الجمهورية العربية المتحدة

معهد التخطيط القومي

مذكرة رقم (٤٤٨)

التخطيط الأمثل للتجارة الخارجية

اعداد

مهندس محمد عبد الفتاح منجى

مهندس محمد صادق عيد

عن سلسلة المحاضرات التى يلقيها "Dr.T.Kronsjö"

بمركز بحوث العمليات

يونيه ١٩٦٤

القاهرة

سنفترض فى هذه المذكرة أن هناك اقتصاد ما يتعامل تجاريا مع عدد من الأسواق الخارجية بعملات نقدية مختلفة غير قابلة للتحويل وعلى هذا فمن الواضح أن الفائض من معاملات سوق ما لا يمكن استخدامه لتغطية النقص فى معاملات سوق آخــــر .

وبالنظر الى المثال التوضيحى (جدول ١) الذى يوضح امكانية التصدير والاستيراد للاقتصاد المذكور مع الأسواق الخارجية المختلفة ذات عملات غير قابلة للتحويل لبعضها .

فى هذا الجدول افترضت السلع رقم ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ تمثل السلع الممكــن تصديرها من هذا الاقتصاد كما تمثل السلع رقم ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ السلع المطلــوب استيرادها حيث هناك بعض كميات من السلع يمكن تصديرها وكميات أخرى من السلع المطلــوب استيرادها — كما تفرض ظروف كل من الأسواق الاقتصادية المختلفة حدود عظمى أو صغــرى للكميات الممكن تصديرها أو استيرادها — كما تختلف أسعار التصدير والاستيراد لكل من هــذه المناطــق .

والمشكلة التى تهم الاقتصاد تحت الدراسة هى الحصول على احتياجاته الكلية من الواردات مع تحقيق أكبر فائض فى ميزان المدفوعات بالنسبة لأحد أو لمجموعة من المناطق الاقتصادية .

ويمكن حل هذه المشكلة وايجاد النموذج الخاص بها على صورة مسألة من مسائل التوزيــع المرجح Weighted Distribution Problem وهو من النماذج الرياضية فى حــل المشاكل بواسطة أساليب بحوث العمليات . كما يمكن وضعها فى صورة مسألة من مسائل البرامــج الخطية Linear Programming Problem ويظهر ذلك فى شكل (١) .

امكانيات الاقتصاد على التصدير والاستيراد مع مناطق عملة غير قابلة للتحويل

رقم السلعة	امكانية الاقتصاد على التصدير أو الاستيراد س̄ح	منطقة العملة (١) السعر ع١ح	الكمية س١ح	أكبر قيمة س̄١ح	القيمة ع١ح س١ح	منطقة العملة (٢) السعر ع٢ح	الكمية س٢ح	أكبر قيمة س̄٢ح	القيمة ع٢ح س٢ح	منطقة العملة (٣) السعر ع٣ح	الكمية س٣ح	أكبر قيمة س̄٣ح	القيمة ع٣ح س٣ح	منطقة العملة (٤) السعر ع٤ح	الكمية س٤ح	أكبر قيمة س̄٤ح	القيمة ع٤ح س٤ح
١	١٫٥	١	س١	٢	١س١	—				—				٣	س٢	١	٣س٢
٢	٣٫٠	—				١٫٥	س٣	١٫٥	١٫٥س٣	١٠	س٤	٥	١٠س٤	١	س٥	٢	١س٥
٣	٢٫٠	١	س٦	١	١س٦	٤	س٧	٠٫٥	٤س٧	٣٠	س٨	١	٣٠س٨	—			
٤	٠٫٧	—				٠٫٤	س٩	٥	٠٫٤س٩	٢	س١٠	١٥	٢س١٠	٠٫٥	س١١	١٤	٠٫٥س١١
٥	١٫٠	١٫٥	س١٢	٠٫٥	١٫٥س١٢	٣	س١٣	١	٣س١٣	—				٨	س١٤	٠٫٣	٨س١٤
٦	٠٫٥	١	س١٥	٧	١س١٥	٣	س١٦	١٠	٣س١٦	—				٢	س١٧	٤	٢س١٧
٧	٢٫٥	−١	س١٨	١٫٥	−١س١٨	−١٫٥	س١٩	٠٫٥	−١٫٥س١٩	−١٨	س٢٠	٢	−١٨س٢٠	−٢	س٢١	٤	−٢س٢١
٨	٠٫٤	−٠٫٢	س٢٢	٥	−٠٫٢س٢٢	−٠٫٧	س٢٣	١	−٠٫٧س٢٣	—				−١	س٢٤	١٣	−١س٢٤
٩	١٫٠	−٢٫٦	س٢٥	١	−٢٫٦س٢٥	−٨	س٢٦	٢	−٨س٢٦	−٩	س٢٧	٠٫٥	−٩س٢٧	−٧	س٢٨	٥	−٧س٢٨
١٠	٠٫٨	—				−٢	س٢٩	٣	−٢س٢٩	−١١	س٣٠	٧	−١١س٣٠	−١	س٣١	١٠	−١س٣١
١١	٠٫٨	−١	س٣٢	٢	−١س٣٢	−٢	س٣٣	٤	−٢س٣٣	−٣	س٣٤	١٠	−٣س٣٤	—			
الموازنة المطلوبة		صفر				١				−١٦				أكبر ما يمكن			

شكل (١) :ـ تركيـــب النمـــوذج

(١)	$ك_{١١} س_{١١} + ك_{٢١} س_{٢١} + \cdots + ك_{م ن} س_{م ن}$	$ك_{١} ص_{١} + ك_{٢} ص_{٢} + \cdots + ك_{م} ص_{م}$
(٢)	$ع_{١١} س_{١١} \quad +ع_{١٢} س_{١٢} \quad +ع_{١٣} س_{١٣}$ $+ع_{٢١} س_{٢١} \quad +ع_{٢٢} س_{٢٢} \quad +ع_{٢ن} س_{٢٣}$ $+ع_{م١} س_{م١} \quad +ع_{م٢} س_{م٢} \quad +ع_{م ن} س_{م ن}$	$-ص_{١}$ $-ص_{٢}$ $-ص_{م}$
(٣)	$س_{١١} + س_{٢١} + \cdots + س_{م١}$ $س_{١٢} + س_{٢٢} + \cdots + س_{م٢}$ $س_{١ن} + س_{٢ن} + \cdots + س_{م ن}$	
(٤)	صفر $\leqslant س_{ر و} \leqslant \bar{س}_{ر و}$ (ر = ١، ٢، ...، ن) (و = ١، ٢، ...، م)	صفر $\leqslant ص_{و} \leqslant \bar{ص}_{و}$ (و = ١، ٢، ...، م)

$س_{رو}$ = كمية المصدر أوالمستورد من السلعة " ر " الى أو من المنطقة " و "

$\overline{س}_{رو}$ = الحد الأعلى على الكمية المصدرة أو المستوردة

$ع_{رو}$ = السعر المتحصل أو المدفوع ($ع_{رو} \gtrless$ صفر) للكمية المصدرة أو المستوردة

$ص_{و}$ = الزيادة فى الميزان التجارى " و " بالنسبة الى التوازن المطلوب

$\overline{ص}_{و}$ = الحد الأعلى لهذه الزيادة

$أ_{و}$ = الفائض أو العجز المطلوب بالنسبة لمنطقة العملة " و "

$ب_{ر}$ = الكمية الممكن تصديرها أو المرغوب استيرادها من السلعة " ر " .

$ك_{و}$ = تقدير الفائض فى الميزان التجارى

$ك_{رو}$ = القيمة المحددة لتصدير أو استيراد كمية معينة الى أو من بلد معين .

وتشتمل المشكلة على مجموعة معادلات للتوازن السلعى وعلى حدود متغيره وتظهر فى المستطيلين الأخيرين على اليمين واللذان سيكونان فيما بعد أجزاء سنسميها " مشكلة جزئية " (Subproblem) والمعادلات الخاصة بميزان المدفوعات والاضافة الى دالة الهدف وهى الدالة المرجحة لفائض الميزان التجارى وكل من هذه ستكون جزءا مما يسمى المشكلة الرئيسية (Master Problem) .

وبالنظر الى الشكل رقم (١) نلاحظ أن كل صف يمثل معادلة سلعة معينة فمثلا يمثل الصف (١) حالة كمية معينة من الفحم من حيث الاستيراد والتصدير والانتاج وبالمثل الصف رقم (٢) يمثل معادلة المازوت ... الخ فى حين أن الأعمدة تمثل الاستيراد والتصدير والانتاج الخاص بكل منطقة من المناطق الاقتصادية وكل قطاع من القطاعات المنتجة .

طريقة الحل بتجزئة المشكلة الرئيسيـــــة :ــ

يمكن تقسيم المشكلة الرئيسية فـى شكل (١) الى عدة مشاكل أو مسائل صغيرة ــ فمثــلا يمكن أخذ المستطيلين رقم ٣ ، ٤ من المشكلة الرئيسية وحلها كمشكلة جزئية ــ وحل هــــذه المشكلة الجزئية سيعطى كميات التصدير والاستيراد الآتيـــة :ــ

$$\text{س}_{\text{رو}}^{(\text{ح})} \qquad \begin{array}{l} (\text{ر} = ١ ، ٢ ، \ldots ، \text{ن}) \\ (\text{و} = ١ ، ٢ ، \ldots ، \text{م}) \end{array} \qquad (٥)$$

وكميات التصدير والاستيراد هذه ستؤثر فى زيادة قيمة معادلة الهدف ومعادلات الموازنات التجارية • ويمكن تمثيل هذا التأثير بالمعادلات الآتيـــة :ــ

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \sum_{\text{و}=١}^{\text{م}} \text{ك}_{\text{رو}} \, \text{س}_{\text{رو}}^{(\text{ح})} = \text{هـ}^{(\text{ح})} \qquad (٦)$$

$$، \quad \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ر}١} \, \text{س}_{\text{ر}١}^{(\text{ح})} \; (\text{مع المنطقة رقم } ١) = \text{هـ}_{١}^{(\text{ح})}$$

$$، \quad \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ر}٢} \, \text{س}_{\text{ر}٢}^{(\text{ح})} \; (\text{مع المنطقة رقم } ٢) = \text{هـ}_{٢}^{(\text{ح})}$$

. . . .

$$\sum_{\text{و}=١}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{رم}} \, \text{س}_{\text{رم}}^{(\text{ح})} \; (\text{مع المنطقة رقم م}) = \text{هـ}_{\text{م}}^{(\text{ح})}$$

ويمكن الرمز لمتجه Vector الميزان التجارى بالرمز $\text{هـ}^{(\text{ح})}$

أى أن

$$\text{هـ}^{(\text{ح})} = \begin{bmatrix} \text{هـ}_{١}^{(\text{ح})} \\ \text{هـ}_{٢}^{(\text{ح})} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{هـ}_{\text{م}}^{(\text{ح})} \end{bmatrix} \qquad (٧)$$

ولنفترض أن هناك حلول أخرى لهذه المشكلة مثل $\text{س}_{\text{رو}}^{(\text{حـ})}$ — أى أن

$$(٨) \qquad \text{س}_{\text{رو}}^{(1)} \qquad \text{س}_{\text{رو}}^{(2)} \quad \ldots\ldots \quad \text{س}_{\text{رو}}^{(\text{حـ})} \quad \ldots\ldots \quad \text{س}_{\text{رو}}^{(\text{ح})}$$

ويقابل هذه الحلول الموازين التجارية الآتيـــة :

$$(٩) \qquad \text{هـ}^{(1)} \qquad \text{هـ}^{(2)} \quad \ldots\ldots \quad \text{هـ}^{(\text{حـ})} \quad \ldots\ldots \quad \text{هـ}^{(\text{ح})}$$

ومن المعلـــوم رياضيا أنه يمكن اذا علم أى حلين لمشكلة من مشاكل البرامج الخطية فـــان أى نقطة تنحصر بين هذين الحلين — أى أن

$$(١٠) \qquad \text{س}_{\text{رو}} = \sum_{\text{حـ}=1}^{\text{ح}} \text{س}_{\text{رو}}^{(\text{حـ})} \cdot \lambda_{\text{حـ}}$$

$$(١١) \qquad \text{حيث} \quad \sum_{\text{حـ}=1}^{\text{ح}} \lambda_{\text{حـ}} = 1$$

$$\text{،} \qquad \lambda_{\text{حـ}} \geqslant \text{صفر} \qquad (\text{حـ} = 1 ، 2 ، \ldots ، \text{ح})$$

تمثل أيضا حلا من حلول المشكلـــة .

وفى هذه الحالة يمكن تمثيل قيمة الميزان التجارى الذى يناظر هذا الحل المختـــار بالمعادلة الآتيـــة :ـــ

$$(١٢) \qquad \text{هـ} = \sum_{\text{حـ}=1}^{\text{ح}} \cdot \ \text{هـ}^{(\text{حـ})} . \lambda_{\text{حـ}}$$

مع وجوب تحقيق الشرط الآتـــى :

$$(١٣) \qquad \sum_{\text{حـ}=1}^{\text{ح}} \lambda_{\text{حـ}} = 1$$

$$\lambda_{\text{حـ}} \geqslant \text{صفر} \qquad (\text{حـ} = 1 ، 2 ، \ldots ، \text{ح})$$

وعلى ذلك يمكننا أن نحقق مجموعة معادلات الميزان التجارى التى عددها "م" معادلـــة وفى نفس الوقت نحقق أكبر قيمة لمعادلة الهدف بربط الموازين التجارية المختلفة $\text{هـ}^{(\text{حـ})}$ وبالتالـــى حل المشكلـــة .

(١٤) أوجد أكبر قيمة الكمية $\sum_{و=١}^{م} ك_و ص_و$

مع مراعاة

(١٥) $\sum_{ح=١}^{ح} هـ_و^{(ح)} \cdot \lambda_ح - ص_و = أ_و$

(١٦)، $\sum_{ح=١}^{ح} \lambda_ح = ١$

(١٧)، $\lambda_ح \geqslant$ صفر ، $ص_و \geqslant$ صفر

حيث (ح = ١ ، ٢ ، ... ، ح ، و = ١ ، ٢ ، ... ، م)

كما تم فى المشكلة الرئيسية (١ ــ ٤) فاننا نأتى بأكبر قيمة لدالة فائض النقد (١٤) مع المناطق المختلفة .

وعند حل هذه المشكلة رياضيا فان أحسن حل لها سيعطى مجموعة من أسعار الظل (Shadow Prices) " $\pi_و$ " للمصادر (العملات) و من ١ الى م —

وهذه الأسعار عرفها الاستاذ راجنر فريش باسم " أسعار دورة الحل" Iterative Prices وذلك لكونها مؤقتة بالنسبة لعملية الحل ، ويجب تمييزها عن الأسعار المثلى النهائية للمصادر .

وتبين أسعار دورة الحل هذه مدى امكانية زيادة قيمة معادلة الهدف باستخدام حلول تبادلية ممكنة نتيجة لزيادة متناهية الصغر لمصادر العملة المناظرة — وهذه الأسعار يمكن أن تؤثر على اختيارنا لحل جديد $س_{ر و}$ للمشكلة الجزئية آخذين فى الاعتبار كل قيمة $س_{ر و}$ يمكن أن تؤثر على زيادة قيمة معادلة الهدف للمشكلة الرئيسية — كما أن الكميات التى يستخدمها أو يعطيها كل متغير من المصادر التى يبلغ محددها "م" مصدرا يمكن تقديرها طبقا لأسعار دورة الحل " $\pi_و$ "

ولايجاد حل أحسن $س_{ر و}$ يجب أن نختار القيم $س_{ر و}$ التى تعطى :

(١٨)   أصغر قيمة للكمية $\sum_{ر=١}^{ن}$ ($\sum_{ر=١}^{م}$ ك$_{رو}$ — $\pi_{و}$ ع$_{رو}$ س$_{رو}$)

وفى نفس الوقت تحقق شروط المشكلة الجزئية :ـ

(١٩) $\sum_{و=١}^{م}$ س$_{رو}$ = ب$_{ر}$ (ر = ١ ، ... ، ن)

(٢٠)   صفر $\leqslant$ س$_{رو}$ $\leqslant$ $\bar{\text{س}}_{رو}$ (ر = ١ ، ... ، ن)
(و = ١ ، ... ، م)

وهذه المشكلة يمكن أن تقسم الى عدد "ن" من المشاكل الفرعية ممثلة كما يأتـــــى

(٢١)   أصغر قيمة للكمية $\sum_{و=١}^{م}$ ك$_{رو}$ — $\pi_{و}$ ع$_{رو}$ س$_{رو}$

مع تحقيق معادلة قيد واحدة :

(٢٢) $\sum_{و=١}^{م}$ س$_{رو}$ = ب$_{ر}$

(٢٣)،   صفر $\leqslant$ س$_{رو}$ $\leqslant$ $\bar{\text{س}}_{رو}$ (و = ١ ، ... ، م)

ولايجاد النهاية العظمى لواحدة من هذه المشاكل (من ٢١ الى ٢٣)

يجب أن نجد أى القيم للكمية ك$_{رو}$ — $\pi_{و}$ × ع$_{رو}$ أكبر من كل القيم الأخرى ثم نضـــــع قيمة س$_{رو}$ المناظرة تساوى أعلى قيمة لها أو القيمة الغير مستعملة للقيد المشترك ب$_{ر}$ Constraints ثم نجد أكبر حاصل ضرب يليها ... الخ (*).

وبمعنى آخر فان الكميات ك$_{رو}$ — $\pi_{و}$ ع$_{رو}$ ترتب ترتيبا تنازليـــــا ،

حيث س$_{رو}$:= صفر ، ب$_{ر}$:= ب المتبقى

(*) لمراجعة كل حساب مفصل لهذه الخطوات يرجع الى :
Tom Kronsjö
"Iterative pricing for planning foreign trade", Economics of planning, Oslo, No.1, April 1963, pp 1-23 ,
ويمكن الحصول منها على مراجع أكثر

(:= تعنى التعويض عنها)

كذلك حـ := رمز أكبر $\Pi_{و}$ $ع_{رو}$ المتبقى (لم يؤخذ فى الاعتبار من قبل)

$س_{رحـ}$:= أقل كمية فى ($\overline{س}_{رحـ}$ ، $س_{الباقى}$)

ثم من يعوض عن $ب_{المتبقى}$ الجديدة := $ب_{المتبقى}$ السابقة — $س_{رحـ}$

وتختبر فى كل حالة $ب_{المتبقى}$ فاذا كانت أكبر من صفر فيكمل الحل .

ويعطى المتجه $س_{رو}$ المستنتج متجه مناظر "هـ" للميزان التجارى الجديد والـــذى يمكن ادخاله وربطه فى المشكلة الرئيسية مع متجهـــات الميزان التجارى المستنتجه سابقا وفى كـــل دورة من دورات الحل تظهر الأسعار $\Pi_{و}$ والتى تعطى متجه جديدة $س_{رو}$ ...... الخ ويستكمل هذا الحل حتى نصل الى حل للمشكلة الرئيسية لا يمكن تحسينه — وهذا الحل هو الحل الأمثـــل .

أثر التغيرات الحدية فى طاقة المصادر
علـــى دالة الهـــدف فى مسائـــل البرامـــج الخطية

اذا افترضنا مسألة من مسائل البرامج الخطية

(١) أوجد أقل قيمة للمقدار

$$\text{ص} = \text{ك}\,\text{س}$$

حيث

$$\text{أ}\,\text{س} = \text{ب}$$

$$\text{س} \geq \text{صفر} \quad ،$$

يمكن كتابة هذه المسألة فى الصورة التاليـــة

(٢) أوجد أقل قيمة للمقدار

$$\text{ص} = \bar{\text{ك}}\,\bar{\text{س}} + \bar{\bar{\text{ك}}}\,\bar{\bar{\text{س}}}$$

$$\bar{\text{أ}}\,\bar{\text{س}} + \bar{\bar{\text{أ}}}\,\bar{\bar{\text{س}}} = \text{ب}$$

$$\bar{\text{س}} > \text{صفر} \qquad \bar{\bar{\text{س}}} = \text{صفر}$$

أو بالصورة

(٣) أوجد أقل قيمة للمقدار

$$\text{ص} = \bar{\text{ك}}\,\bar{\text{س}} + \bar{\bar{\text{ك}}}\,\bar{\bar{\text{س}}}$$

$$\bar{\text{س}} = (\bar{\text{أ}})^{-1}\,\text{ب} - (\bar{\text{أ}})^{-1}\,\bar{\bar{\text{أ}}}\,\bar{\bar{\text{س}}}$$

$$\bar{\text{س}} > \text{صفر} \qquad \bar{\bar{\text{س}}} = \text{صفر}$$

وعلى هذا فالمطلوب دراسة مدى التأثير على ص نتيجة للتغير فى طاقة المصادر "ب"

لو افترضنا أننا سمحنا بتغيير ما فى $\bar{\text{س}}$ (حيث يظل $\bar{\bar{\text{س}}} = \text{صفر}$) نتيجة لتغيـــير فى ب بمقدار د ب فان

(٤) $$\text{د}\,\bar{\text{س}} = (\bar{\text{أ}})^{-1}\,\text{د ب}$$

$$\text{د}\,\bar{\bar{\text{س}}} = \text{صفر}$$

وعلى هذا فان التغير فى دالة الهدف نتيجة تغير د س هو ٠

$$\text{(٥)}\quad د ص = كَ د سَ + كً د سً$$

وبالتعويض من (٤) فى (٥)

ينتج أن $د ص = كَ \,(\bar{أ})^{-١}\, د ب$

واذا كان التغير يختص بالحد رقم " ر " فى المصادر " ب " أى $د ب_ر$ ، فيمكن التعبير عن المتجه د ب كما يلى

$$\text{(٧)}\quad د ب = \delta_ر \cdot د ب_ر$$

حيث $\delta_ر$ هو متجه عمودى قيمته الوحدة حيث كل عنصر فيه يساوى الصفر فيما عدا العنصر رقم " ر " والذى يساوى الوحدة ٠

ويمكن التعبير عن التغير فى قيمة دالة الهدف نتيجة تغير طاقة المصدر رقم " ر " فقط بالتعويض من معادلة (٧) فى المعادلة (٦) كما يلى

$$\text{(٨)}\quad د ص = كَ \,(\bar{أ})^{-١} \cdot \delta_ر \cdot د ب_ر$$

ويكون التفاضل الجزئى $\frac{د ص}{د ب_ر}$ فى هذه الحالة

$$\text{(٩)}\quad \frac{د ص}{د ب_ر} = كَ \,(\bar{أ})^{-١} \cdot \delta_ر$$

ويمكن تسمية هذه النسبة لسعر الظل للمصدر رقم " ر " وستأخذ الرمز $\pi_ر$

$$\text{(١٠)}\quad \frac{د ص}{د ب_ر} = \pi_ر = كَ \,(\bar{أ})^{-١}_ر$$

وتعبر $(\bar{أ})^{-١}_ر$ عن العمود رقم " ر " من مقلوب المصفوفة $(\bar{أ})^{-١}$ وبتعويض قيمة المعاملات π فى (٦) يمكن التعبير عن د ص كما يلى

$$\text{(١١)}\quad د ص = \pi \cdot د ب$$

فى حالتنا هذه المصفوفات هـ = ($هـ_١$ ، ... ، $هـ_ح$) ، $-I$

حيث $-I =$

$$\begin{pmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ddots & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & -1 \end{pmatrix}$$

تناظر المصفوفة (أ) ، قيمة القيود أ والمتجه ب ، المتغير λ ، ص ، س لمسألة البرامج الخطية المذكورة .

وبغض النظر عما تعبر عنه القيود والمتغيرات فان الاستنتاجات فى كل حالة ستكون واحدة ولكن يجب مراعاة التعويض المضبوط فى معادلات المشكلة .