الجمهورية العربية المتحدة

التخطيط القومي

معهد التخطيط القومي

مذكرة رقم (٩٦٤)

مقدمة فى مبادئ التحليل الكمى الاحصائى

اعداد

دكتور / كمال أحمد الجنزورى

مايو ١٩٧٠

القاهرة

٣ شارع محمد مظهر ـ بالزمالك

الآراء التى وردت فى هذه المذكـــــــــــــرة

تمثل رأى الكاتب ولاتمثل رأى المعهد ذاتـــــــــــه

تمهيـــــــد

يهتم الدارسون فى مجال البحوث التطبيقيه بتحديد العلاقه بين المتغيرات المختلفـــــــــه التى تحكم أو تؤثر على ظاهرة معنيه ، فمثلا فى مجال البحوث الاقتصاديه فانهم يهتمون بتحديد العلاقه بين المتغيرات الاقتصاديه التى تحكم ظاهره اقتصاديه معينه ، كمتغيرات أسعار سلعه معينـــه وأسعار السلع المتصله (البديله أو المكملة) ودخول الأفراد ٠٠٠٠٠٠٠٠ الخ التى تحكم ظاهـــره زيادة أو نقص الطلب على هذه السلعه خلال فتره معينه ، أوكمتغيرات أسعار العناصر المتغــــيره واسعار العناصر الثابته ٠٠٠٠٠ الخ التى تؤثر على زيادة أو نقص التكاليف الانتاجيه ٠ ولا يقف الاهتمام فى مجال البحوث الاقتصاديه عند تحديد العلاقه بين المتغيرات الاقتصاديه فحسب ، بل قد يذهب الى تحديد العلاقه بين المتغيرات الاقتصاديه والطبيعيه والتكنولوجيه و ٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠الخ فمثلا قد يتجه الاهتمام الى تحديد العلاقه بين المتغيرات الاقتصاديه والتكنولوجيه والجويـــــــه التى تحكم ظاهره ارتفاع أو تدهور غله محصول زراعى معين ٠

وتعتبر الأدوات التى يستخدمها الدارسون فى تحليلهم وتقديرهم للعلاقات بين المتغـــــيرات المختلفه التى تحكم بعض الظواهر عديده ، ومن بينها تحليل الانحدار (Regression analysis) وتحليل الارتباط (Correlation analysis) وتحليل التبايـــــــــن (Analysis of variance)

تحليل الانحـــــدار
Regression Analysis

(١) <u>تعريف :</u>

يرتكز تحليل الانحدار على دراسة التوزيع الاحصائى او التوزيع التكرارى (Frequency distribution) لمتغير معين عند مستويات مختلفه لمتغير آخـــر ٠ ومن أمثله ذلك دراســـــــه التوزيع الاحصائى لغله محصول زراعى معين عند استخدام كميات مختلفه من الأسمده ، أو لصلابــــــه

ماده البلاستيك عند معاملتها حراريا لفترات زمنيه مختلفه ، أو للانفاق الاستهلاكى للأسر عند مستويات مختلفه من الدخل المتاح لهذه الأسر .

وبدراسة التوزيع الاحصائى لقيم أحد المتغيرات عند مستويات مختلفه لمتغير آخر ، يمكن التنبوء بقيم هذا المتغير . أى أن الباحثين غالبا مايلجأون الى استخدام قيم أحد المتغيرات فى التقدير أو التنبوء بقيم أحد المتغيرات الأخرى . ويطلق على المتغير الأول " المتغير المستقل Independent variable " وعلى المتغير الآخر " المتغير التابع Dependent variable " لأن قيمه تتحدد على أساس قيم المتغير المستقل .

فاذا فرض مثلا أننا نرغب فى دراسة التوزيع الاحصائى للانفاق الاستهلاكى لمجتمع معين من الأسر بالنسبه للدخول المتاحه لهذه الأسر ، فاننا نقسم هذا المجتمع الى مجموعات على أى يتساوى الدخل المتاح للأسره داخل المجموعه الواحدة . وعلى هذا فانه يوجد توزيع للانفاق الاستهلاكى للأسر المختلفه عند أى مستوى معين من الدخل المتاح ، ويمثل متوسط هذا التوزيع متوسط الانفاق الاستهلاكى لكل الأسر داخل المجموعة .

ويمكن تعريف انحدار الانفاق الاستهلاكى للأسر على الدخل المتاح لهذه الأسر على أنه متوسط توزيع الانفاق الاستهلاكى لكل الأسر التى لها دخل مماثل . ونظرا لأن توزيع الانفاق الاستهلاكى للأسر يعتمد على الدخل المتاح لهذه الأسر ، فان الانفاق الاستهلاكى يشار اليه كمتغير تابع ويرمز له بالحرف (ى) ، بينما يشار الى الدخل المتاح كمتغير مستقل ويرمز له بالحرف (س) . كما نرمز لمتوسط توزيع الانفاق الاستهلاكى (ى) عند مستوى معين من الدخل المتاح (س) بالحرف ($\mu_{ى . س}$) ، ولتباين هذا التوزيع بالحرف ($ت^{٢}_{ى . س}$) . ويعتبر كل من ($\mu_{ى . س}$) ، ($ت^{٢}_{ى . س}$) ثابتا عند مستوى معين من الدخل (س) ولكنهما ربما يختلفان من توزيع لآخر للانفاق الاستهلاكى عند مستويات مختلفه من الدخل .

ونظرا لانه فى كثير من تطبيقات نظرية الانحدار يفترض أن منحنى انحدار المتغير التابع على المتغير المستقل خط مستقيم ، وعلى هذا اذا فرضنا ان العلاقه بين الانفاق الاستهلاكى والدخل المتاح خطيه ، فانه يمكن التعبير عن متوسط التوزيع الاحصائى للانفاق الاستهلاكى عند مستوى معين من الدخل المتاح فى المعادله التالية :

$$\text{U}_{\text{ى . س}} = \text{أ} + \text{ب}\ (\text{س} - \bar{\text{س}}) \qquad (1)$$

حيث أن كل من (أ) ، (ب) يعتبر ثابتا غير معروف Unknown constant

ويطلق عليهما " معاملات الانحدار Regression coefficients "

وتشير (س) الى قيمه الدخل المتاح للأسره ، بينما تشير ($\bar{\text{س}}$) الى متوسط قيم الدخل المتاح لمختلف أسر المجتمع ·

(٢) <u>طريقه المربعات الصغرى</u> Method of least squares

تعتبر قيمه كل من (أ) ، (ب) فى المعادله (١) ثابته مجهوله لأنها قيمه للمجتمع كله ، لذا يلزم لتقدير قيمه كل منهما أن نختار عينه عشوائيه من أسر المجتمع موضع الدراسة ونقسمها الى مجموعات على أن تكون كل الاسر داخل المجموعة الواحده لها دخل مماثل · وعلى هذا يمكن تقدير قيمتى (أ) ، (ب) ، ويرمز للقيمه المقدره (أ) بالحرف ($\hat{\text{أ}}$) والقيمه المقدره (ب) بالحرف ($\hat{\text{ب}}$) · وبالطبع فانه بتقدير كل من ($\hat{\text{أ}}$) ، ($\hat{\text{ب}}$) يمكن تقدير متوسط توزيع الانفاق الاستهلاكى للأسر التى لها دخل مماثل، ويرمز لهذا المتوسط المقدر — الذى يمثل القيمه المقدره للمتوسط $\text{U}_{\text{ى . س}}$ — بالحرف ($\hat{\text{ى}}$) · ويقدر المتوسط ($\hat{\text{ى}}$) طبقا للمعادله التاليـــة :

$$\hat{\text{ى}} = \hat{\text{أ}} + \hat{\text{ب}}\ (\text{س} - \bar{\text{س}}) \qquad (2)$$

ويمكن تقدير قيمه كل من ($\hat{أ}$) ، ($\hat{ب}$) باستخدام طريقه المربعات الصغرى علـــى النحو التالى :

$$\hat{أ} = \frac{مجـ\ ى}{ن} \qquad (٣)$$

$$\hat{ب} = \frac{مجـ\ ى\ (س - \bar{س})}{مجـ\ (س - \bar{س})^{٢}} \qquad (٤)$$

ويلاحظ أن (مجـ) تشير الى المجموع ، أي أن (مجـ ى) تشير الى مجموع قيم (ى) كما يلاحظ أن قيمه البسط فى المعادله (٤) تتساوى مع القيمه التاليه :

$$مجـ ى\ (س - \bar{س}) = مجـ\ س\ ى - \bar{س}\ مجـ\ س$$

$$= مجـ\ س ى - ن\ \bar{س}\ ى$$

$$= مجـ\ س ى - \frac{١}{ن}\ (مجـ\ س)\ (مجـ\ ى)$$

وأن قيمه المقام فى المعادلة (٤) تتساوى مع القيمه التالية :

$$مجـ\ (س - \bar{س})^{٢} = مجـ\ س^{٢} - \frac{١}{ن}\ (مجـ\ س)^{٢}$$

وعلى هذا فان قيمه ($\hat{ب}$) فى المعادله (٤) يمكن التعبير عنها فى الصوره التاليه :

$$\hat{ب} = \frac{مجـ\ س\ ى - \frac{١}{ن}\ (مجـ\ س)\ (مجـ\ ى)}{مجـ\ س^{٢} - \frac{١}{ن}\ (مجـ\ س)^{٢}} \qquad (٥)$$

مثال :

اذا فرض أننا نرغب فى دراسة التوزيع الاحصائى للانفاق الاستهلاكى (ى) لمجتمع معين من الأسر عند مستويات مختلفه من الدخل المتاح (س) ، وأن العلاقه بين الانفاق الاستهلاكى والدخل المتاح خطيه . وأننا اخترنا عينه عشوائيه من أسر المجتمع موضع الدراسة وكانت قيم (ى) ، (س) فى هذه العينه تطابق القيم الافتراضيه المدونه فى الجدول رقم (١) .

جدول رقم (١)

القيم الافتراضيه للدخل المتاح والانفاق الاستهلاكى لعينه عشوائيه من الأسر

قيمه الدخل المتاح للأسرة بالجنيه (س)	قيمه الانفاق الاستهلاكى للأسره بالجنيه (ى)
١٠	٧
١٠	٨
١٢	٩
١٢	١٠
١٢	١١
١٤	١٢
١٤	١١
١٦	١٣
١٦	١٤
١٨	١٥

احسب من هذه القيم قيمتى $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ باستخدام المعادلتين السابقتين (٣) ،(٥) على التوالى .

الحل :

١ـ لتقدير $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ وبالتالى $\hat{ى}$ لابد من تقدير القيم الخمس التاليـــــة :
(مجـ س ، مجـ ى ، مجـ $س^{٢}$ ، مجـ $ى^{٢}$ ، مجـ س ى) ، والتى تقدر كما يتبين فى الجدول رقم (٢)

جدول رقم (٢)

س	ى	$س^{٢}$	$ى^{٢}$	س ى
١٠	٧	١٠٠	٤٩	٧٠
١٠	٨	١٠٠	٦٤	٨٠
١٢	٩	١٤٤	٨١	١٠٨
١٢	١٠	١٤٤	١٠٠	١٢٠
١٢	١١	١٤٤	١٢١	١٣٢
١٤	١٢	١٩٦	١٤٤	١٦٨
١٤	١١	١٩٦	١٢١	١٥٤
١٦	١٣	٢٥٦	١٦٩	٢٠٨
١٦	١٤	٢٥٦	١٩٦	٢٢٤
١٨	١٥	٣٢٤	٢٢٥	٢٧٠
المجموع = ١٣٤	١١٠	١٨٦٠	١٢٧٠	١٥٣٤

٢ـ وباستخدام هذه المجاميع يمكن تقدير كل من $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ على النحو التالى :

$$\hat{\text{أ}} = \frac{\sum \text{ى}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{\text{١١٠}}{\text{١٠}} = \text{١١}$$

$$\hat{\text{ب}} = \frac{\sum \text{س ى} - \frac{\text{١}}{\text{ن}} (\sum \text{س})(\sum \text{ى})}{\sum \text{س}^{\text{٢}} - \frac{\text{١}}{\text{ن}} (\sum \text{س})^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{\text{١٥٣٤} - \frac{\text{١}}{\text{١٠}} (\text{١٣٤})(\text{١١٠})}{\text{١٨٦٠} - \frac{\text{١}}{\text{١٠}} (\text{١٣٤})^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{\text{١٥٣٤} - \frac{\text{١}}{\text{١٠}} (\text{١٤٧٤٠})}{\text{١٨٦٠} - \frac{\text{١}}{\text{١٠}} (\text{١٧٩٥٦})}$$

$$= \text{٠ر٩٣٢}$$

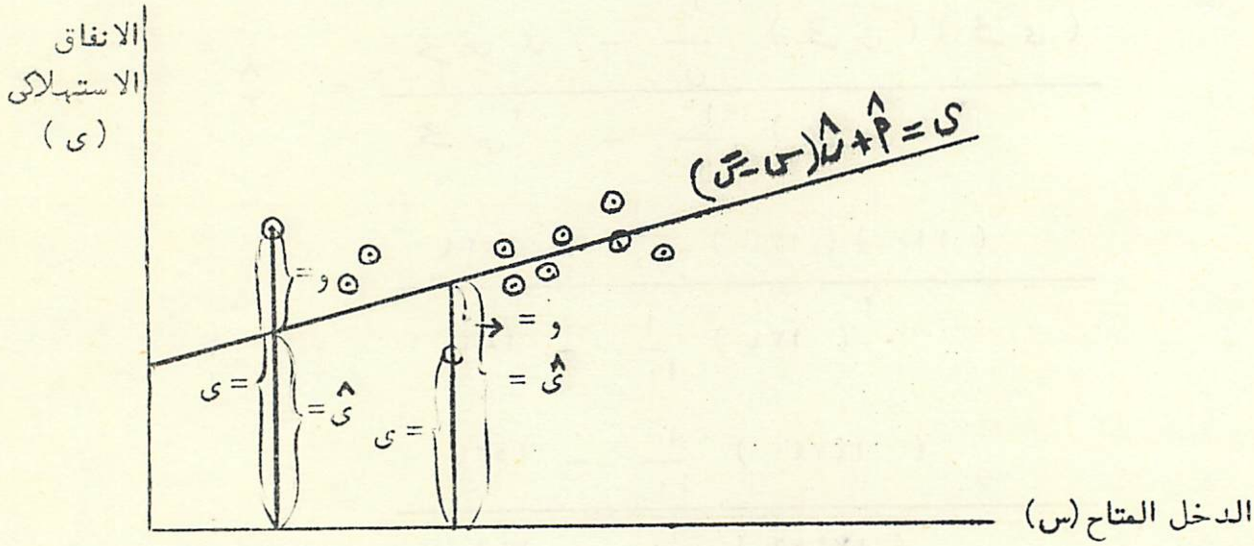
٣ـ وعلى هذا فان قيمه متوسط توزيع الانفاق الاستهلاكى ($\hat{\text{ى}}$) عند مستوى معين من الدخل (س) يقدر كما يلى :

$$\hat{\text{ى}} = \hat{\text{أ}} + \hat{\text{ب}} \; (\text{س} - \bar{\text{س}})$$

$$= \text{١١} + \text{٠ر٩٣٢} \; (\text{س} - \text{١٣ر٤})$$

ويمكن ايضاح القيم المقدرة لمتوسطات التوزيعات التكراريه للانفاق الاستهلاكي للأسر عند مستويات مختلفه من الدخل فى الشكل البيانى رقم (١)

شكل رقم (١)



ويتضح من الشكل البيانى رقم (١) الجوانب التالية :

١ـ أن الخط ($\hat{ى}$ = $\hat{أ}$ + $\hat{ب}$ (س ـ $\bar{س}$) الذى يشير الى خط انحدار الانفاق الاستهلاكى (ى) على الدخل المتاح (س) ، يمثل فى الحقيقه قيم المتوسطات لتوزيعات المتغير التابع (ى) عند مستويات مختلفه من المتغير المستقل (س) ٠

٢ـ انه عند أى نقطه أو مشاهده فى هذا الشكل ، فان المسافه الرأسيه بين هذه النقط أو المشاهدات والمحور الأفقى تشير الى الانفاق الاستهلاكى الفعلى ، بينما تمثل المسافه بين خط الانحدار والمحور الأفقى القيمه المتوسطه للانفاق الاستهلاكى لأسر المجموعه التى لها نفس الدخل ٠ أما المسافه التى بين النقطه او المشاهده وخط الانحدار فتشير الى الانحراف او الفرق بين الانفاق الفعلى والقيمه المتوسطه لتوزيع

الانفاق · وبديهى فان هذا الفرق اما ان يكون موجبا اذا كانت النقطه او المشاهده تقع أعلى خط الانحدار أو سالبا اذا كانت المشاهده تقع أسفل خط الانحدار · ويطلق على هذه الفروق " المتغيرات العشوائيه المستقله The independent ran- dom variables " وهى تعتمد على الفروض الأساسيه التاليه :

أ- أن توزيع هذه المتغيرات معتدل Normal distribution بمتوسط يساوى صفرا وتباين ثابت ومستقل عن قيم المتغير المستقل (س) ·

ب- أن قيمه كل من هذه المتغيرات العشوائيه مستقل عن قيمه المتغير الآخر ·

يتضح مما تقدم أنه بطريقه المربعات الصغرى يمكن تقدير خط الانحدار $\left| \hat{ى} = \hat{أ} + \hat{ب} \right.$ (س - $\bar{س}$)] بحيث يكون مجموع مربعات الانحرافات أو المسافات الرأسيه بين النقط او المشاهدات وهذا الخط أصغر مايمكن · فاذا رمزنا لهذه المسافات الرأسيه والتى تمثل المتغيرات العشوائيه المستقله بالحروف $و_١$ ، $و_٢$ ، $و_٣$ ، ······ ، $و_ن$ ، فانه طبقا لطريقه المربعات الصغرى فان :

$$مجـ \left(و_١ + و_٢ + و_٣ + \cdots\cdots + و_ن \right)$$

يعتبر أصغر ما يمكن ، أو بمعنى آخر فان طريقه المربعات الصغرى المستخدمه فى تقدير قيمتى $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ من العينه ، تؤدى الى أن القيمه التاليه :

$$مجـ \left(ى - \hat{ى} \right)^{٢} = \left[ى - \overbrace{\hat{أ} + \hat{ب} \left(س - \bar{س} \right)}^{\hat{ى}} \right]^{٢} \qquad (٦)$$

تكون أصغر مايمكن ، ويمكن رياضيا تتبع تحديد قيمه كل من $\hat{\text{أ}}$ ، $\hat{\text{ب}}$ والتى تحقق أصــغــر قيمه لمجموع مربعات المسافات بين النقط أو المشاهدات وخط الانحدار المقدر ، بالحصول علــى التفاضل الجزئى لقيم المعادله (٦) بالنسبة ($\hat{\text{أ}}$) ، ($\hat{\text{ب}}$) على التوالى ثم مساواتها بالصفر كما يلى :

$$\text{مج}\ 2\left[\text{ى} - \hat{\text{أ}} - \hat{\text{ب}}\,(\text{س} - \bar{\text{س}})\right](-1) = \text{صفر} \qquad (٧)$$

$$\text{مج}\ -2\left[\text{ى} - \hat{\text{أ}} - \hat{\text{ب}}\,(\text{س} - \bar{\text{س}})\right](\text{س} - \bar{\text{س}}) = \text{صفر} \qquad (٨)$$

أى أن :

$$\text{مج ى} - \text{ن}\,\hat{\text{أ}} - \hat{\text{ب}}\ \overbrace{\text{مج}\,(\text{س} - \bar{\text{س}})}^{\text{صفر}} = \text{صفر} \qquad (٩)$$

$$\text{مج ى}\,(\text{س} - \bar{\text{س}}) - \hat{\text{أ}}\ \overbrace{\text{مج}\,(\text{س} - \bar{\text{س}})}^{\text{صفر}} - \hat{\text{ب}}\ \text{مج}\,(\text{س} - \bar{\text{س}})^2 = \text{صفر} \qquad (١٠)$$

وعلى هذا تقدر كل من ($\hat{\text{أ}}$) ، ($\hat{\text{ب}}$) من المعادلتين (٩) ، (١٠) على التوالى كما يلى :

$$\hat{\text{أ}} = \frac{\text{مج ى}}{\text{ن}} \qquad (١١)$$

$$\hat{\text{ب}} = \frac{\text{مج ى}\,(\text{س} - \bar{\text{س}})}{\text{مج}\,(\text{س} - \bar{\text{س}})^2} \qquad (١٢)$$

وبديهى فان المعادله (١١) تطابق المعادله (٣) ، وأيضا المعادله (١٢) تطابق المعادله (٤) السابق استخدامها فى تقدير ($\hat{\text{أ}}$) ، ($\hat{\text{ب}}$) وبالتالى فى تقديــر $\left[\hat{\text{ى}} = \hat{\text{أ}} + \hat{\text{ب}}\,(\text{س} - \bar{\text{س}})\right]$.

مثال :

اذا فرض أننا نرغب فى دراسة التوزيع الاحصائى للوزن فى مجتمع معين من الاشخاص بالنسبه لأطوال هؤلاء الاشخاص ، وأننا اخترنا عينه عشوائيه حجمها ١٢ شخصا ، وكانت قيم الأوزان والأطوال تطابق القيم الافتراضيه المدونه فى الجدول رقم (٢) .

جدول رقم (٢)

القيم الافتراضيه للأوزان والأطوال لعينه عشوائيه من الاشخاص

الأطوال بالبوصة (س)	الأوزان بالرطل (ى)
٦٠	١١٠
٦٠	١٣٥
٦٠	١٢٠
٦٢	١٢٠
٦٢	١٤٠
٦٢	١٣٠
٦٢	١٣٥
٦٤	١٥٠
٦٤	١٤٥
٧٠	١٧٠
٧٠	١٨٠
٧٠	١٦٠

احسب من هذه القيم ، قيمه كل من $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ ، $\hat{ى}$.

الحل :

١- تقدر الاحصاءات اللازمة لتقدير كل من $\hat{\text{أ}}$ ، $\hat{\text{ب}}$ ، $\hat{\text{ى}}$ على النحو التالي :

$$\text{مجـ س} = ٧٦٦ \qquad \text{مجـ ى} = ١٧٠٠$$

$$\text{مجـ س}^{٢} = ٤٩٠٦٨ \qquad \text{مجـ ى}^{٢} = ٢٤٦١٠٠$$

$$\text{مجـ س ى} = ١٠٩٣٨٠$$

٢- ويقدر كل من متوسط الأطوال ($\bar{\text{س}}$) ومتوسط الاوزان ($\bar{\text{ى}}$) كما يلي :

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{٧٦٦}{١٢} = ٦٣ر٨٣$$

$$\bar{\text{ى}} = \frac{\text{مجـ ى}}{\text{ن}} = \frac{١٧٠٠}{١٢} = ١٤١ر٦٧$$

٣- ويقدر كل من $\hat{\text{أ}}$ ، $\hat{\text{ب}}$ ، $\hat{\text{ى}}$ على النحو التالي :

$$\hat{\text{أ}} = \frac{\text{مجـ ى}}{\text{ن}} = \frac{١٧٠٠}{١٢} = ١٤١ر٦٧$$

$$\hat{\text{ب}} = \frac{\text{مجـ س ى} - \frac{١}{\text{ن}} (\text{مجـ س})(\text{مجـ ى})}{\text{مجـ س}^{٢} - \frac{١}{\text{ن}} (\text{مجـ س})^{٢}}$$

$$= \frac{١٠٩٣٨٠ - \frac{١}{١٢} (٧٦٦)(١٧٠٠)}{٤٩٠٦٨ - \frac{١}{١٢} (٧٦٦)^{٢}}$$

$$= \frac{\text{٨٦٣ر٣٠}}{\text{١٧١ر٦٧}}$$

$$= \text{٥ر٠٢٩}$$

$$\hat{\text{ى}} = \hat{\text{أ}} + \hat{\text{ب}} \left(\text{س} - \bar{\text{س}} \right)$$

$$= \text{١٤١ر٦٧} + \text{٥ر٠٢٩} \left(\text{س} - \text{٨٣ر٦٣} \right)$$

(٣) حدود الثقــه : Confidence limits

وبعد أن قدرنا قيمه كل من $\hat{\text{أ}}$ ، $\hat{\text{ب}}$ ، $\hat{\text{ى}}$ بطريقه المربعات الصغرى ، يجــــدر تقدير حدود الثقه للقيم المجهوله أ ، ب ، ويتطلب هذا تقدير تبايــــن ($\hat{\text{ى}}$) والذى يمكن أن نرمز له ($\hat{\text{ت}}^2_{\text{ى . س}}$) وان نقدره طبقا للمعادله التاليــــة :

$$\hat{\text{ت}}^2_{\text{ى . س}} = \frac{1}{\text{ن} - 2} \sum \left[\text{ى} - \left(\hat{\text{أ}} + \hat{\text{ب}} \left(\text{س} - \bar{\text{س}} \right) \right) \right]^2 \qquad (١٣)$$

ويمكن كتابه هذه المعادله فى الصوره التاليـــــــة :

$$\hat{\text{ت}}^2_{\text{ى . س}} = \frac{\text{ن} - 1}{\text{ن} - 2} \left(\hat{\text{ت}}^2_{\text{ى}} - \hat{\text{ب}}^2 \hat{\text{ت}}^2_{\text{س}} \right) \qquad (١٤)$$

حيث أن :

$\hat{\text{ت}}^2_{\text{ى}}$ تشير الى التباين لقيم المتغير التابع (ى)

$\hat{\text{ت}}^2_{\text{س}}$ تشير الى التباين لقيم المتغير المستقل (س)

وتقدر كل من $\hat{ت}^{2}_{\text{ى}}$ ، $\hat{ت}^{2}_{\text{س}}$ طبقا للمعادلتين التاليتين :

$$\hat{ت}^{2}_{\text{ى}} = \frac{\text{مجـ ى}^{2} - \frac{1}{\text{ن}}\left(\text{مجـ ى}\right)^{2}}{\text{ن} - 1} \qquad (15)$$

$$\hat{ت}^{2}_{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}^{2} - \frac{1}{\text{ن}}\left(\text{مجـ س}\right)^{2}}{\text{ن} - 1} \qquad (16)$$

وباستخدام هذه المعادلات وقيم الأوزان والأطوال فى المثال السابق ، يمكن تقدير $\hat{ت}^{2}_{\text{س}}$ ، $\hat{ت}^{2}_{\text{ى}}$ ، $\hat{ت}^{2}_{\text{ى.س}}$ على النحو التالى :

$$\hat{ت}^{2}_{\text{س}} = \frac{\text{٤٩٠٦٨} - \frac{\text{١}}{\text{١٢}}\left(\text{٧٦٦}\right)^{2}}{}$$

$$= \frac{\text{١٧١ر٦٧}}{\text{١١}} = \text{١٥ر٦١}$$

$$\hat{ت}^{2}_{\text{ى}} = \frac{\text{٢٤٦١٠٠} - \frac{\text{١}}{\text{١٢}}\left(\text{١٧٠٠}\right)^{2}}{\text{١١}}$$

$$= \frac{\text{٥٢٦٦ر٧}}{\text{١١}} = \text{٤٧٨ر٨}$$

$$\hat{\text{ت}}^{٢}_{\text{ى . س}} = \frac{١١}{١٠}\left[٨\text{ر}٤٧٨ - (٠٢٩\text{ر}٥)^{٢}\,(١٥\text{ر}٦١) \right]$$

$$= \frac{١١}{١٠}\left(٨\text{ر}٤٧٨ - ٨\text{ر}٣٩٤ \right)$$

$$= ٩٢\text{ر}٤$$

فاذا افترضنا أن تباين متوسط التوزيع الاحصائى للتغير التابع ($\hat{\text{ت}}^{٢}_{\text{ى . س}}$) ثابت لكل مستويات المتغير المستقل ، وأن انحدار المتغير التابع (ى) على المتغير المستقل (س) خطى وأن توزيع المتغير التابع معتدل ، فانه يمكن تقدير حدود الثقة للقيم أ ، ب ، باستخدام توزيع ت (t - distribution) ودرجات حرية (ن – ٢) ودرجة ثقه معينه ولتكن ٩٠ ٪ على النحو التالى :

$$\hat{\text{أ}} + (\text{ت}_{\alpha/٢})\,\frac{\hat{\text{ت}}_{\text{ى . س}}}{\sqrt{\text{ن} - ١}} < \text{أ} < \hat{\text{أ}} + (\text{ت}_{١-\alpha/٢})\,\frac{\hat{\text{ت}}_{\text{ى . س}}}{\sqrt{\text{ن} - ١}} \qquad (١٧)$$

$$\hat{\text{ب}} + (\text{ت}_{\alpha/٢})\,\frac{\hat{\text{ت}}_{\text{ى . س}}}{\hat{\text{ت}}_{\text{س}}\sqrt{\text{ن} - ١}} \quad \text{ب} \quad \text{ب} + (\text{ت}_{١-١/٢})\,\frac{\text{ت}_{\text{ى . س}}}{\text{ت}_{\text{س}}\sqrt{\text{ن} - ١}} \qquad (١٨)$$

$$\hat{\text{ى}} + (\text{ت}_{\alpha/٢})\,\hat{\text{ت}}_{\text{ى . س}}\sqrt{\frac{١}{\text{ن}} + \frac{(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}}{\hat{\text{ت}}_{\text{س}}(\text{ن} - ١)}} < \mu_{\text{ى . س}} <$$

$$\hat{\text{ى}} + (\text{ت}_{١-\alpha/٢})\,\hat{\text{ت}}_{\text{ى . س}}\sqrt{\frac{١}{\text{ن}} + \frac{(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}}{\hat{\text{ت}}_{\text{س}}(\text{ن} - ١)}} \qquad (١٩)$$

ويمكن فى مثلنا السابق تقدير حدود الثقه لقيمه (أ) باستخدام المعادله (١٧) وبدرجـــات حرية قدرها (١٢ ـ ٢) ودرجه ثقه قدرها (٩٠ ٪) كمايلى

$$\hat{\text{أ}} + (\text{ت}_{٠٫٠٥}) \frac{\hat{\text{ع}}_{\text{س}}}{\sqrt{١٢}} < \text{أ} < \hat{\text{أ}} + (\text{ت}_{٠٫٩٥}) \frac{\hat{\text{ع}}_{\text{س}}}{\sqrt{١٢}}$$

$$١٤١٫٦٧ - (١٫٨١) \frac{٩٫٦١}{٣٫٤٦} < \text{أ} < ١٤١٫٦٧ + (١٫٨١) \frac{٩٫٦١}{٣٫٤٦}$$

$$١٣٦٫٦٤ < \text{أ} < ١٤٦٫٧٠$$

ويلاحظ أن قيمه ت (أى $\text{ت}_{٠٫٠٥}$ ، $\text{ت}_{٠٫٩٥}$) قد استخرجت من جدول ت الذى يمكن ابراز بعض أجزائه فى الجدول رقم (٤)

جدول رقم (٤)

جـــدول (ت)

درجات الحرية	ت ٠ر٩٥	ت ٠ر٩٧٥	ت ٠ر٩٩	ت ٠ر٩٩٥
١	٦ر٣١	١٢ر٧١	٣١ر٨٢	٦٣ر٦٦
٢	٢ر٩٢	٤ر٣٠	٦ر٩٧	٩ر٩٣
٣	٢ر٣٥	٣ر١٨	٤ر٥٤	٥ر٨٤
٤	٢ر١٣	٢ر٧٨	٣ر٧٥	٤ر٦٠
٥	٢ر٠٢	٢ر٥٧	٣ر٣٧	٤ر٠٣
٦	١ر٩٤	٢ر٤٥	٣ر١٤	٣ر٧١
٧	١ر٩٠	٢ر٣٧	٣ر٠٠	٣ر٥٠
٨	١ر٨٦	٢ر٣١	٢ر٩٠	٣ر٣٦
٩	١ر٨٣	٢ر٢٦	٢ر٨٢	٢ر٢٥
١٠	١ر٨١	٢ر٢٣	٢ر٧٦	٣ر١٧
١١	١ر٨٠	٢ر٢٠	٢ر٧٢	٣ر١١
١٢	١ر٧٨	٢ر١٨	٢ر٦٨	٣ر٠٦
١٣	١ر٧٧	٢ر١٦	٢ر٦٥	٣ر٠١
١٤	١ر٧٦	٢ر١٥	٢ر٦٢	٢ر٩٨
١٥	١ر٧٥	٢ر١٣	٢ر٦٠	٢ر٩٥
١٦	١ر٧٥	٢ر١٢	٢ر٥٨	٢ر٩٢
١٧	١ر٧٤	٢ر١١	٢ر٥٧	٢ر٩٠
١٨	١ر٧٣	٢ر١٠	٢ر٥٥	٢ر٨٨
١٩	١ر٧٣	٢ر٠٩	٢ر٥٤	٢ر٨٦
٢٠	١ر٧٢	٢ر٠٩	٢ر٥٣	٢ر٨٥
٣٠	١ر٧٠	٢ر٠٤	٢ر٤٦	٢ر٧٥
٤٠	١ر٦٨	٢ر٠٢	٢ر٤٢	٢ر٧٠
٦٠	١ر٦٧	٢ر٠٠	٢ر٣٩	٢ر٦٦
١٢٠	١ر٦٦	١ر٩٨	٢ر٣٦	٢ر٦٢
	١ر٦٥	١ر٩٦	٢ر٣٣	٢ر٥٧
	ـــت ٠ر٠٥	ـــت ٠ر٠٢٥	ـــت ٠ر٠١	ـــت ٠ر٠٠٥

المصدر:

Helen walker & J. Lev , statistical Inference. Holt, Rinehart and winston, Inc.,1953.

وتشير حدود الثقه لقيمه (أ) بدرجه ثقه قدرها ٩٠٪ ، أى :

١٣٦٫٦٤ > أ > ١٤٦٫٧٠

الى أن : ٩٠٪ من كل العينات التى بنفس الحجم سيكون بها (١٣٦٫٦٤ > أ^ > ١٤٦٫٧٠) .

وتقدر حدود الثقه لقيمه (ب) باستخدام المعادلة (١٨) وبدرجات حريه قدرها (١٢ ـ ٢) ودرجه ثقه قدرها (٩٠٪) كما يلى :

ب^ + (ت٠٫٩٥) (ت^ى.س / (ت^س √(١٢ـ١))) > ب > ب^ + (ت٠٫٩٥) (ت^ى.س / (ت^س √(١٢ ـ ١)))

٢٫٠٢٨ × ١٫٨١ ـ (٩٫٦١ / ١٣٫١) > ب > ٢٫٠٢٨ × ١٫٨١ + (٩٫٦١ / ١٣٫١)

٣٫٧٠ > ب > ٦٫٣٥

وتعنى حدود الثقه لقيمه (ب) بدرجه ثقه قدرها ٩٠٪ ، أى :

٣٫٧٠ > ب > ٦٫٣٥

الى أن : ٩٠٪ من كل العينات التى بنفس الحجم سيكون بها (٣٫٧٠ > ب^ > ٦٫٣٥)

كما تقدر حدود الثقه لقيمه (لى.س) باستخدام المعادله (١٩) وبدرجات حريه

تقديرها (١٢ ـ ٢) ودرجة ثقة قدرها (٩٥٪) على النحو التالى :

$$\hat{ى} + (ت_{٠٫٠٢٥}) \, \hat{ت}_{ى٠س} \sqrt{\frac{١}{١٢} + \frac{(س - \bar{س})^{٢}}{ت_{س} (١٢ - ١)}} < \mu_{ى٠س} <$$

$$\hat{ى} + (ت_{٠٫٩٧٥}) \, \hat{ت}_{ى٠س} \sqrt{\frac{١}{١٢} + \frac{(س - \bar{س})^{٢}}{ت_{س} (١٢ - ١)}}$$

فاذا فرض أن س = ٦٥ ، فان القيمة المقدرة لـ ($\mu_{ى ، ٦٥}$) والتى رمزنا لها ($\hat{ى}$) تبلغ :

$$\hat{ى}_{٦٥} = ١٤١٫٦٧ + ٠٫٥٠٢٩ \, (٦٥ - ٦٣٫٨٣)$$

$$= ١٤٧٫٥٥$$

كما أن حدود الثقة للقيمة $\mu_{ى ، ٦٥}$ تبلغ :

$$١٤٧٫٥٥ - ٢٫٢٣ \, (٩٫٦١) \sqrt{\frac{١}{١٢} + \frac{(٦٥ - ٦٣٫٨٣)^{٢}}{١٥٫٦١ \, (١١)}} < \mu_{ى ، ٦٥} <$$

$$١٤٧٫٥٥ + ٢٫٢٣ \, (٩٫٦١) \sqrt{\frac{١}{١٢} + \frac{(٦٥ - ٦٣٫٨٣)^{٢}}{١٥٫٦١ \, (١١)}}$$

$$١٤٧٫٥٥ - ٢١٫٤ \sqrt{٠٫٠٩١٣} < \mu_{ى ، ٦٥} < ١٤٧٫٥٥ + ٢١٫٤ \sqrt{٠٫٠٩١٣}$$

$$١٤١٫٠٩ < \mu_{ى ، ٦٥} < ١٥٤٫٠١$$

ويعنى هذا أنه بدرجة ثقة قدرها ٩٥ ٪ ، فان متوسط أوزان الأشخاص الذى يبلغ طـــــول كل منهم ٦٥ بوصة ، يقع فيما بين ١٤١ر٠٩ ، ١٥٤ر٠١ رطلا ٠

وبالاضافه الى هــذا فانـــة باستخدام توزيع كا^2/درجات الحرية (χ^2/df- distribution) ودرجات حرية قدرها (ن — ٢) ودرجه ثقه قدرها (٩٠ ٪) يمكن تقدير حدود الثقـــــة للقيمه $\text{ت}^2_{\text{ى . س}}$ طبقا للمعادلة التالية :

$$\frac{\hat{\text{ت}}^2_{\text{ى . س}}}{(\text{كا}^2 / \text{درجات الحرية})_{\alpha/2}} > \text{ت}^2_{\text{ى . س}} > \frac{\hat{\text{ت}}^2_{\text{ى . س}}}{(\text{كا}^2 / \text{درجات الحرية})_{1-\alpha/2}} \qquad (٢٠)$$

أى أن :

$$\frac{\text{٩٢ر٤}}{\text{٠ر٣٩٤}} > \text{ت}^2_{\text{ى . س}} > \frac{\text{٩٢ر٤}}{\text{١ر٨٣}}$$

$$\text{٢٣٥} > \text{ت}^2_{\text{ى . س}} > \text{٥٠ر٥}$$

ويلاحظ أن قيم (كا^2/ درجات الحريه) فى المعادله (٢٠) ، قد استخرجت من جــــدول توزيع كا^2/ درجات الحريه الذى يمكن ابراز بعض أجزائه فى الجدول رقم (٥) ٠

وتشير حدود الثقه لقيمه $\text{ت}^2_{\text{ى . س}}$ وبدرجه ثقه قدرها ٩٠ ٪ ، أى :

$$٥٠ر٥ < ت^{٢}_{ى . س} < ٢٣٥$$

الى أن : ٩٠٪ من العينات التى بنفس الحجم ستكون بها ($٥٠ر٥ < \hat{ت}^{٢}_{ى . س} < ٢٣٥$)

جدول (٥)

جدول كا^{٢} / درجات الحرية

درجات الحريه	كا^{٢} / درجات الحرية			
	٢ ر ٥	٥ ر ٠	٩٥ ر٠	٩٧ ر ٥
٢	٠ر٠٣	٠ر٠٥	٣ر٠٠	٣ر٦٩
٣	٠ر٠٧	٠ر١٢	٢ر٦٠	٣ر١٢
٤	٠ر١٢	٠ر١٨	٢ر٣٧	٢ر٧٩
٥	٠ر١٧	٠ر٢٣	٢ر٢١	٢ر٥٧
٦	٠ر٢١	٠ر٢٧	٢ر١٠	٢ر٤١
٧	٠ر٢٤	٠ر٣١	٢ر٠١	٢ر٢٩
٨	٠ر٢٧	٠ر٣٤	١ر٩٤	٢ر١٩
٩	٠ر٣٠	٠ر٣٧	١ر٨٨	٢ر١١
١٠	٠ر٣٣	٠ر٣٩	١ر٨٣	٢ر٠٥
١١	٠ر٣٥	٠ر٤٢	١ر٨٩	١ر٩٩
١٢	٠ر٣٧	٠ر٤٤	١ر٧٥	١ر٩٤
١٣	٠ر٣٨	٠ر٤٥	١ر٧٢	١ر٩٠
١٤	٠ر٤٠	٠ر٤٧	١ر٦٩	١ر٨٧
١٥	٠ر٤٢	٠ر٤٨	١ر٦٧	١ر٨٣
١٦	٠ر٤٣	٠ر٥٠	١ر٦٤	١ر٨٠
١٧	٠ر٤٥	٠ر٥١	١ر٦٢	١ر٧٨
١٨	٠ر٤٦	٠ر٥٢	١ر٦٠	١ر٧٥
١٩	٠ر٤٧	٠ر٥٣	١ر٥٩	١ر٧٣
٢٠	٠ر٤٨	٠ر٥٤	١ر٥٧	١ر٧١

المصدر : نفس المرجع السابق

(٤) اختبار استقلال (ى) عن (س) Test of independence

يعتبر اختبار استقلال المتغير التابع (ى) عن المتغير المستقل (س) من الاختبارات الشائعه فى تحليل الانحدار . كما يعتبر اختبار الافتراض بأن متوسطات قيم (ى) عند القيم المختلفه للمتغير المستقل (س) متساوية ، أحد المعايير لقياس استقلال (ى) عن (س) . ويعنى هذا الافتراض فى حاله الانحدار الخطى بأن ب = صفر .

وعلى هذا فانه عند قبول افتراض ب = صفر ، فهذا يعنى أن المتغير (ى) مستقل عن المتغير (س) ، وعلى العكس عند عدم قبول الافتراض ب = صفر فهذا يعنى أن المتغير (ى) يعتمد على المتغير (س) .

ويتم اختبار الافتراض بأن ب = صفر على أساس أن توزيعات المتغير التابع (ى) للقيم المختلفه للمتغير المستقل (سَ) معتدله وأن متوسطات هذه التوزيعات متساويه وأن تبايناتها متساوية ، باستخدام القيمه التاليـــة :

$$\text{ت} = \frac{(\hat{\text{ب}} - \text{صفر})\ \hat{\text{ت}}_{\text{س}} \sqrt{\text{ن} - ١}}{\hat{\text{ت}}_{\text{ى . س}}}$$

التى تتبع توزيع ت (t- distribution) بدرجات حرية (ن – ٢) ، على أن نرفض الافتراض (ب = صفر) اذا كانت :

$$\frac{(\hat{\text{ب}} - \text{صفر})\ \hat{\text{ت}}_{\text{س}} \sqrt{\text{ن} - ١}}{\hat{\text{ت}}_{\text{ى . س}}}$$

التى تتبع توزيع ت (t - distribution) بدرجات حريه (ن ـ ٢) ،

على أن نرفض الافتراض (ب = صفر) اذا كانت :

$$\underset{\alpha\frac{1}{2}}{\text{ت}}\ (\text{ن} - ٢) > \frac{(\hat{\text{ب}} - \text{صفر})\ \hat{\text{ت}}_{\text{س}}\sqrt{\text{ن} - ١}}{\hat{\text{ت}}_{\text{ى.س}}}$$

أو كانـت :

$$\underset{١ - \alpha\frac{1}{2}}{\text{ت}}\ (\text{ن} - ٢) < \frac{(\hat{\text{ب}} - \text{صفر})\ \hat{\text{ت}}_{\text{س}}\sqrt{\text{ن} - ١}}{\hat{\text{ت}}_{\text{ى.س}}}$$

ويمكن اجراء اختبار استقلال المتغير (ى) عن المتغير (س) فى مثلنا السابق الخـــــــــــاص بأوزان وأطوال الأشخاص على أساس درجة معنوية قدرها ٥ ٪ على النحو التالى :

١ ـ نظرا لأن :

$$\frac{(\hat{\text{ب}} - \text{صفر})\ \hat{\text{ت}}_{\text{س}}\sqrt{\text{ن} - ١}}{\hat{\text{ت}}_{\text{ى.س}}}$$

$$= \frac{٠٢٩\text{ر}٥ - \text{صفر}\ (١٣\text{ر}١)}{٦١\text{ر}٩}$$

$$= ٩\text{ر}٦$$

٢ـ وأن :

من جدول توزيع ت بدرجات حرية (ن ـ ٢) تبلغ ـ ٢٣ر٢ ·

$\text{ت}_{\text{٠٢٥ر٠}}$

$\text{ت}_{\text{٩٧٥ر٠}}$ " " " " " " تبلغ ٢٣ر٢

٣ـ أى أن :

$$\frac{(\hat{\text{ب}} - \text{صفر})\ \hat{\text{ع}}_{\text{س}} \sqrt{\text{ن} - ١}}{\hat{\text{ع}}_{\text{ى.س}}} > \text{ت}_{\text{٩٧٥ر٠}}$$

٤ـ وعلى هذا فاننا لا نسلم بقبول الأفتراض ب = صفر ، أى الافتراض باستقلال أوزان الاشخاص (ى) عن أطوالهم (س) ، وذلك عند درجه معنويه قدرها ٥٪ ·

تحليل الارتباط البسيط

Simple Correlation Analysis

(١) تعريف :

اتضح فيما سبق أن تحليل الانحدار يعتمد على دراسة التوزيع الاحصائى أو التكرارى لقيم أحد المتغيرات عند مستويات ثابته معينه لقيم متغير آخر ، كدراسة التوزيع الاحصائى لأوزان الأشخاص عند مستويات معينه وثابته لأطوال هوءلاء الأشخاص ·

أما تحليل الارتباط فانه يعتمد على دراسة العلاقه بين تغير كل من المتغيرين، كدراسة العلاقه بين تغير كل من أوزان وأطوال الأشخاص · لهذا فان العلاقه بين تغير قيم أحد المتغيرين وتغير قيم المتغير الآخر فى نفس الاتجاه أو فى الاتجاه المضاد ، يطلق عليها الارتباط

بين المتغيرين · فان كان تغير قيم المتغيرين فى نفس الاتجاه ، فان الارتباط يعتبر طرديـــا أو موجبا أى أكبر من الصفر ، أما اذا كان تغير المتغيرين فى اتجاه مضاد فيعتبر عكسيا أو سالبــا أى أقل من الصفر ·

(٢) معامل الارتباط Correlation coefficient

يمكن قياس العلاقه بين متغيرين بأحد المعايير الذى يسمى " معامل الارتباط الخطــى البسيط " والذى غالبا مايرمز له بالحرف (ر) ، فاذا فرض أن العلاقه بين المتغيرين (س ، ى) خطيه ، فانه يمكن تقدير معامل الارتباط (ى) بين هذين المتغيرين طبقا للمعادله التاليه :

$$\text{ر} = \frac{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})(\text{ى} - \bar{\text{ى}})}{\sqrt{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})^2 \sum (\text{ى} - \bar{\text{ى}})^2}} \qquad (٢١)$$

$$= \frac{\text{ن} \sum \text{س ى} - (\sum \text{س})(\sum \text{ى})}{\sqrt{\left[\text{ن} \sum \text{س}^2 - (\sum \text{س})^2\right]\left[\text{ن} \sum \text{ى}^2 - (\sum \text{ى})^2\right]}} \qquad (٢٢)$$

وتعتبر الصوره الأخيره (٢٢) أبسط من الوجهه الحسابيه عن الصوره (٢١) ، نظـــرا لأن كل قيمها تقدرّ عند حساب معامل الانحدار ($\hat{\text{ب}}$) ·

مثال :

باستخدام القيم الافتراضيه التاليه للمتغيرين (س ، ى) والتى تمثل الدرجات التى حصــل عليها عشره طلاب فى مادتى الرياضة والاحصاء ، أوجد معامل الارتباط الخطى البسيط بين هذيــن المتغيرين ·

جدول رقم (٦)

القيم الافتراضيه لدرجات الرياضه والاحصاء التى حصل عليها عشرة طلاب

درجات الرياضـــــه (س)	درجات الاحصـــاء (ى)
٣٩	٦٥
٤٣	٧٨
٢١	٥٢
٦٤	٨٢
٥٧	٩٢
٤٧	٨٩
٢٨	٧٣
٧٥	٩٨
٣٤	٥٦
٥٢	٧٥

الحل :

١ــ تقدر القيم مجـ س ، مجـ ى ، مجـ $س^{٢}$ ، مجـ $س^{٢}$ ،

مجـ س ى كما يتبين فى الجدول رقم (٧)

جدول رقم (٧)

س	ى	س٢	ى٢	س ى
٣٩	٦٥	١٥٢١	٤٢٢٥	٢٥٣٥
٤٣	٧٨	١٨٤٩	٦٠٨٤	٣٣٥٤
٢١	٥٢	٤٤١	٢٧٠٤	١٠٩٤
٦٤	٨٢	٤٠٩٦	٦٧٢٤	٥٢٤٨
٥٧	٩٢	٣٢٤٩	٣٤٦٤	٥٢٤٤
٤٧	٨٩	٢٢٠٩	٧٩٢١	٤١٨٣
٢٨	٧٣	٧٨٤	٥٣٢٩	٢٠٤٤
٧٥	٩٨	٥٦٢٥	٩٦٠٤	٧٣٥٠
٣٤	٥٦	١١٥٦	٣١٣٦	١٩٠٤
٥٢	٧٥	٢٧٠٤	٥٦٢٥	٣٩٠٠
المجموع =				
٤٦٠	٧٦٠	٢٣٦٣٤	٥٩٨١٦	٣٦٨٥٤

٢ـ بالتعويض عن مكونات المعادله رقم (٢٢) بقيم الجدول رقم (٧) ، يمكن تحديد قيمـــــــــه معامل الارتباط (ر) بين درجات الرياضه (س) ودرجات الاحصاء (ى) كما يلى :

$$\text{ر} = \frac{\text{١٠}\,(\text{٣٦٨٥٤}) - (\text{٤٦٠})(\text{٧٦٠})}{\sqrt{\left[\text{١٠}\,(\text{٢٣٦٣٤}) - (\text{٤٦٠})^{\text{٢}}\right]\left[\text{١٠}\,(\text{٥٩٨١٦}) - (\text{٧٦٠})^{\text{٢}}\right]}}$$

$$= \frac{\text{١٨٩٤٠}}{\sqrt{(\text{٢٤٧٤٠})(\text{٢٠٥٦٠})}}$$

$$= \text{٠٫٨٤}$$

وجدير بالملاحظة أنه بدراسة المعادلتين التاليتين :

$$\hat{\text{ب}} = \frac{\text{ن}\,(\text{مجـ س ى}) - (\text{مجـ س})(\text{مجـ ى})}{\text{ن مجـ س}^{\text{٢}} - (\text{مجـ س})^{\text{٢}}}$$

$$\text{ر} = \frac{\text{ن}\,(\text{مجـ س ى}) - (\text{مجـ س})(\text{مجـ ى})}{\sqrt{\left[\text{ن مجـ س}^{\text{٢}} - (\text{مجـ س})^{\text{٢}}\right]\left[\text{ن مجـ ى}^{\text{٢}} - (\text{مجـ ى})^{\text{٢}}\right]}}$$

تتضح الحقائق الآتيـــــه :

١ـ ان المقام المستخدم فى تقدير كل من معامل الانحدار ($\hat{\text{ب}}$) ومعامل الارتباط (ر) ، يكــون دائما موجبا نظرا لأن كل من المقامين يمثل مجموع مربعات قيم (س) ، (ى) .

٢ـ أن البسط المستخدم فى تقدير معامل الانحدار ، هو نفس البسط المستخدم فى تقديــر معامل الارتباط ، لهذا فان :

أ- اشارة معامل الارتباط تطابق اشارة معامل الانحدار ، أى اذا كان معامل الانحدار موجبا فان معامل الارتباط يكون موجبا والعكس صحيح .

ب- يبلغ معامل الارتباط الصفر عندما يبلغ معامل الانحدار صفرا .
وعلى هذا فان (ر = صفر) تعنى عدم وجود علاقه خطيه بين المتغيرين (س) ، (ى) ، أما أن (ر > صفر) فيعنى أن خط الانحدار يميل الى أعلى ولليمين ، وعلى العكس فان (ر < صفر) يعنى أن خط الانحدار يميل الى أسفل ولليسار .

٣- وعموما فانه يمكن ايجاز السمات الرئيسيه لمعامل الارتباط (ر) فى النقاط التالية :

أ- ان $-1 \leq ر \leq +1$ ، أى أن قيمه معامل الارتباط تقع مابين (-١) ،(+١) . ولايضاح ذلك نستعين بالمعادله الآتية :

$$ر = \pm \sqrt{1 - \frac{\hat{ت}^{2}_{ى.س}}{\hat{ت}^{2}_{ى}}}$$

ونظرا الى أن قيمه ($\hat{ت}_{ى.س}$) لا تزيد عن قيمه ($\hat{ت}_{ى}$) ، فان قيمه ($\frac{\hat{ت}^{2}_{ى.س}}{\hat{ت}^{2}_{ى}}$) لا تزيد عن واحد صحيح . وعلى هذا فان قيمه معامل الارتباط تبلغ أقصاها عندما تقع كل النقط او المشاهدات على خط الانحدار حيث تكون ($\hat{ت}_{ى.س}$ = صفر) ، أى أن :

($\frac{\hat{ت}^{2}_{ى.س}}{\hat{ت}^{2}_{ى}}$ = صفر) وبالتالى فان ($ر = \pm 1$) كما يلى :

$$\text{ر} = \pm \sqrt{1 - \frac{\hat{\text{ت}}^{2}_{\text{ى . س}}}{\hat{\text{ت}}^{2}_{\text{ى}}}}$$

$$= \pm \sqrt{1 - \text{صفر}}$$

$$= \pm 1$$

ب — أن معامل الارتباط (ر) يمكن تقديره بضرب قيمه معامل الانحدار فى مقسوم الانحراف المعيارى للمتغير المستقل ($\hat{\text{ت}}_{\text{س}}$) على الانحراف المعيارى للمتغير التابع ($\hat{\text{ت}}_{\text{ى}}$) ، أى أن :

$$\text{ر} = \hat{\text{ب}} \; \frac{\hat{\text{ت}}_{\text{س}}}{\hat{\text{ت}}_{\text{ى}}}$$

وتؤكد هذه المعادلة الحقيقه بأن معامل الارتباط يساوى صفرا عندما يكون معامل الانحدار يساوى صفراً ، وبأن معامل الارتباط يأخذ دائما اشارة معامل الانحدار . وينبغى الاشارة الى أن قيمه الصفر لمعامل الارتباط (ر = صفر) بين المتغيرين (س) ، (ى) لا تعنى عدم وجود أى علاقه بين هذين المتغيرين ولكن تعنى فقط عدم وجود علاقـه خطية بينهما .

حـ — وبصفه عامة فان قيمه معامل الارتباط تقترب من ($\pm$ ١) عندما تقع النقط أو المشاهدات لقيم المتغيرين قريبة من خط الانحدار المقدر ، ولكنها تقترب من الصفر عندما تبتعـد هذه النقط عن خط الانحدار المقدر . كما أن قيمه معامل الارتباط تقترب من (+ ١) عندما يتقابل الترتيب التنازلى أو التصاعدى لقيم أحد المتغيرين بالترتيب التنازلى أو التصاعـدى لقيم المتغير الآخر ، وعلى العكس فأن قيمه معامل الارتباط تقترب من (— ١) عندما يتقابل الترتيب التنازلى أو التصاعدى لقيم أحد المتغيرين الترتيب التصاعدى أو التنازلـى

لقيم المتغير الآخــــــــر ٠

(٣) **معامل التحديد :** Coefficient of determination

يشير معامل التحديد ($ر^٢$) الى مربع معامل الارتباط ، فعلى أساس المعادلات التى سبق استخدامها فى تقدير معامل الارتباط ، فان المعادله التالية تمثل قيمة معامل التحديد :

$$ر^{٢} = ١ - \frac{\hat{ت}^{٢}_{ى.س}}{\hat{ت}^{٢}_{ى}} \qquad (٢٣)$$

فاذا فرض مثلا أن قيمه معامل الارتباط (ر) بين أوزان الأشخاص (ى) وأطوالهم (س) تبلغ ٦ ر ٠ ، فبديهى فان قيمه معامل التحديد ($ر^٢$) تبلغ ٣٦ ر٠ ٠ وتشير هــــــذه القيمة لمعامل التحديد الى أن ٣٦ ٪ من تباين أوزان الأشخاص أمكن ايضاحه فى ضوء أطوالهــم . أى أن ٣٦ ٪ من تباين الأوزان امكن تحديده طبقا للأطوال ٠ لهذا يطلق على ($ر^٢$) بمعامل التحديد ٠

وقد يعرف معامل التحديد ($ر^٢$) على أنه القدر من المجموع الكلى لمربعات انحرافــات المتغير التابع (ى) الذى أمكن ايضاحه بالانحدار الخطى على المتغير المستقل (س)، ولايضاح هذا التعريف نستعين بالمعادلة التالية :

$$\text{مجـ}\,(ى - \bar{ى})^{٢} = \text{مجـ}\,(ى - \hat{ى})^{٢} + \text{مجـ}\,(\hat{ى} - \bar{ى})^{٢} \qquad (٢٤)$$

حيث أن :

ى = أى قيمه للمتغير التابع

$\bar{ى}$ = متوسط قيم المتغير التابع

$\hat{ى}$ = متوسط التوزيع الاحصائى للمتغير التابع باستخدام طريقه المربعات الصغرى ٠

وعلى هذا فان :

$\text{مجـ} (ى - \bar{ى})^{٢}$ = المجموع الكلى لمربعات انحرافات قيم المتغير التابع عن متوسط هذه القيم .

$\text{مجـ} (ى - \hat{ى})^{٢}$ = مجموع مربعات الخطأ ، أى مجموع مربعات الانحرافات التى ترجع للخطأ .

$\text{مجـ} (\hat{ى} - \bar{ى})^{٢}$ = مجموع مربعات الانحدار ، أى مجموع مربعات الانحرافات التى ترجع للانحدار .

ويمكن من المعادلة رقم (٢٤) ابراز معامل التحديد ($ر^{٢}$) فى الصورة التالية :

$$ر^{٢} = \frac{\text{مجـ} (\hat{ى} - \bar{ى})^{٢}}{\text{مجـ} (ى - \bar{ى})^{٢}}$$

وبالطبع فان هذا يشير الى ذلك الجزء من التباين الذى أمكن ايضاحه بمعادله الانحدار الخطى ، أما الجزء الذى لم يمكن ايضاحه ، أى (١ - $ر^{٢}$) ، فانه يمكن ابرازه من المعادله (٢٤) فى الصوره التاليه :

$$١ - ر^{٢} = \frac{\text{مجـ} (ى - \hat{ى})^{٢}}{\text{مجـ} (ى - \bar{ى})^{٢}} \qquad (٢٦)$$

مثال :

باستخدام القيم الافتراضيه للمتغيرين (س) ، (ى) المدونه فى الجدول رقم (٨) ، وبالاستعانه بالمعادله رقم (٢٥) ، احسب قيمه معامل التحديد ($ر^{٢}$) .

الجدول رقم (٨)

قيم (س)	قيم (ى)
٢	٣ر٩
٢	١ر٣
٤	٢ر٧
٤	٤ر٤
٤	٤ر٥
٥	٢ر٦
٥	٥ر٣
٦	٥ر٨
٦	٢ر٨
٨	٦ر١

الحل :

١ـ تقدر القيم مجـ س ، مجـ $س^٢$ ، مجـ ى ، مجـ $ى^٢$ ، مجـ س ى

والتى تبلغ :

مجـ س = ٤٦ مجـ ى = ٣٩ر٤٠

مجـ $س^٢$ = ٢٤٢ مجـ $ى^٢$ = ١٧٧ر٣٥

مجـ س ى = ١٨٦ر٧٠

٢ـ تقدر قيمه $\hat{أ}$ والتى تبلغ :

$$\hat{أ} = \frac{\text{مجـ ى}}{\text{ن}} = \frac{٣٩٫٤}{١٠} = ٣٫٩٤$$

٣ـ تقدر قيمه $\hat{ب}$ والتى تبلغ :

$$\hat{ب} = \frac{\text{ن مجـ س ى} - (\text{مجـ س})(\text{مجـ ى})}{\text{ن مجـ س}^٢ - (\text{مجـ س})^٢}$$

$$= \frac{١٠\ (١٩٦٫٧) - (٤٦)(٣٩٫٤)}{١٠\ (٢٤٢) - (٤٦)^٢}$$

$$= ٠٫٥١٠$$

٤ـ تقدر القيم المختلفه لـ ($\hat{ى}$) عند المستويات المختلفه للمتغير (س) طبقـــا للمعادله $\left[\hat{ى} = \hat{أ} + \hat{ب}\ (س - \bar{س})\right]$ ، أى طبقـــا للمعادله $\left[\hat{ى} = ٣٫٩٤ + ٠٫٥١٠\ (س - ٤٫٦)\right]$ ، وتدون فـــــى الجدول التالى :

جدول رقم (٩)

قيم (س)	قيم (ى)	قيم (ى̂)
٢	٣ر٩	٢ر٦١
٢	١ر٣	٢ر٦١
٤	٢ر٧	٣ر٦٣
٤	٤ر٤	٣ر٦٣
٤	٤ر٥	٣ر٦٣
٥	٢ر٦	٤ر١٤
٥	٥ر٣	٤ر١٤
٦	٥ر٨	٤ر٦٥
٦	٢ر٨	٤ر٦٥
٨	١ر٦	٥ر٦٧

٥ ـ تقدر قيم مجـ (ى ــ ى̄)٢ ، مجـ (ى ــ ى̂)٢ ، مجـ (ى̂ ــ ى̄)٢
بالاستعانه بالقيم المدونه فى الجدول رقم (٩) وبمعرفه أن (ى̄ = ٣ر٩٤) ،
على النحو التالى :

$$\text{مجـ}\,(\text{ى} - \bar{\text{ى}})^{٢} = (٣٫٩٠ - ٣٫٩٤)^{٢} + (١٫٣ - ٣٫٩٤)^{٢} +$$

$$+ (٢٫٧٠ - ٣٫٩٤)^{٢} + \ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$(٦٫١٠ - ٣٫٩٤)^{٢}$$

$$= ٢٢٫١$$

$$\text{مجـ}\,(\text{ى} - \hat{\text{ى}})^{٢} = (٣٫٩٠ - ٢٫٦١)^{٢} + (١٫٣٠ - ٢٫٦١)^{٢} +$$

$$+ (٢٫٧٠ - ٣٫٦٣)^{٢} + \ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$(٦٫١٠ - ٥٫٦٧)^{٢}$$

$$= ١٤٫٢٤$$

$$\text{مجـ}\,(\hat{\text{ى}} - \bar{\text{ى}})^{٢} = (٢٫٦١ - ٣٫٩٤)^{٢} + (٢٫٦١ - ٣٫٩٤)^{٢} +$$

$$+ (٣٫٦٣ - ٣٫٩٤)^{٢} + \ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$(٥٫٦٧ - ٣٫٩٤)^{٢}$$

$$= ٧٫٩١$$

٦ـ وعلى هذا فان معامل التحديد ($\text{ر}^{٢}$) يقدر كما يلى :

$$\text{ر}^{٢} = \frac{\text{مجـ}\,(\hat{\text{ى}} - \bar{\text{ى}})^{٢}}{\text{مجـ}\,(\text{ى} - \bar{\text{ى}})^{٢}}$$

$$= \frac{٧٫٩١}{٢٢٫١}$$

$$= ٠٫٣٥٧$$

ويعنى هذا أن ٩ ر ٤٠ ٪ من المجموع الكلى لمربعات انحرافات المتغير التابع (ى) أمكـن ايضاحه بواسطه الاثر الخطى (Regression effect) للمتغير (س) ٠

تحليل التبايـــــن

Analysis Of Variance

============

(١) تعريف :

يقوم الباحثون في مجال البحوث التجريبيه خصوصا فى مجال التجارب الزراعيه باجـــــــراء تجارب على مجتمع معين من المفردات ، بأن يعالج بمعالجات (Treatments) مختلفه بغرض معرفه أثر هذه المعالجات على سمة معينه لهذا المجتمع ، فمثلا قد يستخدم البا حثـــون أنواعا مختلفه من السماد أو أصنافا مختلفه من التقاوى فى انتاج محصول زراعى معين بقصد معرفـــــة أثر أنواع السماد أو أصناف التقاوى على غله المحصول ٠

وتعتبر طريقه تحليل التباين احدى الطرق الأساسيه المستخدمة فى دراسة أثر أحد أو بعض المتغيرات على سمة معينه لمجتمع معين ٠ وقد يقتصر تحليل التباين على دراسة أثر أحد المتغيرات كدراســـــة أثر نوع السماد أو صنف التقاوى على غله المحصول ، ويطلق على هذا " تصنيف متغير واحـــــــــد ("One- variable classification) ، أو يتجه الى دراسة الاثر المشترك (Joint effect) لمتغيرين ، ويطلق على هذا " تصنيـــف متغيرين "Two - variable classification ٠

(٢) تصنيف المتغير الواحد One- variable classification

نفترض أن لدينا ثلاث معالجات ولنرمز لها بالحروف أ ، ب ، حـ ، وأننا اخترنـــــا

عشوائيا خمس مشاهدات لكل معالجه ـ ولنرمز لهذه المشاهدات بالحروف المدونه فى الجـــــدول رقم (١٠) ـ بقصد معرفه أثر هذه المعالجات ؟

جدول رقـــم (١٠)

	المعالجـــــــات			
	أ	ب	ح	
	س أ ١	س ب ١	س ح ١	
	س أ ٢	س ب ٢	س ح ٢	
	س أ ٣	س ب ٣	س ح ٣	
	س أ ٤	س ب ٤	س ح ٤	
	س أ ٥	س ب ٥	س ح ٤	
المجموع	س أ +	س ب +	س ح +	المجموع العام س ++
المتوسط	س̄ أ +	س̄ ب +	س ح +	المتوسط العام س̄ ++

حيث أن :

$س_{أ+}$ = مجموع قيم مشاهدات المعالجة (أ)

= $س_{أ١} + س_{أ٢} + س_{أ٣} + س_{أ٤} + س_{أ٥}$

$س_{ب+}$ = مجموع قيم مشاهدات المعالجه (ب)

= $س_{ب١} + س_{ب٢} + س_{ب٣} + س_{ب٤} + س_{ب٥}$

$س_{ح+}$ = مجموع قيم مشاهدات المعالجه (ح)

= $س_{ح١} + س_{ح٢} + س_{ح٣} + س_{ح٤} + س_{ح٥}$

$س_{++}$ = المجموع العام لقيم مشاهدات كل المعالجات

= $س_{أ+} + س_{ب+} + س_{ح+}$

$\bar{س}_{أ+}$ = متوسط قيم مشا هدات المعالجة (أ)

= $\frac{س_{أ+}}{ن_{أ}}$ ، حيث $ن_{أ}$ تساوى عدد مشاهدات المعالجة (أ) .

$\bar{س}_{ب+}$ = متوسط قيم مشا هدات المعالجة (ب)

= $\frac{س_{ب+}}{ن_{ب}}$ ، حيث $ن_{ب}$ تسا وى عدد مشاهدات المعالجه (ب)

$\bar{س}_{ح+}$ = متوسط قيم مشاهدات المعالجه (ح)

= $\frac{س_{ح+}}{ن_{ح}}$ ، حيث $ن_{ح}$ تسا وى عدد مشاهدات المعالجة (ح)

$\bar{\text{س}}_{++}$ = المتوسط العام لقيم مشاهدات كل المعالجات .

$$= \frac{\text{س}_{++}}{\text{ن}}$$ ، حيث ن تساوى عدد مشاهدات كل المعالجـات .

وجدير بالاشاره الى اننا نختبر أثر هذه المعالجات من خلال الاختبار بافتراض عدم وجود فروق بيـن متوسطات المعالجات المختلفه ، ويتطلب الأمر تقدير التباين العام للمجتمع موضع الدراسة ، ويمكـن تقدير التباين العام من خلال الطريقتين التاليتين :

١ـ عن طريق التقدير المتجمع (Pooled estimate) للتباين ، الذى نرمز لـه بـ ($\hat{\text{ت}}^{٢}_{\text{و}}$) ، ويمكن تقديره كما يلى :

$$\hat{\text{ت}}^{٢}_{\text{و}} = \frac{\text{مجـ}\,(\text{س}_{\text{أ}\times} - \bar{\text{س}}_{\text{أ}+})^{٢} + (\text{س}_{\text{ب}\times} - \bar{\text{س}}_{\text{ب}+})^{٢} + (\text{س}_{\text{ح}\times} - \bar{\text{س}}_{\text{ح}+})^{٢}}{\text{ن}_{\text{أ}} + \text{ن}_{\text{ب}} + \text{ن}_{\text{ح}} - ٣}$$

$$= \frac{\text{مجـ}\,\text{س}^{٢}_{\text{أ}\times} - \frac{(\text{مجـ}\,\text{س}_{\text{أ}\times})^{٢}}{\text{ن}_{\text{أ}}} + \text{مجـ}\,\text{س}^{٢}_{\text{ب}\times} - \frac{(\text{مجـ}\,\text{س}_{\text{ب}\times})^{٢}}{\text{ن}_{\text{ب}}} + \text{مجـ}\,\text{س}^{٢}_{\text{ح}\times} - \frac{(\text{مجـ}\,\text{س}_{\text{ح}\times})^{٢}}{\text{ن}_{\text{ح}}}}{\text{ن}_{\text{أ}} + \text{ن}_{\text{ب}} + \text{ن}_{\text{ح}} - ٣}$$

$$= \frac{\text{مجـ}\,\text{س}^{٢}_{\times\times} - \left[\frac{\text{س}^{٢}_{\text{أ}+}}{\text{ن}_{\text{أ}}} + \frac{\text{س}^{٢}_{\text{ب}+}}{\text{ن}_{\text{ب}}} + \frac{\text{س}^{٢}_{\text{ح}+}}{\text{ن}_{\text{ح}}}\right]}{\text{مجـ}\,\text{ن}_{\times} - ٣}$$

$$= \frac{\sum \text{س}_{\times\times}^{2} - \sum \frac{\text{س}_{\times +}^{2}}{\text{ن}_{\times}}}{\sum \text{ن}_{\times} - ٣} \qquad (٢٧)$$

حيث أن :

$\text{س}_{\text{أ}\times}$ = قيمه أى مشاهدة للمعالجه (أ)

$\text{س}_{\text{ب}\times}$ = قيمه أى مشاهده للمعالجه (ب)

$\text{س}_{\text{حـ}\times}$ = قيمه أى مشاهده للمعالجه (حـ)

$\text{س}_{\times\times}$ = قيمة أى مشاهده للمعالجات المختلفه .

$\text{ن}_{\times}$ = عدد المشاهدات لأى معالجه

ويطلق على بسط المعادله السابقه رقم (٢٧) " مجموع مربعات الانحرافات داخل المجموعات Sum squares within groups " ويشير المقام الى درجات الحريه للتقدير ($\hat{\text{ت}}^{2}_{\text{و}}$) . وعلى هذا فان التقدير $\hat{\text{ت}}^{2}_{\text{و}}$ يمثل "متوسط مربعات الانحرافات داخل المجموعات Mean squares within groups" .

وينبغى الملاحظه الى أن هذا التقدير المتجمع للتباين لا يفترض تساوى المتوسطات الحقيقيه للمجموعات ، ولكن عند افتراض تساوى المتوسطات الحقيقيه للمجموعات فانه يمكن استخدام تباين المتوسطات لتقدير التباين العام .

٢- عن طريق تقدير تباين المتوسطات مباشره وضرب قيمته بقيمه حجم العينه ($\text{ن}_{\times}$) ، نظرا

لأن تباين المتوسطات يعتبر تقديرا للقيمه ($\frac{\text{ت}^{2}}{\text{ن}_{\times}}$) ، وعلى هذا فان تباين المتوسطات اذا ضرب فى حجم العينه يعتبر تقديرا للتباين (ت^{2}) . فاذا رمزنا للتقدير الذى يستخدم تباين المتوسطات بـ ($\hat{\text{ت}}^{2}_{\text{ب}}$) ، يمكن تقديره طبقا للمعادله الاتيه :

$$\hat{\text{ت}}^{2}_{\text{ب}} = \frac{\sum \text{ن}_{\times} \left(\bar{\text{س}}_{\times +} - \bar{\text{س}}_{++} \right)^{2}}{\text{ك} - 1}$$

$$= \frac{\left[\frac{\text{س}^{2}_{\text{أ}+}}{\text{ن}_{\text{أ}}} + \frac{\text{س}^{2}_{\text{ب}+}}{\text{ن}_{\text{ب}}} + \frac{\text{س}^{2}_{\text{ح}+}}{\text{ن}_{\text{ح}}} \right] - \frac{\text{س}^{2}_{++}}{\text{ن}}}{\text{ك} - 1}$$

$$= \frac{\sum \frac{\text{س}^{2}_{\times +}}{\text{ن}_{\times}} - \frac{\text{س}^{2}_{++}}{\text{ن}}}{\text{ك} - 1} \qquad (٢٨)$$

حيث أن :

$\bar{\text{س}}_{\times +}$ = متوسط قيم المشاهدات للمعالجات (أ) أو (ب) أو (ح) .

ك = عدد المعالجات

ن = عدد مشاهدات كل المعالجات .

= $\text{ن}_{\text{أ}} + \text{ن}_{\text{ب}} + \text{ن}_{\text{ح}}$

= $\sum \text{ن}_{\times}$

ويطلق على بسط المعادله السابقه رقم (٢٨) " مجموع مربعات الانحرافات بين المجموعات "Sum squares between groups" ويشير المقام الى درجات الحرية للتقدير ($\hat{ت}^{2}_{ب}$) . فعلى هذا فان ($\hat{ت}^{2}_{ب}$) يمثل "متوسط مربعات الانحرافات بين المجموعات "Mean squares between groups".

ويلاحظ أنه اذا اضيف بسط المعادله (٢٧) الى بسط المعادله (٢٨) ، اى اذا أضيف بسط قيمه التقدير $\hat{ت}^{2}_{و}$ الى بسط قيمه التقدير ($\hat{ت}^{2}_{ب}$) فان الناتج يكون :

$$\sum س^{2}_{\times\times} - \frac{س^{2}_{++}}{ن}$$

واذا قسمت هذه القيمه على درجات الحرية (ن ـ ١) أى ($ن_{أ} + ن_{ب} + ن_{حـ} - ١$) ، فان الناتج يمثل التباين الكلى لجميع المشاهدات ، ويمكن ايضاح ذلك فى الجدول التالى رقم (١١) والذى يطلق عليه جدول تحليل التباين .

جدول رقم (١١)

" جدول تحليل التباين لمتغير واحد "

مصدر التباين	مجموع مربعات الانحرافات	درجات الحريه	متوسط مربعات الانحرافات
بين المجموعات	$\frac{مجـ\ س^{2}_{\times +}}{ن_{\times}} - \frac{س^{2}_{++}}{ن}$	ك – ١	$\hat{ت}^{2}_{ب}$
داخل المجموعات	$مجـ\ س^{2}_{\times\times} - \frac{مجـ\ س^{2}_{\times +}}{ن_{\times}}$	ن – ك	$\hat{ت}^{2}_{و}$
الكلى	$مجـ\ س^{2}_{\times\times} - \frac{س^{2}_{++}}{ن}$	ن – ١	

ولتبسيط العمليات الحاسبيه ، فاننا نقدر مجموع مربعات الانحرافات داخل المجموعات بطرح مجموع مربعات الانحرافات بين المجموعات من المجموع الكلى لمربعات الانحرافات ٠

ويتم اختبار صحة الافتراض بتساوى متوسطات المجموعات ، باستخدام النسبه بين المتوسط لمربعات الانحرافات بين المجموعات ($\hat{ت}^{2}_{ب}$) والمتوسط لمربعات الانحرافات داخل المجموعات ($ت^{2}_{و}$) التى يطلق عليها نسبه ف (F- Ratio) ، وبمقارنتها بقيمه (ف٠) فى جدول توزيع ف (F- distribution) بدرجات حرية (ك – ١) ، (ن – ك) ، ومستوى معين للمعنويه فاننا نسلم

بقبول الافتراض بتساوى متوسطات المجموعات اذا كانت القيمه المقدرة لنسبه (ف) من مشاهدات العينه أصغر من قيمتها فى الجدول ، وعلى العكس لا نسلم بقبول هذا الافتراض اذا كانت القيمه المقدره لنسبة (ف) أكبر من قيمتها فى الجدول ·

ولقد اتضح فيما سبق أن تقدير متوسط مربعات الانحرافات داخل المجموعات ($\hat{ت}^2_و$) لا يعتمد على افتراض تساوى المتوسطات الحقيقية للمجموعات ، وأن تقدير متوسط مربعات الانحرافات بين المجموعات ($\hat{ت}^2_ب$) يعتمد على افتراض تساوى المتوسطات الحقيقيه للمجموعات ، لهذا فان أى فرق معنوى بين هذين التقديرين يرجع الى الافتراض الذى يعتمد عليه تقدير ($\hat{ت}^2_ب$) · ونظرا لاننا نختبر دائما عما اذا كان ($\hat{ت}^2_ب$) الذى يعتمد على افتراض تساوى المتوسطات الحقيقيه للمجموعات أكبر من ($\hat{ت}^2_و$) الذى لا يعتمد على هذا الافتراض ، فاننا نضع التقدير ($\hat{ت}^2_ب$) فى البسط والتقدير ($\hat{ت}^2_و$) فى المقام عند تقدير نسبة (ف) · وهنا يتضح أن الاختبار يعتمد على مقارنه التباين بين المجموعات بالتباين داخل المجموعات ·

<u>مثال :</u>

اختبر صحة الافتراض بتساوى متوسطات المجموعات أ ، ب ، حـ ، د باستخدام الأرقام الافتراضيه للمشاهدات العشوائيه المدونه فى الجدول رقم (١٢) وعلى أساس مستوى للمعنويه قدره ٥٪ ·

جدول رقم (١٢)

المجاميـــــع			
أ	ب	حـ	د
٧	٦	٨	٧
٢	٤	٤	٤
٤	٦	٥	٢
			٥

الحل :

١ ـ تقدر الاجماليات التاليـــــة :

$س_{أ+}$ = ١٣

$س_{ب+}$ = ١٦

$س_{حـ+}$ = ١٧

$س_{د+}$ = ١٨

$س_{++}$ = ١٣ + ١٦ + ١٧ + ١٨ = ٦٤

٢ـ تقدر المتوسطات الاتيه :

$$\bar{\text{س}}_{\text{أ}+} = \frac{\text{١٣}}{\text{٣}}$$

$$\bar{\text{س}}_{\text{ب}+} = \frac{\text{١٦}}{\text{٣}}$$

$$\bar{\text{س}}_{\text{حـ}+} = \frac{\text{١٧}}{\text{٣}}$$

$$\bar{\text{س}}_{\text{د}+} = \frac{\text{١٨}}{\text{٤}}$$

$$\bar{\text{س}}_{++} = \frac{\text{٦٤}}{\text{١٣}}$$

٣ـ يقدر متوسط مربعات الانحرافات بين المجموعات ($\hat{\text{ت}}^{\text{٢}}_{\text{ب}}$) كما يلى :

$$\hat{\text{ت}}^{\text{٢}}_{\text{ب}} = \frac{\sum \frac{\text{س}^{\text{٢}}_{\times +}}{\text{ن}_{\times}} - \frac{\text{س}^{\text{٢}}_{++}}{\text{ن}}}{\text{ك} - \text{١}}$$

$$= \frac{\frac{(\text{١٣})^{\text{٢}}}{\text{٣}} + \frac{(\text{١٦})^{\text{٢}}}{\text{٣}} + \frac{(\text{١٧})^{\text{٢}}}{\text{٣}} + \frac{(\text{١٨})^{\text{٢}}}{\text{٤}} - \frac{(\text{٦٤})^{\text{٢}}}{\text{١٣}}}{\text{٤} - \text{١}}$$

$$= \frac{\text{٣١٩} - \text{٣١٥٫٠٨}}{\text{٣}}$$

$$= \frac{\text{٣٫٩٢}}{\text{٣}} = \text{١٫٣١}$$

٤ـ يقدر متوسط مربعات الانحرافات داخل المجموعات ($\text{ت}^{2}_{\text{و}}$) على النحو التالى :

$$\text{ت}^{2}_{\text{و}} = \frac{\text{مجـ}\ \text{س}^{2}_{\times\times} - \dfrac{\text{مجـ}\ \text{س}^{2}_{\times+}}{\text{ن}_{\times}}}{\text{ن} - \text{ك}}$$

$$= (٧)^{2} + (٢)^{2} + (٤)^{2} + (٦)^{2} + (٤)^{2} + (٦)^{2} +$$

$$+ (٨)^{2} + (٤)^{2} + (٥)^{2} + (٧)^{2} + (٤)^{2} + (٢)^{2} + (٥)^{2} -$$

$$\frac{(١٣)^{2}}{٣} + \frac{(١٦)^{2}}{٣} + \frac{(١٧)^{2}}{٣} + \frac{(١٨)^{2}}{٤} \div ٩$$

$$= ٣٧ \div ٩$$

$$= ٤ر١١$$

٥ـ ويمكن ايجاز النتائج السابقه فى الجدول رقم (١٣)

جدول رقم (١٣)

" جدول تحليل التبايـــــــــــــن "

مصدر التباين	مجموع مربعات الانحرافات	درجات الحريه	متوسط مربعات الانحرافات
بين المجموعات	٣,٩٢	٣	١,٣١
داخل المجموعات	٣٧,٠٠	٩	٤,١١
الكلى	٤٠,٩٢	١٢	

٦ـ وعلى هذا تقدر نسبه (ف) كما يلى :

$$\frac{\hat{ت}^2_{ب}}{\hat{ت}^2_{و}} = \frac{\text{متوسط مربعات الانحرافات بين المجموعات}}{\text{متوسط مربعات الانحرافات داخل المجموعات}}$$

$$= \frac{١,٣١}{٤,١١}$$

$$= ٠,٣٢$$

ونظرا الى أن قيمه (ف) بجدول توزيع (ف) بدرجات حرية (ك ــ ١) ،(ن ــ ك) أى (٤ ــ ١ ، ١٢ ــ ٣) ومستوى معنويه قدره ٥ ٪ ، تبلغ :

$$ف_{٩٥٪} \quad (٣، ٩) \quad = \quad ٣٫٨٦$$

أى أن القيمه المقدره لنسبه (ف) أصغر من قيمه (ف) فى الجدول ، لذا نسلم بقبول افتراض تساوى متوسطات المجموعات عند مستوى معنوية قدرة ٥٪ ٠

(٣) تصنيف المتغيرين Two-variable classification

نفترض أن لدينا أنواعا مختلفه من السماد ولنرمز لها بالحروف أ ، ب ، حـ ، د وأصنافا مختلفه من تقاوى القمح ولنرمز لها بالحروف ح ، ل ، ع ، واننا نرغب فى دراسة أثر هذين المتغيرين على غله محصول القمح ٠

وللتبسط نفترض أننا اخترنا ١٢ مشاهدة عشوائية ،كل منها يمثل أثر أحد أنواع السماد وأحد أصناف التقاوى ولنرمز لهذه المشاهدات بالحروف المدونه فى الجدول رقم (١٤) ٠

جدول رقم (١٤)

التقاوى	السماد				المجموع	المتوسط
	أ	ب	حـ	د		
ح	$\text{س}_{\text{أ ح}}$	$\text{س}_{\text{ب ح}}$	$\text{س}_{\text{حـ ح}}$	$\text{س}_{\text{د ح}}$	$\text{س}_{\text{+ ح}}$	$\bar{\text{س}}_{\text{+ ح}}$
ل	$\text{س}_{\text{أ ل}}$	$\text{س}_{\text{ب ل}}$	$\text{س}_{\text{حـ ل}}$	$\text{س}_{\text{د ل}}$	$\text{س}_{\text{+ ل}}$	$\bar{\text{س}}_{\text{+ ل}}$
ع	$\text{س}_{\text{أ ع}}$	$\text{س}_{\text{ب ع}}$	$\text{س}_{\text{حـ ع}}$	$\text{س}_{\text{د ع}}$	$\text{س}_{\text{+ ع}}$	$\bar{\text{س}}_{\text{+ ع}}$
المجموع	$\text{س}_{\text{أ +}}$	$\text{س}_{\text{ب +}}$	$\text{س}_{\text{حـ +}}$	$\text{س}_{\text{د +}}$	$\text{س}_{\text{++}}$	
المتوسط	$\bar{\text{س}}_{\text{أ +}}$	$\bar{\text{س}}_{\text{ب +}}$	$\bar{\text{س}}_{\text{حـ +}}$	$\bar{\text{س}}_{\text{د +}}$		$\bar{\text{س}}_{\text{++}}$

حيث أن :

$\text{س}_{\text{أ +}}$ = مجموع قيم المشاهدات لمعالجات التقاوى (ح ، ل ، ع) ولمعالجـه السماد (أ) ، أى مجموع قيم المشاهدات التى فى العمود الاول .

$س_{ب+}$ = مجموع قيم المشاهدات لمعالجات التقاوى (ح ، ل ، ع) ولمعالجه السماد (ب) ،
أى مجموع قيم المشاهدات التى فى العمود الثانى ٠

$س_{ح+}$ = مجموع قيم المشاهدات لمعالجات التقاوى (ح ، ل ، ع) ولمعالجه السماد (ح) ،
أى مجموع قيم المشاهدات التى فى العمود الثالث ٠

$س_{د+}$ = مجموع قيم المشاهدات لمعالجات التقاوى (ح ، ل ، ع) ولمعالجه السماد (د) ،
أى مجموع قيم المشاهدات التى فى العمود الرابع ٠

$\bar{س}_{أ+}$ = متوسط قيم المشاهدات لمعالجات التقاوى (ح ، ل ، ع) ولمعالجه السماد (أ) ،
أى متوسط قيم المشاهدات التى فى العمود الأول ٠

$\bar{س}_{ب+}$ = متوسط قيم المشاهدات لمعالجات التقاوى (ح ، ل ، ع) ولمعالجه السماد (ب) ،
أى متوسط قيم المشاهدات التى فى العمود الثانى ٠

$\bar{س}_{ح+}$ = متوسط قيم المشاهدات لمعالجات التقاوى (ح ، ل ، ع) ولمعالجه السماد (ح) ،
أى متوسط قيم المشاهدات التى فى العمود الثالث ٠

$\bar{س}_{د+}$ = متوسط قيم المشاهدات لمعالجات التقاوى (ح ، ل ، ع) ولمعالجه السماد (د) ،
أى متوسط قيم المشاهدات التى فى العمود الرابع ٠

$س_{+ح}$ = مجموع قيم المشاهدات لمعالجات السماد (أ ، ب ، ح ، د) ولمعالجه التقاوى (ح) ،
، أى مجموع قيم المشاهدات التى فى الصف الأول ٠

$س_{+ل}$ = مجموع قيم المشاهدات لمعالجات السماد (أ ، ب ، ج ، د) ولمعالجه التقاوى (ل) ،
أى مجموع قيم المشاهدات التى فى الصف الثانى ٠

$س_{+ع}$ = مجموع قيم المشاهدات لمعالجات السماد (أ ، ب ، حـ،د) ولمعالجه التقاوى (ع) ، أى مجموع قيم المشاهدات التى فى الصف الثالث ٠

$\bar{س}_{+ح}$ = متوسط قيم المشاهدات لمعالجات السماد (أ ، ب ،حـ،د) ولمعالجه التقاوى (ح) ، أى متوسط قيم المشاهدات التى فى الصف الاول ٠

$\bar{س}_{+ل}$ = متوسط قيم المشاهدات لمعالجات السماد (أ ، ب ،حـ،د) ولمعالجه التقاوى (ل) ، أى مجموع قيم المشاهدات التى فى الصف الثانى ٠

$س_{+ع}$ = مجموع قيم المشاهدات لمعالجات السماد (أ ، ب ،حـ،د) ولمعالجه التقاوى (ع) ، أى مجموع قيم المشاهدات التى فى الصف الثالث ٠

$س_{++}$ = مجموع قيم كل المشاهدات

$\bar{س}_{++}$ = متوسط قيم كل المشاهدات

ويلاحظ من الجدول السابق رقم (١٤) ، أن التباين لمختلف المشاهدات لايرجع الى التباين العام فحسب بل الى الانحرافات التى ترجع الى الاختلاف فى أنواع السماد والى الانحرافات التى ترجع الى الاختلاف فى أصناف التقاوى ، لهذا فانه فى حاله تصنيف المتغير الواحد قدرنا فقط متوسط مربعات الانحرافات من متوسطات الاعمده ، ولكن فى هذه الحاله ـ أى حاله تصنيف المتغيرين ـ فاننا نقدر أيضا متوسط مربعات الانحرافات من متوسطات الصفوف ٠ ويقدر متوسط مربعات الانحرافات من متوسطات الأعمده كما يلى :

$$\hat{ت}^{٢}_{ع} = \frac{مج \frac{س^{٢}_{\times +}}{ن_{\times}} - \frac{س^{٢}_{++}}{ن}}{ع - ١}$$

حيث أن :

$س_{+\times}$ = مجموع قيم أحد الأعمدة .

ع = عدد الأعمده .

$ن_{\times}$ = عدد المشاهدات فى العمود .

ويلاحظ أن ($\hat{ت}^{2}_{ع}$) ، أى متوسط مربعات الانحرافات من متوسطات الأعمده ، يماثل تماما متوسط مربعات الانحرافات بين المجموعات .

ويقدر متوسط مربعات الانحرافات من متوسطات الصفوف كما يلى :

$$\hat{ت}^{2}_{ص} = \frac{مجـ \frac{س^{2}_{\times +}}{ن_{\circ}} - \frac{س^{2}_{++}}{ن}}{ص - ١}$$

حيث أن :

$س^{2}_{\times +}$ = مجموع قيم أحد الصفوف

ص = عدد الصفوف

$ن_{\circ}$ = عدد المشاهدات فى الصف

ويقدر المجموع الكلى لمربعات الانحرافات كما يأتى :

$$\sum س_{\times\times}^{٢} - \frac{س_{++}^{٢}}{ن}$$

حيث أن :

$س_{\times\times}$ = قيمه أى مشـــاهدة

ويلاحظ أن الفرق بين المجموع الكلى لمربعات الانحرافات وبين مجموع مربعات الانحرافـــــــات لمتوسطات الأعمدة ومجموع مربعات الانحرافات لمتوسطات الصفوف يطلق عليه " مجموع مربعات الانحرافات المتبقيه "Resîduat of sum squares" أو " مجموع مربعـــات انحرافات الخطأ " Error sum of squares " كما يتضح من الجدول التالى رقم (١٥) .

جدول رقم (١٥)

" جدول تحليل التباين لمتغيريـــــــــــــــــن "

مصدر التباين	مجموع مربعات الانحرافات	درجات الحريـــه	متوسطـــات الانحرافات
الاعمدة	$\sum \frac{س_{\times+}^{٢}}{ن_{\times}} - \frac{س_{++}^{٢}}{ن}$ (١)	ع ــ ١	$\hat{ت}_{ع}^{٢}$
الصفوف	$\sum \frac{س_{+\times}^{٢}}{ن.} - \frac{س_{++}^{٢}}{ن}$ (٢)	ص ــ ١	$\hat{ت}_{ع}^{٢}$
الخطأ	(٣) ــ (٢) + (١)	(ع ــ ١)(ص ــ ١)	$\hat{ت}_{خ}^{٢}$
الكلى	$\sum س_{\times\times}^{٢} - \frac{س_{++}^{٢}}{ن}$ (٣)	ن ــ ١	

ويستخدم متوسط مربعات انحرافات الخطأ ($\hat{\text{ت}}^{٢}_{\text{خ}}$) فى اختبار الافتراض بتساوى متوسطات الأعمدة وذلك بتقدير نسبة (ف) التالية :

$$\text{ف}_{\text{ع}} = \frac{\hat{\text{ت}}^{٢}_{\text{ع}}}{\hat{\text{ت}}^{٢}_{\text{خ}}}$$

أى النسبه بين متوسط مربعات انحرافات الأعمده وبين متوسط مربعات انحرافات الخطأ .

وعلى أساس المقارنه بين النسبة المقدره ($\text{ف}_{\text{ع}}$) وقيمه (ف) فى جدول توزيعها ، يمكن قبول أو رفض الافتراض بتساوى متوسطات الأعمده ، فاذا كانت القيمه المقدره ($\text{ف}_{\text{ع}}$) أصغر من قيمه (ف) فى الجدول فاننا نسلم بقبول الافتراض بتساوى متوسطات الأعمده ، وعلى العكس اذا كانت القيمه المقدره ($\text{ف}_{\text{ع}}$) أكبر من قيمتها فى الجدول فاننا لا نسلم بقبول الافتراض بتساوى متوسطات الأعمدة .

كما يستخدم متوسط مربعات انحرافات الخطأ ($\hat{\text{ت}}^{٢}_{\text{خ}}$) فى اختبار صحة الافتراض بتساوى متوسطات الصفوف ، وذلك بتقدير نسبه (ف) الآتية :

$$\text{ف}_{\text{ص}} = \frac{\hat{\text{ت}}^{٢}_{\text{ص}}}{\hat{\text{ت}}^{٢}_{\text{خ}}}$$

أى النسبه بين متوسط مربعات انحرافات الصفوف وبين متوسط مربعات انحرافات الخطأ .

وعلى أساس المقارنه بين النسبه المقدره ($\text{ف}_{\text{ص}}$) وقيمه (ف) فى جدول توزيعها ، يمكن قبول أو رفض الافتراض بتساوى متوسطات الصفوف ، فاذا كانت القيمه المقدره ($\text{ف}_{\text{ص}}$) أصغر من قيمه (ف) فى الجدول فاننا نسلم بقبول الافتراض بتساوى متوسطات الصفوف ، وعلى العكس اذا كانت القيمه المقدره ($\text{ف}_{\text{ص}}$) أكبر من قيمه (ف) فى الجدول فاننا لا نسلم بقبول الافتراض بتساوى متوسطات الصفوف .

مثال :

باستخدام الأرقام الافتراضية للمشاهدات العشوائيه المدونه فى الجدول رقم (١٦) وعلى أساس مستوى معنويه قدره ٥ ٪ ، اختبر صحه الافتراضيين التاليين :

١ـ تساوى متوسطات الأعمده (أنواع الأسمدة)

٢ـ تساوى متوسطات الصفوف (أصناف التقاوى) ٠

جدول رقم (١٦)

التقاوى	السماد أ	ب	ح	د
ح	٧	٦	٨	٧
ل	٢	٤	٤	٤
ع	٤	٦	٥	٣

الحل :

١ـ تقدر الاجماليات التاليـــــة :

$س_{أ+}$ = ١٣ $س_{ح+}$ = ٢٨

$\text{س}_{\text{ب}+} = ١٦$ $\qquad$ $\text{س}_{\text{ل}+} = ١٤$

$\text{س}_{\text{ح}+} = ١٧$ $\qquad$ $\text{س}_{\text{ع}+} = ١٨$

$\text{س}_{\text{د}+} = ١٤$ $\qquad$ $\text{س}_{++} = ٦٠$

٢ــ تقدر المتوسطات الآتيـــــه :

$\bar{\text{س}}_{\text{أ}+} = \frac{١٣}{٣}$ $\qquad$ $\bar{\text{س}}_{\text{ح}+} = \frac{٢٨}{٤}$

$\bar{\text{س}}_{\text{ب}+} = \frac{١٦}{٣}$ $\qquad$ $\bar{\text{س}}_{\text{ل}+} = \frac{١٤}{٤}$

$\bar{\text{س}}_{\text{ح}+} = \frac{١٧}{٣}$ $\qquad$ $\bar{\text{س}}_{\text{ع}+} = \frac{١٨}{٤}$

$\bar{\text{س}}_{\text{د}+} = \frac{١٤}{٣}$ $\qquad$ $\bar{\text{س}}_{++} = \frac{٦٠}{١٢}$

٣ــ تقدر متوسطات مربعات الانحرافات كما يلى :

$$\hat{\text{ع}}^{٢}_{\text{ت}} = \frac{\text{مج} \dfrac{\text{س}^{٢}_{\times +}}{\text{ن}_{\times}} - \dfrac{\text{س}^{٢}_{++}}{\text{ن}}}{\text{ع} - ١}$$

$$= \frac{\frac{(١٣)^٢}{٣} + \frac{(١٦)^٢}{٣} + \frac{(١٧)^٢}{٣} + \frac{(١٤)^٢}{٣} - \frac{(٦٠)^٢}{١٢}}{٤ - ١}$$

$$= \frac{٣٠٣,٣٣ - ٣٠٠}{٣}$$

$$= ١١,١$$

$$\hat{\text{ت}}^{٢}_{\text{ص}} = \frac{\frac{\text{مجـ}\ \text{س}^{٢}_{+\times}}{\text{ن}_{\circ}} - \frac{\text{س}^{٢}_{++}}{\text{ن}}}{\text{ص} - ١}$$

$$= \frac{\left[\frac{(٢٨)^٢}{٤} + \frac{(١٤)^٢}{٤} + \frac{(١٨)^٢}{٤}\right] - \frac{(٦٠)^٢}{١٢}}{٣ - ١}$$

$$= \frac{٣٢٦ - ٣٠٠}{٢}$$

$$= ١٣,٠$$

٤ـ ويقدر المجموع الكلى لمربعات الانحرافات كالاتى :

$$\text{مجـ}\ \text{س}^{٢}_{\times\times} - \frac{\text{س}^{٢}_{++}}{\text{ن}}$$

$$= \left[(٧)^{٢} + (٢)^{٢} + (٤)^{٢} + (٦)^{٢} + (٤)^{٢} + (٦)^{٢} + (٨)^{٢} + (٤)^{٢} + (٥)^{٢} + (٧)^{٢} + (٤)^{٢} + (٣)^{٢} \right] - \frac{(٦٠)^{٢}}{١٢}$$

$$= ٣٣٦ - ٣٠٠$$

$$= ٣٦٫٠٠$$

٥ـ ونظرا الى أن مجموع مربعات انحرافات الخطأ يقدر بطرح مجموع مربعات انحرافات الاعمدة ومجموع مربعات انحرافات الصفوف من المجموع الكلى لمربعات الانحرافات ، فانه يقدر كما يلى :

$$\left[٣٦ - (٣٫٣٣ + ٢٦٫٠٠) \right] = ٦٫٦٧$$

أى أن متوسط مربعات انحرافات الخطأ يبلغ :

$$\frac{٦٫٦٧}{(ع - ١)(ص - ١)} = \frac{٦٫٦٧}{(٤ - ١)(٣ - ١)} = ١٫١١$$

٦ـ ويمكن ايجاز النتائج السابقه ، فى الجدول رقم (١٧)

جدول رقم (١٧)

" جدول تحليل التباين لمتغيــــــــــيرين "

مصدر التباين	مجموع مربعات الانحرافات	درجات الحرية	متوسط مربعات الانحرافـــات
الأعمدة	٣٣ر٣	(٤ ـ ١)	$\frac{٣٣ر٣}{٣}$ = ١١ر١
الصفوف	٠٠ر٢٦	(٣ ـ ١)	$\frac{٠٠ر٢٦}{٢}$ = ٠٠ر١٣
الخطأ	٦٧ر٦	(٤ـ١)(٣ـ١)	$\frac{٦٧ر٦}{(٣)(٢)}$ = ١١ر١
الكلى	٠٠ر٣٦	(١٢ ـ ١)	

٧ـ وعلى هذا تقدر نسبه (ف) لاختبار صحة الافتراض بتساوى متوسطات الاعمده كما يلى :

$$\frac{\hat{ت}^{2}_{ع}}{\hat{ت}^{2}_{خ}} = \frac{\text{متوسط مربعات انحرافات الأعمـــــده}}{\text{متوسط مربعات انحرافات الخطـــــأ}}$$

$$= \frac{١١ر١}{١١ر١}$$

$$= ١$$

ونظرا الى أن قيمه (ف) فى جدول توزيع (ف) بدرجات حرية (ع ـ ١) ،

(ع ـ ١) (ص ـ ١) ومستوى معنوية قدره ٥ ٪ ، تبلغ :

$$ف_{١-\alpha} [ع - ١] ، [(ع - ١)(ص - ١)] = ٤٫٧٦$$

أى أن :

$$ف_{٠٫٩٥} (٣) ، (٦) = ٤٫٧٦$$

وحيث أن القيمه المقدره لنسبه (ف) تبلغ الواحد الصحيح ، أى انها أصغر من قيمه (ف) فى جدول توزيع (ف) ، فاننا نسلم بقبول الافتراض بتساوى متوسطات الأعمدة .

٨ـ وتقدر نسبه (ف) لاختبار صحة الافتراض بتساوى متوسطات الصفوف كما يلى :

$$\frac{\hat{ت}^{٢}_{ص}}{\hat{ت}^{٢}_{خ}} = \frac{\text{متوسط مربعات انحرافات الصفوف}}{\text{متوسط مربعات انحرافات الخطأ}}$$

$$= \frac{١٣}{١٫١١}$$

$$= ١١٫٧$$

ونظرا الى أن قيمه (ف) فى جدول توزيع (ف) بدرجات حرية [ص ـ ١] ، [(ع ـ ١)(ص ـ ١)]

ومستوى معنويه قدره ٥ ٪ ، تبلغ :

$$ف_{١-\alpha}\left[ص - ١\right] ، \left[(ع - ١)\ (ص - ١)\right] = ٥ر١٤$$

أى أن :

$$ف_{٠ر٩٥} \quad (٢) ، (٦) \quad = ٥ر١٤$$

وحيث أن القيمه المقدره لنسبه (ف) تبلغ ١١ر٧ ، أى أنها أكبر من قيمه (ف) فى جدول توزيع (ف) ، فاننا لا نسلم بقبول الافتراض بتساوى متوسطات الصفوف ٠

تمارين

تمرين (١) :

أجب على الأسئله الاتية بعلامة صحيح (✓) أو خطأ (×) .

١ ـ يعتبر التقدير ($\hat{ت}^{2}_{ى . س}$) للقيمه المجهوله ($ت^{2}_{ى . س}$) ، تقديرا غير متحيز Unbiased estimate ( ) .

٢ـ يعتبر التقدير ($\hat{ت}_{ى . س}$) للقيمه المجهوله ($ت_{ى . س}$) ، تقديرا غير متحيز . ( ) .

٣ـ يعتبر توزيع التقدير ($\hat{أ}$) للقيمه المجهوله (أ) ، توزيعا معتدلا Normal distribution ( ) .

٤ـ يعتبر توزيع التقدير ($\hat{ب}$) للقيمه المجهوله (ب) ، توزيعا معتدلا. ( ) .

٥ـ ان (ر) تمثل التباين الذى أمكن تحديده بالانحدار الخطى . ( ) .

٦ـ ان انحدار المتغير التابع (ى) على المتغير المستقل (س) يساوى مقلوب انحدار (س) على (ى) . ( ) .

٧ـ اذا فرض أن $\left[٣ر١ < ب < ٧ر١ \right]$ تمثل ٩٥٪ حدود ثقه ، فـــان

هذا يعنى :

احتمال $\left[٣ر١ < ب < ٧ر١ \right]$ = ٩٥٪ (   )

أو أنه يعنى :

٩٥٪ من كل العينات التى لها نفس الحجم ستكون حيث أن :

$\left[٣ر١ < \hat{ب} < ٧ر١ \right]$ (   ) .

٨ـ ان مجموع مربعات الانحدار Regression sum of squares لايمكـــن ان تزيد عن المجموع الكلى للمربعات Total sum of squares (   ) .

٩ـ اذا كانت كل النقط أو المشاهدات فى شكل الانتشار Scatter - diagram تقع على خط مستقيم ، وأن تباين المتغير التابع ($\hat{ت}^{٢}_{ى}$) أكبر من الصفر فان ($ر^{٢}$) = ١ ( ) .

١٠ـ بافتراض أن ($\hat{ت}^{٢}_{ى}$) أكبر من الصفر ، فان $\hat{ب}$ = صفر تعنى ان ر = صفر ( ) .

١١ـ بافتراض أن ($\hat{ت}^{٢}_{ى}$) أكبر من الصفر ، فان ر = صفر تعنى أن $\hat{ب}$ = صفر ( ) .

تمرين (٢) :

باستخدام القيم الافتراضيه للمتغير التابع (ى) وللمتغير المستقل (س) المبينه فى الجدول التالى :

س	٥	٥	٦	٦	٦	٧	٧	٨	٨	٩
ى	٥ر٣	٤	٥ر٤	٥	٥ر٥	٦	٥ر٥	٥ر٦	٧	١٥

أوجد القيم المختلفه لـ $\left[\ \hat{ى} = \hat{أ} + \hat{ب}\ (س - \bar{س})\ \right]$ عند القيم المختلفه للمتغير (س) المدونه فى الجدول .

تمرين (٣) :

قدر حدود الثقه لكل من القيم أ ، ب ، $\hat{ى}_{.س}$ ، وذلك باستخدام القيم الافتراضيه للمتغيرين (ى) ، (س) المدونه فى الجدول التالى ، وعلى أساس درجة ثقه قدرها ٩٠٪ .

س	٦	٦	٩	٩	٩	١٢	١٢	١٥	١٥	١٨
ى	٣	٤	٦	٧	٨	١٠	٩	١٢	١٣	١٥

تمرين (٤) :

قدر حدود الثقه للقيمه ($ت_{ى.س}$) ، وذلك باستخدام القيم الافتراضيه للمتغيرين (س) ، (ى) ، الموضحه فى تمرين (٣) ، على أساس درجة للثقه قدرها ٩٥٪ .

تمرين (٥) :

اختبر صحة الافتراض باستقلال المتغير التابع (ى) عن المتغير المستقل (س) ، وذلك باستخدام القيم الافتراضيه المبينه فى الجدول التالى وعلى أساس مستوى للمعنوية قدرة ٥ ٪

س	١٥	١٥	١٨	٢٠	٢٢	٢٥	٢٥	٢٧
ى	١١	١٣	١٤	١٤	١٧	٢٠	٢١	٢٣

تمرين (٦) :

قدر قيمه معامل الارتباط البسيط (ر) ومعامل التحديد (ر^{٢}) ، وذلك باستخدام القيم الافتراضيه للمتغيرين (س) ، (ى) الموضحه فى تمرين (٥) ، وأشرح ماذا تعنى القيمه المقدره لكل من المعاملين .

تمرين (٧) :

اختبر صحة الافتراض بتساوى متوسطات المعالجات أ ، ب ، حـ ، د باستخدام الأرقام الافتراضيه للمشاهدات العشوائيه المدونه فى الجدول التالى ، وعلى أساس مستوى للمعنويه قدره ٥ ٪ .

المعالجات			
أ	ب	حـ	د
٨	٤	٧	٦
١٢	٦	٢	٨
٥	٧	٤	٣
١١	١٠	٨	٥
٦	٨	٥	١١
٤	٧	٧	١٢
١٣	١٥	٩	١٣
٩	٦	١١	١٠

تمرين (٨) :

اذا فرض أن أحد الباحثين فى مجال تربيه الحيوان ، رغب فى دراسة أثر أنواع العلائق أ ، ب ، حـ على زيادة الوزن لرؤوس الأغنام فى قطيع معين ، ولهذا فانه اختار عشوائيا (٣٠) رأسا من هذه الأغنام ، وقدم لكل (١٠) منها خلال فتره معينه أحدى العلائق ، وكانت الزياده بالكيلوجرام

فى وزن كل منها كما يتضح فى الجدول التالى :

العلائق		
أ	ب	حـ
٣	٢	٤
٢	٦	٣
١	١	٣
٤	٣	٢
٥	٤	٥
٢	٢	١
٣	٣	١
١	٢	٤
١	٢	٣
٤	٢	٢

اختبر صحة الافتراض بتساوى أثر هذه العلائق على أوزان الاغنام على أساس مستوى للمعنويه قدره ٥ ٪ .

تمرين (٩) :

باستخدام الأرقام الافتراضيه المدونه فى الجدول التالى :

	أ	ب	حـ
د	٥	٦	٣
هـ	٤	١٠	٨
و	٧	٩	٧
ح	٢	٧	٤

أوجد الآتى :

١ــ مجموع مربعات انحرافات الأعمده أ ، ب ، حـ .

٢ــ مجموع مربعات انحرافات الصفوف د ، هـ ، و ، ح .

٣ــ مجموع مربعات انحرافات الخطأ .

٤ــ المجموع الكلى لمربعات الانحرافات

وأختبر صحة الافتراضين التاليين على أساس مستوى للمعنوية قدره ١٠ ٪ :

١ــ تساوى متوسطات الأعمده أ ، ب ، حـ .

٢ــ تساوى متوسطات الصفوف د ، هـ ، و ، ح .

المراجـــع

Anderson, R.L., and T.A. Bancroft, Statistical Theory in Research. New York: Mc Graw-HillBook Co., Inc., 1952.

Dixon, W.J., and F.J. Massey, Jr., Inroduction to statistical Analysis. New York: Mc Graw-Hill Book Co., Inc., 1957.

Graybill, F.A., An Introduction to Linear Stastical Models. New York: Mc Graw-Hill Bookd Co., Inc., 1961.

Guenther, W.C., Analysis of Variance. N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1964.

Li, J.C.R. Introduction to stastistical Inference. Ann Arbor, Mich.: J.W. Edwards, Publisher, Inc., 1961.

Mendenhall, W., Introduction to Statistics. California: Wadsworth PublishingCo., Inc, 1965

Scheffé, H. The Analysis of Variance. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1959.

Snedecor, G.W., Statistical Methods. Ames, Iowa: Iowa State University press, 1956.

Walker, H.M., Mathematics Essential for Elementary Statistics. New York: Henry Holt and Co., 1952.

Walker, H.M., J. Lev, Statistical Inference. New York: Holt, Rinehart and winston, 1953.

المحتويـــــــات