالا فرضيا لازواج من المشاهدات لقيمه الاستهلاك (c_t) فى الشهر t ، اجمالى الدخل (y_{t-1}) فى الشهر ($t-1$) فاذا قمنا برسم شكل انتشار لهذه الازواج من المشاهدات فاننا نلاحظ انه يمكن تمثيل العلاقه بينهم بمعادلة خطيه بالصوره الآتية:

Month t	c_t	y_{t-1}
Jan.	70	100
Feb.	85	120
Mar.	93	160
Apr.	110	180
May.	98	135

$$c_t = \alpha + \beta y_{t-1}$$

وانه يمكننا تقدير معالم المجتمع α ؛ β بطريقه المربعات الصغرى لتقدير معادلة انحدار (c_t)
على (y_{t-1}) :-

$$\hat{c}_t = a + by_{t-1} + u$$

حيث أن u تمثل الفرق بين القيمه المشاهده ل (c_t) والقيمه المقدره لها ($\hat{c}_t$) ويتبع
فى هذه الطريقه كل الخطوات التى اتبعت فى مثالنا السابق لتقدير معادل الطلب.

تمريـــن : اوجد معادله الانحدار للاستهلاك على الدخل من البيانات السابقه .

تفضيل السيوله Liquidity Preference :

يعتبر الطلب على النقود للاحتفاظ بها فى صورة نقديه - تبعا لنظرية تفضيل السيولـــه
لمعدل الفائده - داله متناقصه لسعر الفائده - اى ان

$$m = l(i)$$

حيث ان m تمثل كمية النقود المطلوبه للاحتفاظ بها فى صورة نقدية ،
l تمثل دالــه ،
i معدل الفائده .

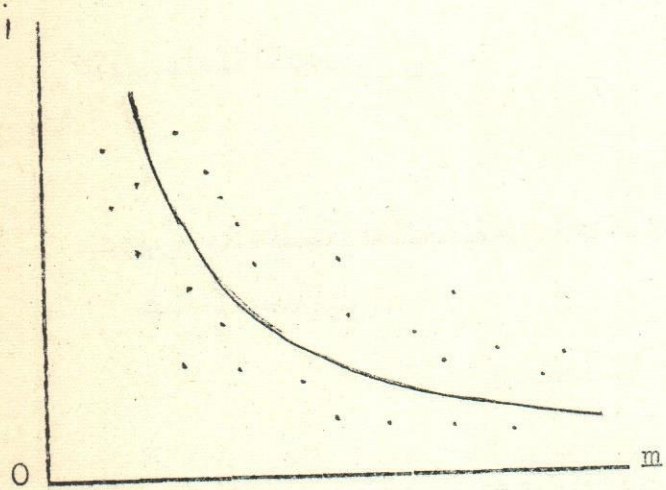
بحيث ان
$$\frac{dm}{di} < 0$$

اى أن النسبه بين التغير فى الكميات المطلوبه الى التغير فى معدل الفائده تكون اقل مـــن
الصفر اى انها علاقه سالبه عكسيه .

مثال : لنفرض ان بيانات العينه (١٦ سنه) ممثله فى العمودين الاول والثانى من الجـــدول
رقم (٢) حيث ان (m) تمثل كميه النقود المتوفره ، (i) تمثل متوسط معدل الفائـــده
السنوى ، والعمود الثالث (z) يمثل القيمة ($\frac{1}{i}$) .

جدول رقم (٢)

Year	1 m	2 i	3 z
1	130	.07	14.29
2	125	.05	20.00
3	115	.03	33.33
4	170	.02	50.00
5	185	.01	100.00
6	145	.03	33.33
7	130	.02	50.00
8	110	.05	20.00
9	135	.06	16.67
10	105	.07	14.29
11	120	.06	16.67
12	133	.04	25.00
13	100	.06	16.67
14	110	.04	25.00
15	140	.02	50.00
16	230	.01	100.00



شكل رقم (١) . العلاقه بين الكميات المطلوبه من النقود ومعدل الفائدة

والشكل رقم (١) يمثل شكل الانتشار لازواج المشاهدات (m) ممثله على المحور الافقى ، (i) ممثله على المحور الرأسى .

يلاحظ ان العلاقه هنا لايمكن تمثيلها بخط مستقيم . ويمكن تمثيل هذه العلاقة بالمعادله الغيرخطيه الآتية :

$$m = \alpha + \frac{\beta}{i}$$

حيث ان α ، β هما معالم المجتمع المراد تقديرهم ولتسهيل تحليلنا لهذه العلاقه فانه يمكننا التعويض بالمتغير (z) والذى يساوى ($\frac{1}{i}$) فى المعادله السابقه ، وتقدير معادلة الانحدار الخطيه الآتية :

$$\hat{m} = \hat{a} + \hat{b}\, z + u$$

حيث ان $\hat{a}$; $\hat{b}$ تقدير لمعالم المجتمع α ، β على الترتيب ،

z تمثل $\frac{1}{i}$ ،

u عباره عن الفرق بين القيمة المشاهده ل m وقيمتها المتوقعة $\hat{m}$ ٠

وحيث ان هذه المعادله معادله خطيه لذا فان $\hat{a}$; $\hat{b}$ سيكونان تقديران غير متحيزان للمعالم α , β وذلك باستخدام طريقه المربعات الصغرى ٠

والكميات المطلوبه لايجاد قيم $\hat{a}$, $\hat{b}$ هى :

$$n = 16 \qquad \sum z^2 = 33013.85$$
$$\sum z = 585.25 \qquad \sum zm = 92216.80$$
$$\sum m = 2183 \qquad \sum m^2 = 314839$$

وبالتعويض لايجاد قيم $\hat{a}$, $\hat{b}$ نجد ان

$$\hat{a} = 97.46 \quad , \quad \hat{b} = 1.07$$

فتكون معادلة الانحدار هى

$$\hat{m} = 97.46 + 1.07\,z$$

وبتحويل هذه المعادله الخطيه الى المعادله الغير خطيه وذلك بالتعويض بدلا من (z) بالقيمة ($\frac{1}{i}$) نحصل على

$$\hat{m} = 97.46 + \frac{1.07}{i}$$

وتكون هذه المعادله الغير خطيه هى تقديرنا لمعادلة تفضيل السيوله الحقيقية ٠

والامثله السابقه اوضحت لنا انه يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى لتقدير معالم المعادلات التركيبيه والتى قد تكون جزءا من نموذج اقتصادى شامل ٠

Table of t

d.f.	Probability of Exceeding Stated Value			
	.05	.02	.01	.001
1	12.706	31.821	63.657	636.619
2	4.303	6.965	9.925	31.593
3	3.182	4.541	5.841	12.941
4	2.776	3.747	4.604	8.610
5	2.571	3.365	4.032	6.859
6	2.447	3.143	3.707	5.959
7	2.365	2.998	3.499	5.405
8	2.306	2.896	3.355	5.041
9	2.262	2.821	3.250	4.781
10	2.228	2.764	3.169	4.587
11	2.201	2.718	3.106	4.437
12	2.179	2.681	3.055	4.318
13	2.160	2.650	3.012	4.221
14	2.145	2.624	7.977	4.140
15	2.131	2.602	2.947	4.073
16	2.120	2.583	2.921	4.015
17	2.110	2.567	2.898	3.965
18	2.101	2.552	2.878	3.922
19	2.093	2.539	2.861	3.883
20	2.086	2.528	2.845	3.850
21	2.080	2.518	2.831	3.819
22	2.074	2.508	2.819	3.792
23	2.069	2.500	2.807	3.767
24	2.064	2.492	2.797	3.745
25	2.060	2.485	2.787	3.725
26	2.056	2.479	2.779	3.707
27	2.052	2.473	2.771	3.690
28	2.048	2.467	2.763	3.674
29	2.045	2.462	2.756	3.659
30	2.042	2.457	2.750	3.646
00	1.960	2.326	2.576	3.291

الانحدار المتعـــدد

Multiple Regression

تعتبر طريقة الانحدار المتعدد امتداد لطريقة الانحدار البسيط لتشمل متغيرين مستقلين أو أكثر • ففى كثير من الأحيان يمكن تفسير التباين فى المتغير التابع عن طريق متغيرين مستقلين أو أكثر • فمثلا يمكن تمثيل الكميات المطلوبة من سلعة ما كدالة لسعرها ، دخل المستهلكين ، أسعارا أخرى • فاذا فرض أننا نريد توفيق معادلة انحدار للمتغير التابع (Y) على المتغيرين المستقلين X & Z فتكون المعادلة المطلوبة تقدير معالمها هى :

$$Y = \alpha + \beta X + \gamma Z \qquad (1)$$

حيث أن α ، β ، Y هى معالم المجتمع المطلوب تقديرها • هذا مع العلم بأن التوزيع التكرارى للمتغير (Y) فى المجتمع يتصف بالآتى :

١ ـ متوسط المتغير (Y) يكون دالة خطية للمتغيرين Z & X.

٢ ـ تباينه σ^2 غير معلوم ولكنه ثابت لكل القيم الممكنة ل Z & X .

٣ ـ يتبع التوزيع الطبيعى •

ولتقدير معالم المعادلة (١) يلزم لنا عدد من المشاهدات وليكن عددها يساوى (n) على كل من المتغيرات الثلاث • بغرض أن المشاهدات للمتغيرين المستقلين عبارة عن أرقام معلومة ومقاسة بدون خطأ ، كما أن البيانات للمتغير المستقل تكون مستقلة عن بعضها وانها مسحوبة من المجتمع بطريقة عشوائية • وتكون معادلة الانحدار المقدرة من العينة أى البيانات المشاهدة هى :

$$\hat{y} = a + bx + cz$$

حيث أن $\hat{y}$ هى القيمة المقدرة ل Y ،

a تقدير ل α ويعرف بثابت المعادلة ،

b تقدير ل β أى معامل انحدار y على x ،

c تقدير ل γ أى معامل انحدار y على z .

وتكون

$$y = a + bx + c + dy_{\circ}x_{,}z$$

حيث أن $dy_{\circ}x,z$ تمثل الفرق بين القيمة الحقيقية لـ y وقيمتها المقدرة $\hat{y}$ أى تساوى $(y - \hat{y})$.

والمطلوب تقدير المعالم a ، b ، c بحيث أن تكون الكمية $\sum_{i=1}^{n}(yi-\hat{y}i)^2$ اصغر ما يمكن أى أن الكمية $\sum_{i=1}^{n}(yi - a - bx_i - czi)^2$ تكون أصغر ما يمكن.

والشرط الأساسى لجعل هذه الكمية أصغر ما يمكن هو مساواة تفاضلها بالنسبة لـ a, b, c بالصفر أى أن

$$\frac{\partial\sum_{i=1}^{n}(yi-\hat{y}i)^2}{\partial a} = o, \quad \frac{\partial\sum_{i=1}^{n}(yi-\hat{y}i)^2}{\partial b} = o, \quad \frac{\partial\sum_{i=1}^{n}(yi-\hat{y}i)^2}{\partial c}$$

ومن ذلك نحصل على المعادلات الطبيعية Normal Equations الآتية :

$$\bar{y} = a + b\bar{x} + c\bar{z} \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} xiyi = a\sum_{i=1}^{n} xi + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} xizi \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} yizi = a\sum_{i=1}^{n} z_i + b\sum_{i=1}^{n} xizi + c\sum_{i=1}^{n} z_i^2 \tag{4}$$

وبذلك يكون لدينا ثلاثة معادلات فى ثلاثة مجاهيل ، ويمكن وضع المعادلة رقم (٢) فى الصـــورة الآتية :

$$a = \bar{y} - b\bar{x} - c\bar{z} \qquad (5)$$

وبقسمة المعادلة رقم (3) بعدد المشاهدات (n) نحصل على

$$\frac{\sum x_i y_i}{n} = a\bar{x} + b\frac{\sum x^2}{n} + c\frac{\sum xz}{n} \qquad (6)$$

وبالتعويض فى المعادلة رقم (6) بقيمة a فى المعادلة رقم (5) نحصل على

$$\frac{\sum x_i y_i}{n} = \bar{y}\bar{x} - b\bar{x}^2 - c\bar{x}\bar{z} + b\frac{\sum x^2}{n} + c\frac{\sum xz}{n}$$

$$\left(\frac{\sum xy}{n} - \bar{y}\bar{x}\right) = b\left(\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2\right) + c\left(\frac{\sum xz}{n} - \bar{x}\bar{z}\right) \qquad (7)$$

والمعادلة رقم (7) يمكن وضعها بالصورة الآتية

$$\text{cov.}\, xy = b\,s_x^2 + c\ \text{cov.}\, xz \qquad (8)$$

وبالمثل بقسمة المعادلة رقم (4) على (n) والتعويض فيها بقيمة (a) نحصل على

$$\text{cov.}\, zy = b\ \text{cov.}\, xz + c\,s_z^2 \qquad (9)$$

ومن المعادلتين (8) ، (9) يمكن ايجاد قيم b ، c بطريقة المحددات •

$$b = \frac{\begin{vmatrix} cov.\,xy & cov.\,xz \\ cov.\,zy & \sigma_z^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sigma_x^2 & cov.\,xz \\ cov.\,xz & \sigma_z^2 \end{vmatrix}} = \frac{cov.\,xy \,.\, \sigma_z^2 - cov.\,xz\,cov.\,zy}{\sigma_x^2 \, \sigma_z^2 - (cov.\,xz)^2}$$

$$\frac{\begin{vmatrix} \sigma_x^2 & cov.\,xy \\ cov.\,xz & cov.\,zy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sigma_x^2 & cov.\,xz \\ cov.\,xz & \sigma_z^2 \end{vmatrix}} = \frac{cov.\,zy \,.\, \sigma_x^2 - cov.\,xy\,.\,cov.\,xz}{\sigma_x^2 \, \sigma_z^2 - (cov.\,xz)^2}$$

حيث أن $cov.\,xz$ يمثل معامل التغاير بين المتغيرين x ، z

ومن المعادلة رقم (5) أمكن ايجاد تقدير (a) كالآتى :

$$a = \bar{y} - b\,\bar{x} - c\,\bar{z}$$

وبذلك نكون قد قدرنا معالم معادلة الانحدار .

ويحسب الانحراف المعيارى للمتغيرات الثلاث كالآتى :

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum y_i^2 - n\bar{y}^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}\right)}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)}$$

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (z_i - \bar{z})^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum z_i^2 - n\bar{z}_i^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum z_i^2 - \frac{(\sum z_i)^2}{n}\right)}$$

ويحسب

$$cov.\ xy = \frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = \frac{1}{n}\left(\sum x_iy_i - n\bar{x}\bar{y}\right) = \frac{1}{n}\left(\sum x_iy_i - \frac{\sum(x).\sum(y)}{n}\right)$$

وبالمثل يكون

$$cov.\ zy = \frac{1}{n}\sum(z_i-\bar{z})(y_i-\bar{y}) = \frac{1}{n}\left(\sum z_iy_i - n\bar{z}\bar{y}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sum z_iy_i - \sum(z)\sum(y)}{n}\right)$$

وبالمثل يكون

$$cov.\ xz = \frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})(z_i-\bar{z}) = \frac{1}{n}\left(\sum x_iz_i - n\bar{x}\bar{z}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sum x_iz_i - \sum(z)\sum(x)}{n}\right)$$

معامل الارتباط البسيط Simple Correlation

يقيس معامل الارتباط البسيط بين المتغيرين y , x درجة التباين فى المتغير التابع (y) والتى يمكن ارجاعها أو شرحها عن طريق التباين فى المتغير المستقل (x) وذلك بالنسبة للتباين الكلى فى المتغير التابع .

ويحسب كالآتى :

$$r_{xy} = \frac{cov\, xy}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)(\sum y_i^2 - n\bar{y}^2)}}$$

ويكون معامل الارتباط البسيط بين المتغيرين y , z مساويا

$$r_{zy} = \frac{cov.zy}{\sigma_z \sigma_y} = \frac{\sum z_i y_i - n\bar{z}\bar{y}}{\sqrt{(\sum z_i^2 - n\bar{z}^2)(\sum y_i^2 - n\bar{y}^2)}}$$

معامل الارتباط المتعدد ($R_{y.xz}$) Multiple Correlation

ويقيس معامل الارتباط المتعدد ($R_{y.xz}$) درجة التباين فى المتغير التابع (y) التى يمكن شرحها أو ارجاعها الى التباين فى المتغيرين المستقلين (x) ، (z) وذلك بالنسبة للتباين الكلى فى المتغير المستقل .

ويحسب مربع معامل الارتباط المتعدد كالآتى :

$$R^2_{y.xz} = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\, b\, r_{xy} + \frac{\sigma_z}{\sigma_y}\, c\, r_{zy} = b\,\frac{cov.xy}{\sigma^2_y} + c\,\frac{cov.zy}{\sigma^2_y}$$

$$= 1 - \frac{\sigma^2_{y.xz}}{\sigma^2_y}$$

حيث أن $s^2_{y.xz}$ هو تباين المتغير (y) حول خط الانحدار • أى متوسط مجموع مربع الفروق بين القيم المشاهدة (y) والقيم المقدرة ($\hat{y}$) ويحسب كالآتى :

$$s^2_{y.xz} = \frac{1}{n}\sum (yi-\hat{y}i)^2 = s^2_y \, (1 - R^2_{y.xz})$$

ويكون معامل الارتباط المتعدد مساويا

$$R_{y.xz} = \sqrt{R^2_{y.xz}}$$

معامل التحديد المتعدد $(R^2 y.xz)$ Multiple Coefficient of Determination

وهو عبارة عن مربع معامل الارتباط المتعدد ، ويقيس النسبة المئوية للتباين فى المتغير التابع (y) والتى يمكن ارجاعها للتباين فى كل المتغيرات المستقلة فى معادلة الانحدار مأخوذة معـا •

وفى هذه الحالة يقيس معامل التحديد النسبة المئوية للتباين فى y التى يمكن شرحها بالمتغيرين (x) ، (z) معا • وتكون الكمية $(1-R^2_{y.xz})$ عبارة عن كمية التباين فى y التى لا يمكن شرحها بالمتغيرين (x) ، (z) •

الخطأ المعيارى لمعاملات الانحدار :

يقاس الخطأ المعيارى (s_b) لمعامل الانحدار (b) كالآتى :

$$s_b = \frac{s_{y.xz}}{s_x\sqrt{(n-3)(1-r^2_{xz})}}$$

وبالمثل يقاس الخطأ المعيارى (σ_c) كالآتى :

$$\sigma_c = \frac{\sigma_{y.xz}}{\sigma_z \sqrt{(n-3)(1-r^2_{xz})}}$$

طريقة أخرى لحساب معاملى الانحدار (b) & (c)

يمكن حساب قيمة كل من (b) ، (c) بطريقة أخرى وذلك باستخدام معامل الارتباط. فيما سبق أمكن ايجاد قيمة (b) كالآتى :

$$b = \frac{\text{cov. } xy\, \sigma^2_z - \text{cov. } xz \text{ cov } zy}{\sigma^2_x\, \sigma^2_z - (\text{cov. } xz)^2} \qquad (I)$$

وبما أن معامل الارتباط البسيط بين المتغيرين x ، y يساوى

$$r_{xy} = \frac{\text{cov. } xy}{\sigma_x\, \sigma_y}$$

فيكـــون $\text{cov. } xy = r_{xy} . \sigma x . \sigma y.$

وبالتعويض فى (I) بقيم معاملات التغاير بالنسبة لمعاملات الارتباط البسيط والانحرافـــات المعيارية للمتغيرات (y) ، (x) ، (z) نحصل على

$$b = \frac{\sigma y}{\sigma x} \left(\frac{rxy - rxzryz}{1 - r^2_{xz}} \right)$$

وبالمثل فان (ح) تســاوى

$$c = \frac{\text{cov. } zy . \sigma^2_x - \text{cov. } xy \ \text{cov. } xz}{\sigma^2_x \sigma^2_z - (\text{cov. } xz)^2}$$

وتكون قيمة (ح) بالنسبة لمعاملات الارتباط البسيط والانحرافات المعيارية للمتغيرات (y) (x) ، (z) تساوى :

$$c = \frac{\sigma_y}{\sigma_z} \left(\frac{r_{zy} - r_{xz}\, r_{xy}}{1 - r^2_{xz}} \right)$$

مثال : الجدول رقم (٣) يبين سلسلة زمنية للكميات المطلوبة من الذرة وسعرها . والمطلوب :

١ ـ توفيق دالة طلب خطية ـ مستخدما الكميات المستهلكة كمتغير تابع ـ وذلك باستخدام طريقة المربعــات الصغرى .

٢ ـ احسب الخطأ المعيارى لكل معامل انحدار . كذلك احسب معامــل الارتباط المتعدد ومعامل التحديد المتعدد .

Table No. (3)[1]

Year	Consumption per capita (bushels)	Real Price (cents per bushel)
1915	29.9	53.2
1916	25.3	59.7
1922	26.3	42.2
1923	27.2	48.1
1924	20.3	62.5
1925	25.2	43.2
1926	22.9	43.7
1927	23.2	48.5
1928	23.4	50.5
1929	21.4	53.9

الحل : دع y تمثل الاستهلاك الفردى بالوحدة ((bushel)

x السعر الحقيقى)

z السنة بفرض ان ١٩٢٢ = صفر .

فتكون دالة الطلب للمجتمع هى :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \gamma z_i$$

(1) The above data relating to the demand for corn were compiled by Henry Schultz (The Theory and Measurement of Demand), Appendix A, Table 4, Chicago, University of Chicago Press, 1938.

ولتقدير (α) , (β), (γ) ستستخدم البيانات فى الجدول رقم (٣) لتوفيق دالة الطلب الخطية المقدرة

$$\hat{y}_i = a + b x_i + c z_i$$

حيث أن $\hat{y}_i$ تقدير للمتغير التابع (y)

a قيمة ثابتة وتقدير ل (α) ،

b معامل انحدار y على x وتقدير ل (β) ،

c معامل انحدار y على z وتقدير ل (γ) .

والجدول رقم (٤) يبين القيم المراد حسابها حتى نتمكن من حل المسألة

Table No. (4)

y	x	z	xy	xy	zy	
29.9	53.2	-7	-372.4	1590.68	-209.3	
25.3	59.7	-6	-358.2	1510.41	-151.8	
26.3	42.2	0	0	1190.86	0	
27.2	48.1	1	48.1	1308.32	27.2	
20.3	62.5	2	125.0	1268.75	40.6	
25.2	43.2	3	129.6	1088.64	75.6	
22.9	43.7	4	174.8	1000.73	91.6	
23.2	48.5	5	242.5	1125.20	116.0	
23.4	50.5	6	303.0	1181.70	140.4	
21.4	53.9	7	377.3	1153.46	149.8	
245.10	505.50	15.00	669.70	12337.75	280.10	المجموع
24.51	50.55	1.50	-	-		المتوسط
6080.93	25978.67	225				مجموع المربعات

تكون 10 = n

ويكون الانحراف المعيارى لكل من (y) و (x) و (z) مساويا

$$\rho_y = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum yi^2 - n\bar{y}^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{10}\left(6080.93-6007.401\right)} = \sqrt{7.3529} = 2.712$$

$$\rho_x = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)} = \sqrt{\frac{1}{10}\left(25978.67-\frac{(505.50)^2}{10}\right)} = \sqrt{42.5645} = 6.5241$$

$$\rho_z = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum z_i^2 - n\bar{z}^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{10}\left(225 - 10X(1.50)^2\right)} = \sqrt{20.25} = 4.5$$

$$r_{xy} = \frac{cov.\ xy}{\rho_x \rho_y} = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum x^2-n\bar{x}^2)(\sum y^2-n\bar{y}^2)}} = \frac{12337.75-10X50.55X24.51}{\sqrt{425.645 X 73.529}} = -.2942$$

$$ryz = \frac{cov.yz}{\rho_y\ \rho_z} = \frac{\sum yz - n\bar{y}\bar{z}}{\sqrt{(\sum y^2-n\bar{y}^2)(\sum z^2-n\bar{z}^2)}} = \frac{280.1-10X1.50X24.51}{\sqrt{202.5 X 73.529}} = -.7175$$

$$r_{xz} = \frac{\text{cov}.xz}{s_x\, s_y} = \frac{669.70 - 10 \times 50.55 \times 1.50}{\sqrt{(425.526)(202.5)}} = -.3016$$

$$b = \frac{s_y}{s_x}\left[\frac{r_{xy} - r_{xz}\, r_{yz}}{1 - r^2_{xz}}\right] = \frac{2.712}{6.5241}\left[\frac{-.2942-(-.3016)(-.7175)}{1-(-.3016)^2}\right]$$

$$= .4157 \left[\frac{-.5106}{.9091}\right] = -.2335$$

$$c = \frac{s_y}{s_z}\left[\frac{r_{yz} - r_{xz}\, r_{xy}}{1 - r^2_{xz}}\right] = \frac{2.712}{4.5}\left[\frac{-.7175-(-.3016)\times(-.2942)}{1-(-.3016)^2}\right]$$

$$= .6027 \left[\frac{-.8062}{.9091}\right] = -.5345$$

$$a = \bar{y} - b\,\bar{x} - c\bar{z}$$

$$= 24.51 - (-.2335)(50.55) - (.5345)\ 1.50$$

$$= 37.1152$$

$$\therefore \quad \hat{y}_i = 37.1152 - .2335\, x_i - .5345\, z_i$$

ويكون معامل التحديد المتعدد Multiple Coefficient of Determination $(R^2 y.xz)$ مساويا

$$R^2 y.xz = \frac{s_x}{s_y} b\, r_{xy} + \frac{s_z}{s_y} c\, r_{zy}$$

$$= \frac{6.5241}{2.712}(-.2335)(-.2942) + \frac{4.5}{2.712}(-.5345)(-.7175)$$

$$= .1653 + .6363 = .8016$$

وهذا يعنى أن حوالى ٨٠٪ من التباين فى المتغير التابع (y) يمكن ارجاعه الى التباين فى المتغيرين x ، z .

ويكون $S^2_{y.xz}$ أى تباين المتغير التابع (y) حول خط الانحدار مساويا

$$S^2_{y.xz} = S^2_y (1 - R^2 y.xz)$$

أى أنه يساوى تباين (S^2_y) المتغير التابع (y) حول الوسط الحسابى $(\bar{y})$ مضروبا فى واحد مطروحا منه معامل التحديد المتعدد . وتكون قيمته مساوية .

$$S^2_{y.xz} = 7.3529 (1 - .8016) = 7.3529 \times .1984 = 1.4588$$

ويكون الانحراف المعيارى حول خط الانحدار مساويا

$$S_{y.xz} = 1.202$$

ويكون الخطأ المعيارى لمعامل الانحدار (b) مساويا

$$s_b = \frac{S_{y.xz}}{s_x \sqrt{(n-3)(1-r^2_{xz})}} = \frac{1.202}{6.5241\sqrt{(7)(1-(-.3016)^2)}}$$

$$= \frac{1.202}{6.524\sqrt{6.363}} = .0730$$

$$s_c = \frac{S_{y.xz}}{s_z\sqrt{(n-3)\,(1-r^2_{xz})}} = \frac{1.202}{4.5\sqrt{7(.9090)}}$$

$$= \frac{1.202}{4.5(2.523)}$$

$$= .1059$$

اختبار معنوية معاملى الانحدار (b) , (c) :

لقد قدرنا فيما سبق قيمة معامل الانحدار (b) بالقيمة ــ ٢٣٣٥ر٠ ، وهذا عبارة عن تقدير لقيمة β للمجتمع ، والمراد اختبار ما اذا كانت $(\beta = 0)$ أم أنها لا تساوى الصفر . ولذا نجرى اختبار (t) بنفس الطريقة التى أجريت فى الانحدار البسيط .

$$t_b = \frac{b - \beta}{s_b} = \frac{-.2335}{.0730} = -3.1986$$

وبالنظر الى جدول (t) فاننا نلاحظ أن قيمة (t) بدرجة معنوية مساوية $(.05)$ والمقابلة لسبعة درجات حرية تكون مساوية $\left(t_{(.05,7)} = 2.365\right)$ وحيث أن القيمة المطلقة لـ (t_b) المقدرة أكبر من قيمة $t_{(.05,7)}$ من الجدول فاننا نرفض الفرض القائل بأن $\beta = 0$ أى أن معامل الانحدار (β) يختلف معنويا عن الصفر .

وبالمثل يمكن اختبار معنوية معامل الانحدار (c) ويكون الفرض المراد اختباره فى هذه الحالة هو $(\gamma = 0)$ مقابل أن $(\gamma \neq 0)$ ، فتكون

$$t_c = \frac{c - \gamma_0}{s_c} = \frac{-.5345}{.1059} = -5.0472$$

وحيث أن القيمة المطلقة لتقدير (t_c) أكبر من قيمة $t_{(.05,7)}$ من الجدول لذا فاننا نرفض الفرض القائل بأن $\gamma = 0$ وهذا يعنى أن معامل الانحدار γ يختلف معنويا عن الصفر .

مشاكل تحليل السلاسل الزمنية

يصادف الباحثون عند استخدامهم السلاسل الزمنية في ابحاثهم المختلفة - اقتصادية كانت او غير اقتصادية - بعض المشاكل التى قد تحد من درجة كفاءة النتائج والتقديرات المتحصل عليها • وفيما يلى سنستعرض بعض هذه المشاكل •

١ - من المشاهد ان المعرفة الفنية Technology فى مختلف الميادين تتغير بسرعة فائقة من وقت لآخر • وهذا التغير السريع له اثر كبير على العلاقات التركيبية بين المتغيرات الاقتصادية المختلفة • والامثلة على ذلك كثيرة منها التغير التركيبى الذى يطرأ على دوال الانتاج ودوال العرض كنتيجة للتقدم المطرد فى المعرفة الفنية • والتغير فى المعرفة الفنية - فى هذه الحالة - ينتج عن استخدام عناصر انتاج جديدة ، اختراعات جديدة ، وسائل انتاج جديدة ، ومنتجات جديدة وما الى ذلك • وبما انه لا توجد مشاهدات سابقة لكل من هذه المتغيرات الجديدة فانه يستحيل ضم هذه المتغيرات الجديدة الى نماذج الانحدار • لذا يلجأ بعض الاقتصاديون الى فرض ثبات المعرفة الفنية فى ابحاثهم ، ويكون هذا الفرض مقاربا للحقيقة فقط فى المدى القصير نسبيا • ولكن فى الواقع فان السلاسل الزمنية تصف دائما العلاقات بين المتغيرات لفترات طويلة والتى لن تتحقق فيها صحة الفرض السابق •

٢ - التنبأ بالمستقبل : يعتبر التنبأ بالمستقبل احد اهداف الباحثين المستخدمين السلاسل الزمنية • فمثلا فى دراسات دوال العرض والطلب يحاول الباحثون تقدير العلاقات السائدة بين المتغيرات الاقتصادية المختلفة والتى قد تساعدهم للتنبأ بما قد تكون عليه هذه العلاقات فى المستقبل • وقد يكون من الخطأ استخدام نماذج الانحدار للسلاسل الزمنية للتنبأ بعلاقات المستقبل وذلك راجع الى ان التغيرات المستقبلة التى قد تطرأ على المتغيرات لا يمكن ضمها الى هذه النماذج • ولكن على العموم فانه يمكن استخدام النتائج المتحصل عليها للتنبأ فى المدى القصير او للتنبأ عن العلاقات السائدة خلال الفترة التى تغطيها السلسلة الزمنية •

٣ — التوقع واللايقين : نلاحظ ايضا ان كثيرا من الاقتصاديين عند تحليلهم لدوال العرض والطلب يستخدمون الاسعار السائدة اى المشاهدة فى السوق ، الاسعار التى يدفعها المنتج او المستهلك ، او اسعار اسواق الجملة او التجزئة كمتغيرات مستقلة فى نماذجهم ، وفى الحقيقة فان المنتج او المستهلك عندما يضع قراراته الخاصة بالانتاج او الاستهلاك فانه لا يأخذ فى اعتباره التغيرات فى هذه الاسعار ولكنه يأخذ فى اعتباره ما يتوقع ان يحصل عليه او يدفعه من اسعار . وهذه التوقعات دائما تحسب مع وجود عامل اللايقين بالمستقبل . وبما ان السلاسل الزمنية تصف دائما العلاقات بين المتغيرات فى الماضى او الحاضر فانه يكون من الصعب معالجة مشكلة التوقعات واللايقين . لذا فان النتائج المتحصل عليها باستخدام الاسعار المدفوعة او المتحصل عليها ستكون متحيزة بعض الشيء .

٤ — قصور البيانات : يعتمد تحليل الانحدار اعتمادا كليا على البيانات المسجلة والمشاهدة فى الماضى وفى صورة سلاسل زمنية . وفى اغلب الاحيان يواجه الاقتصاديون قصور ونقص فى البيانات اللازمة لابحاثهم . وفى العادة فان البيانات المتوفرة لهم يكون مصدرها التعدادات او العينات التى تكون مصممة لاغراض واستخدامات خاصة مثل الحكومات ورجال الاعمال وما الى ذلك . وقد تكون البيانات الخاصة بهذه الاغراض غير كافية للاستخدامات الاقتصادية . لذا فاننا نلاحظ ان كثيرا من الباحثين قد لا يجدوا بعض البيانات والتى قد تكون ذات اهمية خاصة فى ابحاثهم .

٥ — عدد المتغيرات المستقلة : يتحدد عدد المتغيرات المستقلة والمستخدمة فى نماذج الانحدار المتعدد بعدد المشاهدات المتوفرة . وكلما زاد عدد المتغيرات المستقلة المستخدمة كلما زادت دقة النتائج المتحصل عليها ، كذلك فان التركيب المعقد للعلاقات الاقتصادية فى مختلف الميادين — انتاجية كانت ام استهلاكية ، زراعية كانت ام صناعية ، محلية كانت ام دولية — يدعو الى دراسة وتحليل كثير من العلاقات المختلفة بين المتغيرات المختلفة . لذا فانه يتحتم استخدام كثير من

المتغيرات المستقلة فى نماذج الانحدار حتى يمكن الحصول على النتائج المرغوب فيهـــا . وفى كثير من الاحيان يصعب تحقيق هذا نظرا لان السلاسل الزمنية المتوفرة تغطـــى فقط بعض من هذه المتغيرات المستقلة .

٦ - الارتباط بين المتغيرات Multicollinearity Among Variables :

وهذا يعنى انه توجد علاقة وثيقة بين المتغيرات المستقلة . ففى بعض الاحيـــان يكون هناك ارتباط شديد بين متغيرين او اكثر من المتغيرات المستقلة لذا فـــان النتائج المتحصل عليها فى هذه الحالة لن تمثل العلاقات الحقيقية بين المتغير التابـع والمتغيرات المستقلة وهذا ينتج عنه استنتاجات خاطئة . بالاضافة الى انه يكون مـــن الاستحالة بمكان قياس تأثير كل من المتغيرات المستقلة على حدة على المتغير التابـــع. وفى حالة ما اذا كان الارتباط الموجود بين متغيرين مستقلين هو ارتباط تام وموجـــب فيكتفى فى هذه الحالة باستخدام اى منهما لشرح التباين الموجود فى المتغير التابع.

٧ - الارتباط المتسلسل او المتتابع Autocorrelation and Serial Correlation :

يواجه الباحثون عند استخدامهم طريقة الانحدار للسلاسل الزمنية المتقاعســـة Lagged Time Series Regression بعض المشاكل التى تنشأ عن وجود ارتباط بـــين السلسلة الزمنية المتقاعسة ونفسها ويطلق عليه فى هذه الحالة Autocorrelation او بين سلسلة زمنية متقاعسة وسلسلة زمنية اخرى ويعرف فى هذه الحالة Serial Correlation . وقد يظهر الارتباط المتتابع هذا كنتيجة لوجود اتجاه عام او للتحركـــات الطويلة المدى فى السلاسل الزمنية . وتتصف التقديرات والنتائج المتحصل عليها فـــى وجود الارتباط المتتابع بنقص فى دقتها .

٨ - مشكلة التمييز Identification Problem :

يستخدم الاقتصاديون فى العادة عند تقديرهم لدوال العرض والطلب لسلعــــة او خدمة ما البيانات المسجلة والمتوفرة عن الاسعار والكميات المرادفة لها فـــى

لحظة معينة من الوقت او لسلسلة من الفترات المتتابعة ، ويمكن باستخدام نفس البيانات تقدير اما دالة الطلب او دالة العرض. اى ان المشكلة تنحصر فى انه عند رسم هذه البيانات فى شكل انتشار فانه سيكون من الصعب على الباحث ان يقرر ما اذا كانت هذه النقط تقع على منحنى العرض ام انها تقع على منحنى الطلب. وفى حالات معينة فانه يكون من السهل تحديد ما اذا كانت البيانات تمثل منحنى الطلب ام انها تمثل منحنى العرض. فاذا كانت الظروف السائدة فى السوق تشير الى ان منحنى الطلب لم يطرأ عليه تغيير فى حين ان منحنى العرض قد انتقل من مكانه على مر الزمن نتيجة لتغير اى من العوامل التى تؤثر على منحنى العرض. فتكون النقط فى شكل الانتشار تمثل منحنى الطلب. اما اذا بقى منحنى العرض بدون تغيير وان الظروف السائدة تشير الى ان منحنى الطلب هو الذى طرأ عليه التغير نتيجة لتغير اى من العوامل التى تؤثر على منحنى الطلب ، فتكون النقط فى شكل الانتشار فى هذه الحالة تمثل منحنى العرض. ولكن ستبقى مشكلة التميز فى حالة ما اذا كانت الظروف السائدة فى السوق تشير الى ان كلا من منحنى العرض والطلب قد انتقلا فى نفس الوقت. ويمكن التخلص من هذه المشكلة الاخيرة باحدى الطريقتين الآتيين :

أ - استخدام طريقة الانحدار المتعدد : تساعد هذه الطريقة فى حل مشكلة التميز وذلك بادخال فى كلا او فى اى من معادلتى الطلب والعرض متغير لا يوجد فى المعادلة الاخرى.

ب - استخدام الانحدار المتتابع Lagged Regression : فى بعض الاحيان يكون من المعلوم للباحث ان الكميات المطلوبة او الكميات المعروضة تعتمد الى درجة كبيرة على متغير متقاعس Lagged Variable. وبادخال بعض المتغيرات المتقاعسة فى اى من معادلتى الطلب او العرض فانه يمكن حل مشكلة التميز.