جمهورية مصر العربية

التخطيط القومي

معهد التخطيط القومي

مذكرة رقم ٨٩٦

(٢) مقدمه في الاسلوب الاحصائي

أعداد

د. يوسف نصر الدين محمد

يونيه سنه ١٩٦٩

اعاده طبع فبراير ١٩٨٢

اعاده طبع يناير ١٩٨٧

اعاده طبع يناير ١٩٩١

الآراء التي وردت في هذه المذكـــــــــــــــرة
تمثل رأى الكاتب ولاتمثل رأى المعهد ذاتـــــــــــه

مقدمـــه :

كلمة الاحصاء " استاتيتيك " مشتقة من اللغة اللاتينية " استاتسوس " ومعناها الوضع أو الحالة ومن هذه اشتقت كلمات أخرى منها " استاتو " وتعنى الدولة واستك " تعبر عن الاستدلال على المعلومات المتصلة بالدولة والحالة فى البلاد ، وعلى ذلك فان كلمة استاتستك " تعنى مجموعة المعلومات الخاصة بالدولة .

لقد نشأ علم الاحصاء ونما تلبية لمتطلبات الحياه العملية واقتصر هذا العلم قديما على العد والحصر . ويبدوا أن من قام بتطبيق هذه الفكرة واستخدامها هم القدماء المصريين . حيث أنهم قاموا بعمل تعداد لسكان مصر وثروتها عند بناء الاهرامات واستخدموا النتائج فى عملية تنظيم مشروع البناء . ثم أنه كلما تطورت المجتمعات البشرية وتعمقت العلاقات الاجتماعية أصبح للاحصاء الفضل الكبير فى دراسة هذه العلاقات .

أهمية الأسلوب الاحصائى :

بدأ علم الاحصاء بالتغلغل فى ميادين الحياه من الدولة لتشمل جميع ميادين النشاط المختلفة فيمكن للاحصاء مساعدة الاقتصاد وضغط النشاط الاقتصادى على مستوى الدولة أو الوحدة الانتاجية وعلى سبيل المثال تحص الوحدة التجارية لكل عناية الطلب على مختلف السلع وتتبع مبيعات السلع لتنظيم أحسن .

كما أنه عند وجود المعلومات الاحصائية المناسبة تستطيع الحكومات أن تعرف بسهولة حالة البلاد وتحدد احتياجات السكان وتتكشف لها الحلقات الضعيفة فى سلسلة الظواهر الاقتصادية المعقدة وتستطيع الحكومات على أساس هذه المعلومات أن تتخذ الاجراءات اللازمة لازالة المساوئ والوصول الى أحسن الأوضاع . كما أن الحكومة يجب أن تعرف الكثير عن البلاد والا فانها لن تستطيع ادارة دفة البلاد فمثلا قد يحدث عجز فى المواد الغذائية تتجه لنقص المحصول فى منطقة معينة

وفى هذه الحالة يجب معرفة المحصول فى المناطق الأخرى حتى يمكن تنظيم استهلاك المحصول وتزويد سكان المناطق المصابة بالنقص فى المواد الغذائية منه ·

كما أنه لمنع الزيادة فى الأسعار يجب تحديد مقدار الانتاج الصناعى والزراعى فى البلاد ومايمكن تصديره من السلع وكذا احتياجات السكان ودخول الفئات المختلفة منهم وقدراتهم الشرائية وبدون بيانات وأرقام يصعب التنبوء بأى موقف اقتصادى يمكن أن ينشأ فى المستقبل ·

لذا نرى أن معظم اجهزة الدولة تستطيع أن تقدم مسئولياتها خير قيام اذا توفرت لديها البيانات الاحصائية السليمة عن المشاكل التى تواجهها أو تتوقعها فمثلا تستطيع جهاز الأمن أن يوزع خدماته على المناطق المختلفة بالكم والكيف لكل منطقة من المناطق على ضوء بيانات سليمه عن كثافة السكان وحالتهم الاجتماعية على هذه المناطق ·

وكذلك يمكن لأجهزة التعليم أن تسد النقص عندها فى هيئات التدريس فى المدارس المختلفة بذلك على ضوء دراسات مفصلة لبيانات دقيقة عن عدد التلاميذ والمدرسين اللازمين وتوزيعهم فى الأماكن المختلفة ·

كما أنه تستطيع مؤسسة النقل توزيع السيارات توزيعا سليما اذا كانت على علم تام بالبيانات الاحصائية عن كثافة السكان وحالتهم الاجتماعية فى المناطق المختلفة ·

عند توزيع فرص العمل فى المحافظات المختلفة للحد من الهجرة الى العواصم الكبرى وتحديد الأماكن التى بها فرص عمل أكثر فانه يلزم توفر بيانات سليمة عن حجم العمل فى كل محافظة ونسبة المتعطلين بها ومعرفة الامكانيات الاقتصادية لكل محافظة حتى يتسنى على ضوء تحليل هذه البيانات وضع سياسة سليمة لاتاحة فرص لعمل فى المحافظات المختلفة · وعند القيام بصناعة ما فلا بد من دراسة تأثير هذه الصناعه على الاقتصاد القومى ومدى توفر سوق لمنتجات هذه الصناعة ولذا فانه يلزم توفر بيانات دقيقة حتى نحصل على نتائج دقيقة ·

وفى مجال الزراعة يستلزم مقارنة الأساليب المختلفة لانتاج محصول معين واختيار احسن الاساليب

اقتصاديا والتى تؤدى الى زيادة غلة الفدان ونجرى لذلك تجارب متعددة على زراعة فدان فى ظروف مختلفة مع استخدام العوامل المختلفة التى تؤثر على غلة المحصول بقصد الوصول الى أحسن النتائج ٠

فى مجال الانتاج تستلزم مراقبة جودته ومطابقة الانتاج للمواصفات الموضوعة بحيث يمكن اكتشاف هبوط مستوى الانتاج فى الوقت المناسب حتى يمكن تدارك الأسباب التى أدت الى ذلك فى الوقت المناسب ٠

ومن ذلك يتضح أن علم الاحصاء يستخدم فى مجالات كثيرة يكون الهدف منه الوصول الى تفسيرات علمية للظواهر التى يتكرر حدوثها أما تلقائيا أو نتيجة لاجراء سلسلة من التجارب ٠

كما أنه علم الاحصاء مهمته تحديد الخواص العامة التى يتصل بها الظواهر والقوانين التى تتبعها هذه الظواهر ٠

فاذا كان اتجاه التطور قد تحدد أصبحت الظروف الموضوعية معروفة فانه تحدد الاجراءات التى يجب أن يتخذها المخطط ٠

خطوات البحث الاحصائى :

الخطوة الأولى : تحديد الغرض من جمع البيانات وهذا بدوره تحدد البيانات اللازم توافرها للوصول الى الهدف من البحث ٠

الخطوة الثانية : تحديد المجتمع المراد جمع البيانات عنه وكذلك وحدة المجتمع التى يجب أن تشملها البيانات فمثلا عند دراسة النمط الاستهلاكى للقطاع العائلى (حيث أنه يعد من أهم مصادر الحكم على مدى رفاهية الشعب وتحدد من مستوى المعيشة من الدخل القومى الذى يحصل عليه كل فرد) فان مجتمع الدراسة هى مجموع الأسر التى تسكن فى الريف والحضر والوحدة التى ستجمع عنها البيانات فتكون الأسرة ٠

الخطوة الثالثة : تحديد المصادر التى تستوفى منها البيانات المطلوبة فى البحث ونرى أن المصادر نوعان :

(أ) مصادر تاريخية : وهى عبارة عن سجلات محفوظة أو بيانات سبق تسجيلها عن ملاحظات تسجل باستمرار عقب حدوث الحدث مباشرة مثل تسجيل المواليد والوفيات والزيجات وحالات الطلاق أو ملاحظات من فترات كتعداد السكان الذى يجرى كل عشرة سنوات وحين تستخدم البيانات عن طريق السجلات يجب أن تتحرى عن دقة هذه البيانات ومعرفة الظروف التى جمعت وسجلت فيها وكذلك الأسلوب الذى جمعت به حتى نحيط نواحى ضعفها وتحيزها عند استخدامها .

(ب) مصادر الميدان : وذلك بجمع البيانات المطلوبة عن مفردات المجتمع محل الدراسة عن طريق المقابلة أو المراسلة .

وهنا تستلزم أولا وقبل كل شيء العمل على اعداد تحضير مرحلة العمل الميدانى ويتطلب ذلك :-

(١) تصميم استمارة البحث .

(٢) تقرير الأسلوب التى تجمع به البيانات عن المجتمع وذلك حسب الامكانيات المتاحة فقد تختار بين أسلوبين .

أ — أسلوب الحصر الشامل .

ب — أسلوب العينة .

(٣) اعداد جهاز التى ستتولى عملية جمع البيانات .

(٤) تهيئة المجتمع محل الدراسة للعملية وتوجيهه بمدى أهمية البحث

تصميم استمارة البحث :

(أ) أن تفى الاستمارة بجميع البيانات التى يتطلبها الهدف من البحث

(ب) تصاغ البيانات فى صورة أسئلة وتراعى فيها الوضوح التام ·

(حـ) يراعى أن تكون اجابات الأسئلة بقدر الامكان رقمية وفى حالة الأسئلة التى طبيعة الاجابة عليها غير رقمية يجب أن يكون الاجابة موجزة وتفى بالغرض المطلوب ·

(د) يجب أن تتحاشى الأسئلة التى تكون اجاباتها معتمدة على التقرير الشخصى كما يراعى أن تكون الأسئلة بعيدة عن الاحراج وعن الغموض كما يراعى قلة الأسئلة حتى لا تستغرق وقتا طويلا من المبحوثين فى الاجابة عليها حتى لا يشعروا بالملل مما يؤدى بهم الى اللامبالاة وعدم الدقة فى الاجابة ·

(٢) وأسلوب جمع البيانات الاحصائية يعتمد على :—

(أ) طريق الحصر الشامل : ومعناه جمع البيانات من جميع مفردات المجتمع الذى تتألف منه الظاهرة المبحوثة مثلا عند اجراء تعداد السكان يحاول القائمين به الا يتركوا أى فرد من السكان دون عدة ·

(ب) طريقة العينة (الحصر الاحصائى) : ويعنى جمع البيانات عن جزء من المجتمع أو البيانات من بعض أفراده فقط وتطلق عليهم اسم العينة ونرى أن أسلوب العينة يحتل أهمية كبرى كما أنه تختلف أنواعها بالنسبة الى كيفية اختيارها فنجد أنها تنقسم الى أنواع كثيرة منها ·

(١) العينة العشوائية البسيطة :—

هى أبسط أنواع العينات وأسهلها وأكثرها اصالة فى العشوائية اذ أنها تم اختيارها باعطاء فرص متساوية لجميع مفردات المجتمع محل الدراسة ولكن من عيوبها أن المجتمع محل الدراسة قد تكون مكوناته غير متجانسة تلعب الصدفة دورا فى اختيار العينة من نوع واحد من مكونات المجتمع مثلا اذا أردنا دراسة مستوى الدخل فى الجمهورية العربية المتحدة وأعطينا جميع مفردات المجتمع فرصة واحدة فى الاختيار فقد يحدث أن جميع المفردات المختارة ذات دخل مرتفع أو دخل منخفض ولذا فاننا قد نصل الى نتيجة لا تمثل الواقع ·

(٢) العينة الطبقية والتمثيلية :ـ

فى عيوب العينة العشوائية البسيطة أنها قد يكون متحيزة فى المجتمعات الغير متجانسة ولـــذا فاننا نقسم المجتمع الى طبقات بحيث تكون مفردات كل طبقة متجانسة بقدر الامكان وتؤخذ العينة من هذه الطبقات ويجب أن تختار العينة (وهى عبارة عن عينة عشوائية بسيطة) بنسبة مكونات كل طبقة فمثلا اذا كان لدينا مجتمع من الجنود فيكون من ٢٠٠ فرد كان منهم ٨٠ قصيرى القامة والباقين طوال القامة ، وأردنا اختيار عينة من عشرة جنود فاننا نقسم المجتمع الـــى طبقتين طبقة قصيرى القامة وطبقة طوال القامة ، وتأخذ من كل منهم عينة عشوائية بسيطة عــدد مفرداتها ٦ من طوال القامة المجتمع ، ٤ من قصيرى القامة المجتمع ومثال آخر عند دراسة مستوى الدخل فاننا نقسم المجتمع الى طبقات منها مجتمع ذو دخول منخفضة ومجتمع ذو دخول مرتفعة وتأخذ من كل من الطبقتين عينة عشوائية بسيطة وتكون العينة الطبقية بنسبة مكونات كل طبقة أو بالنسبة الى تكاليف البحث بالعينة فى كل طبقة .

(٣) العينة العشوائية المتعددة المراحل :

عند دراسة تكاليف المعيشة (التى تساعد الى حد كبير للحكم على مستوى رفاهية الشعـــب وتعطى الاساس لكل أنواع حسابات التخطيط للاسرة فى الريف والحضر فى محافظة ما فـــان العمل ميدانى بالنسبة للاسر باهظ التكاليف ولذا فاننا نلجأ الى العينة وتكون مفردات العينة على مجموعة من المراحل منها أن تقسم المحافظة الى مجموعة المدن والريف وتختار من كـــل مدينة عينة من الأسر يكون مجموعة الاسر من المدن كما تختار من كل قرية عينة من الأسر وتكـون مجموعة الأسر من الريف ويمكن تحديد تكاليف المعيشة لكل من الريف والحضر من هاتـــين العينتين .

نجد أن العينة المتعددة المراحل هى تلك العينة التى تتوصل اليها فى جمع مفرداتها على عدة مراحل :

تكون العينة طبقية ومتعددة المراحل كما فى المثال السابق مثلا اذا أردنا دراسة تكاليف المعيشة فى الريف والحضر من العينة المتعددة المراحل بالنسبة الى مفردات العينة من الريف ومن الحضر تكون منها عينة طبقية .

ونرى أنه عند اتخاذ أسلوب العينات فى جمع البيانات فانه يجب أن تكون العينة المأخوذة ممثلة تمثيلا تاما للمجتمع محل الدراسة كما أنه يجب أن تكون الاخطاء فى الاختيار أقل ما يمكن .

ويعتمد اختيار أسلوب جمع البيانات سواء بالحصر الشامل أو بأسلوب العينات على عوامل كثيرة منها :

(١) طبيعة المجتمع : فقد يكون المجتمع موجودا بحيث يمكن تحديد جميع مفرداته والوصول اليها فاننا فى هذه الحالة يمكن أن نتبع أسلوب الحصر الشامل مثل تعداد السكان . أو أنه يكون نجد محدود المفردات وتستحيل معرفته جميع افراد المجتمع محل الدراسة فلذا فاننا نتبع أسلوب الحصر الجزئى (العينة) فى جمع البيانات مثلا عند تحليل دم شخص يأخذ عينه منه ويتحتم ضرورة اختيار أسلوب العينة وليس أسلوب الحصر الشامل .

(٢) الامكانيات المادية والفنية المتاحة للبحث تحدد الأسلوب الملائم فى جمع البيانات مثلا عند دراسة سنوى الدخل فى الجمهورية العربية المتحدة قد نتبع أسلوب الحصر الشامل أو الحصر الجزئى وذلك تبعا للامكانيات المادية والفنية المتاحة للبحث .

<u>الخطـوة الرابعة</u> : وضع هياكل الجداول الاحصائية .

بعد عملية جمع البيانات ومراجعاتها للتأكد من صحتها نجرى لها أهم مرحلة من مراحل التحليل وهى تجميع البيانات فى مجموعات ونجرى هذه العملية على الماكينات الحاسبة (على ماكينة الفرز) تقوم بفرز البطاقات الخاصة بذلك طبقا للخصائص المعينة عليها . ويمكن أن تقوم الماكينة بالاضافة الى عملية الفرز بعد البطاقات فى كل مجموعة وبعد هذه العملية يمكن احداث الجداول الاحصائية . وتسمى ترتيب البيانات حيث تكون جميعها فى أعمدة أفقية ورأسية ذات عناوين أفقية ورأسية محدودة بالجدول الاحصائى فمثلا اذا كانت البيانات لاعمار ٢٥ طفلا هى :

٧	٥	٦	٤	٤
٧	٦	٤	٦	٥
٥	٦	٥	٧	٤
٦	٨	٨	٥	٦
٦	٦	٦	٨	٧

ونرى أن المدى بين أكبر عمود وأصغر عمود هو ٨ ـ ٤ = ٤

ونجرى عملية التفريغ للبيانات ٠

أولا : بسهولة يمكن ترتيب البيانات تصاعديا أو تنازليا وتفريغ البيانات على الوجه التالى :

جدول رقم (١)

السن	التفريغ	عدد الأطفال (التكرار)
٤	////	٤
٥	~~////~~	٥
٦	~~////~~ ////	٩
٧	////	٤
٨	///	٣
المجموع		٢٥

وبعد اجراء هذه العملية نصل الى الجدول المطلوب على صورة عمودين الاول والثالث ويسمى جدول توزيع الأطفال بالنسبة الى أعمارهم ويلاحظ أن مثل هذا الجدول يعتبر أبسط أنواع الجداول الاحصائية وهى عبارة عن توزيع المفردات بالنسبة الى ظاهرة واحدة ٠

ومن الممكن الوصول الى جدول يمثل توزيع مفردات العينة بالنسبة الى أكثر من ... فى هذه الحالة بالجدول المركب فمثلا قد يكون الجدول السابق حسب نوع الأطفال كما يلى

جـــــدول رقم (٢)

الاعمـــار	عدد الذكور	عدد الاناث	عدد الاطفال
٤	٣	١	٤
٥	٣	٢	٥
٦	٦	٣	٩
٧	١	٣	٤
٨	٣	ـ	٣
المجموع	١٦	٩	٢٥

وقد يكون المدى بين أكبر وأصغر قيمة كبيرا كما فى المثال التالى بين الدخل السنوى

١١٩	٤٣٥	٢٠٣	٢٧٢	٢٠٤
٣٩٩	٢٥٥	١٧٨	١٨٣	٢٧٠
١٨٨	٣٠٨	٢٢٨	٢٠٩	٤١٢
٢١٩	١٨٧	١٥٥	١٢٤	٢١٣
٢٦٨	١٢١	٢٧٥	١٥٢	٤٣١
٢٩٨	٢٢١	٢٤٦	٢١٧	٢٧١
٤٤٩	٣٢٦	١٥٤	٢٤٩	٣٠٥
٤١٩	٢٢٠	١٦٣	١٥٥	٤٢٧

نرى أن المدى هو ٤٣٥ ـ ١١٩ = ٣١٦

نقسم هذا المدى الى فئات التالية :

١٥٠ فأقل

أكثر من ١٥٠ حتى ٢٥٠ وتكتب ١٥٠ ـ ٢٠٠

أكثر من ٢٠٠ حتى ٢٥٠ وتكتب ٢٠٠ ـ ٢٥٠

أكثر من ٢٥٠ حتى ٣٠٠ ٢٥٠ ـ ٣٠٠

أكثر من ٣٠٠ حتى ٣٥٠ ٣٠٠ ـ ٣٥٠

أكثر من ٣٥٠ حتى ٤٠٠ ٣٥٠ ـ ٤٠٠

أكثر من ٤٠٠ ٤٠٠ ـ

نلاحظ أن بين كل فئتين متتاليتين يوجد حد فاصل مشترك هذا الحد يجب أن ينسب الى احدى الفئتين .

ويمكن تفريغ الجدول بهذه الطريقة ونحصل على

جدول رقم (٣)

فئات الدخول	عدد العمال
ـ ١٥٠	٣
١٥٠ ـ ٢٠٠	٨
٢٠٠ ـ ٢٥٠	١٠
٢٥٠ ـ ٣٠٠	٩
٣٠٠ ـ ٣٥٠	٣
٣٥٠ ـ ٤٠٠	١
٤٠٠ ـ ٤٥٠	٦
المجموع	٤٠

ويمكن زيادة وضوح الجدول بجعل المدى بين كل فئتين أكبر فلو أخذنا المدى مائه فاننا نحصل على الجدول التالى :

جدول رقم (٤)

عدد العمال	فئات الدخول
٣	ـ ١٥٠
١٨	١٥٠ ـ ٢٥٠
١٢	٢٥٠ ـ ٣٥٠
٧	٣٥٠ ـ ٤٥٠
٤٠	المجموع

وتسمى الجداول (٣) ، (٤) بالجداول التكرارية وقد تؤخذ المدى بين كل فئتين غير متساوى ومن الجدول (٢) قد يأتى سؤال ما هو عدد العمال الذين دخولهم أقل من ٢٥٠ والجواب هو أن تجمع

٣ + ٨ + ١٠ = ٢١

أو معرفة الذين دخولهم أكثر من ٢٥٠ فتكون النتيجة هو

٩ + ٣ + ١ + ٦ = ١٩

ولذا فانه يمكن تكوين جداول أخرى بطريقة التجميع مثل

جدول رقم (٥)

فئات الدخول	العمال (التكرارات)
أقل من ١٥٠	٣
أقل من ٢٠٠	١١
أقل من ٢٥٠	٢١
أقل من ٣٠٠	٣٠
ـ ٣٥٠	٣٣
ـ ٤٠٠	٣٤
ـ ٤٥٠	٤٠

جدول رقم (٦)

فئات الدخول	التكرارات
١٠٠ ـ	٤٠
١٥٠ ـ	٣٧
٢٠٠ ـ	٢٩
٢٥٠ ـ	١٩
٣٠٠ ـ	١٠
٣٥٠ ـ	٧
٤٠٠ ـ	٦
٤٥٠ ـ	٥

ويسمى الجدول (٥) بالجدول المتجمع الصاعد والجدول (٦) بالجدول المتجمع الهابط .

وقد يحدث فى بعض الحالات أن يكون لدينا بيانات عن ظاهرتين تربط بعضهما ببعض علاقة ما ويلـــزم لنا تفريغ هذه البيانات ، فاننا نحصل على ما يسمى بالجدول التكرارى المزدوج فمثلا عند سؤال ٤٠ عامل عن سنه ودخله ، فاننا نحصل على الجدول التالى :

جـدول رقم (٧)

فئات السن / فئات الدخل	٣٥ _ ٤٠	٤٠ _ ٤٥	٤٥ _ ٥٠	٥٠ _ ٥٥	المجموع
١٥٠ _	٢	١	—	—	٣
١٥٠ _ ٢٥٠	٥	٦	٤	٣	١٨
٢٥٠ _ ٣٥٠	—	٥	٣	٤	١٢
٣٥٠ _ ٤٥٠	—	—	٢	٥	٧
المجموع	٧	١٢	٩	١٢	٤٠

ونرى أن التكرار الكلى المقابل لفئات الدخل هو ٣ ، ١٨ ، ١٢ ، ٧ يكون ما يسمى بالتوزيع الهامشى لفئات الدخل .

وكذا فان التكرار المقابل لاعمار العمال ٧ ، ١٢ ، ٩ ، ١٢ يسمى الهامش لاعمار العمـــال ونلاحظ أنه فى الحياه العملية كثير من الظواهر يربط بينهما علاقات ويمكن تكوين جدول تكـــرارى مزدوج أى يمكن تكوين جدول مزدوج لأى ظاهرتين بهما علاقة ما .

التمثيل البيانـــى :_

نعلم أن البيانات بشكلها فى استمارة البحث تحمل كثير من المعانى الصماء . ولذا فاننـــا حاولنا أن تجعلها فى شكل يمكن الاستفادة منه والا وهى والجداول الاحصائية ولكن هذه الجداول

لا يصل الى فهمهما الا المتخصصين فضلا عن أن الأرقام عادة لا تستهوى انتباه القارئ ، فلذا فاننا نلجأ الى تمثيل البيانات بيانيا ، اذا أن التمثيل البيانى من أهم الوسائل التى تساعد على تقبل الحقائق وتذكرها . كما أن التمثيل البيانى لا تستخدم فقط لتمثيل المقادير بل لتبويب الحقائق وتوزيعها حسب زمن وقوعها وتوضع الرسوم البيانية لغرضين

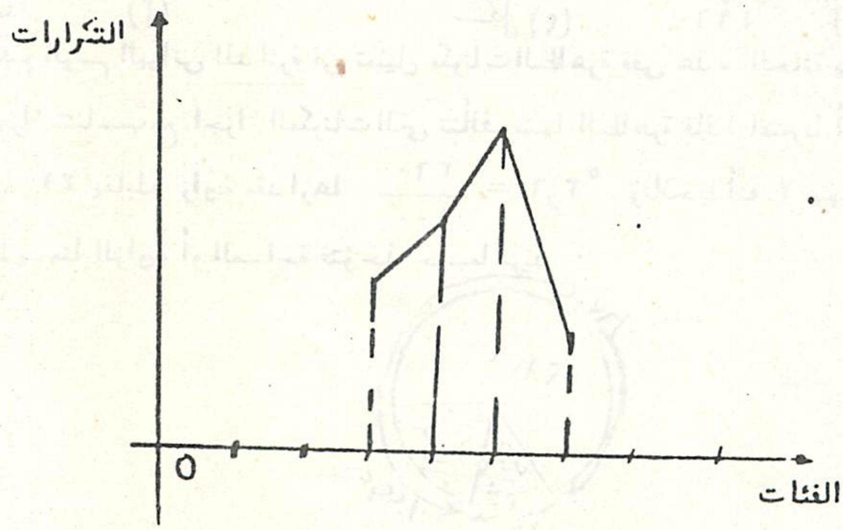
أولا : لتوضيح جوهر الظاهرة التى محل البحث للباحث نفسه

ثانيا : لزيادة الوضوح عند الحديث عن النتائج لغرض تبسيطها .

وينقسم التمثيل الهندسى للظاهرة سواء كانت من ناحية مكوناتها أو تغيرها بالنسبة الى الزمن الى رسوم بيانية فى .

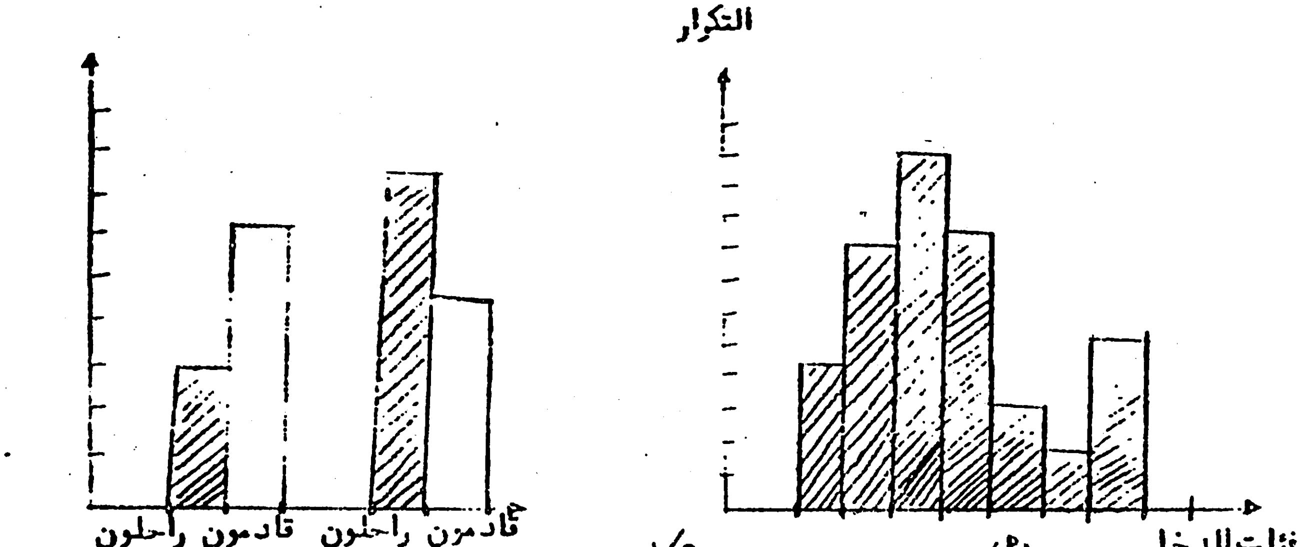
(١) مقياس واحد (بعد واحد)

منها الخطية والعمودية والقطاعية وأكثر أنواع الرسومات انتشار . وهى عبارة عن الرسم البيانى للتوزيع بحيث تؤخذ الفئات على المحور الأفقى وتؤخذ التكرارات على المحور الرأسى كما فى الرسم التالى :



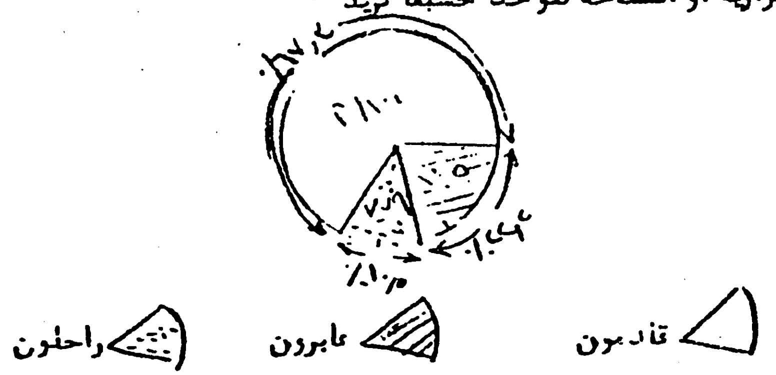
شكل (١) رسوم خطية

رسوم ذات أعمدة تستخدم فى تمثيل البيانات بحيث يكون مساحة العمود يمثل قيمة الوجه التى يمثله . ولما كانت مساحة العمود عبارة عن القاعدة × الارتفاع . واذا أخذنا القواعد متساوية يصبح مساحات هذه الأعمدة متناسب مع الارتفاع كما فى الرسم ، كما أنه فى حالة الجداول التكرارية ذات الفئات المتساوية فان ارتفاع الأعمدة متناسبة مع التكرارات .



شكل (٢)

ويستخدم الرسم البيانى للدائرة فى تمثيل مكونات الظاهرة ففى هذه الحالة يقسم محيط الدائرة الى اجزاء تتناسب مع اجزاء المكونات التى تتألف منها الظاهرة فاذا اعتبرنا أن المجموع مساويا ١٠٠٪ فان كل ١٪ يقابله زاوية مقدارها $\frac{٣٦٠}{١٠٠}$ = ٣٫٦° ونلاحظ أنه لا يهمنا مساحة الدائرة بل فقط يهمنا الزاوية أو المساحة فتؤخذ حسبما نريد .



شكل (٣) حركة الركاب فى احدى الموانى بالألف

وتوجد رسوم فى ثلاث أبعاد يمكنها تمثيل القادير الاحصائية بصورة حجوم أو أجسام مختلفة وتستخدم مثل هذه مقارنة حجم الانتاج فى سنين مختلفة يمكن رسم شكل ذات حجوم متغيرة فنرسم حجما أكبر لتمثيل انتاجا أكبر ولا يمكن أن ننظر أن تمثيل نسبة الحجوم بواقعة النسب البيانات الاحصائية . ولذلك فاننا هنا ينقصنا الدقة ولكن الوضوح كبير على سلوك الانتاج خلال فترة من الزمن .

المدرج التكـــــرارى :

تعريـــف : مركز الفئة هو عبارة عن نصف مجموع حدى الفئة أو الحد الأدنى نفسه مضافا اليها نصف طول الفئـــــة .

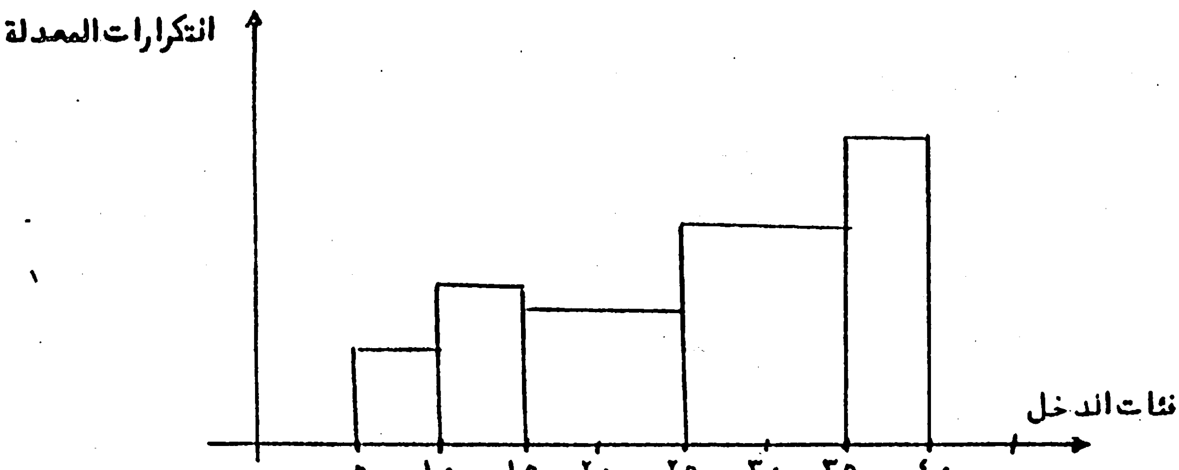
ونفرض أن بيانات الدخل لعدد ٤٠ من العمال موزعة فى الجدول (٣) ونلاحظ أن الفئات متساوية عدا الفئة الأخيرة من حيث الطول وأن طول كل منهم ٥٠ وحدة كما أن الفئة الأولى والأخيرة مفتوحة ، ولذا فاننا نجعل طولى هاتين الفئتين مثيلا لأطوال الفئات الأخرى فاذا مثلنا كل فئة بعمود فلابد أن يكون هذه الاعمدة متلاصقة لأن الفئات متلاصقة وعلى ذلك فاننا نمثل تكرار كل فئة بعمود يقام على هذه الفئة وتكون مساحته متناسبة مع التكرار ، حيث أن الفئات كلها متساوية كما فى الرسم الشكل (٢) .

أما اذا كانت الفئات فى الجداول غير متساوية فاننا نبدأ أولا بتعديل التكرارات وذلك بقسمة التكرار المقابل على طول الفئة وبعد ذلك تمثل تكرار كل فئة بعمود طوله مناسب مع التكرار المعدل فمثلا فى الجدول التكرارى التالى يمثل دخل ٤٠ عاملا فى الشهر هو

جدول رقم (٨)

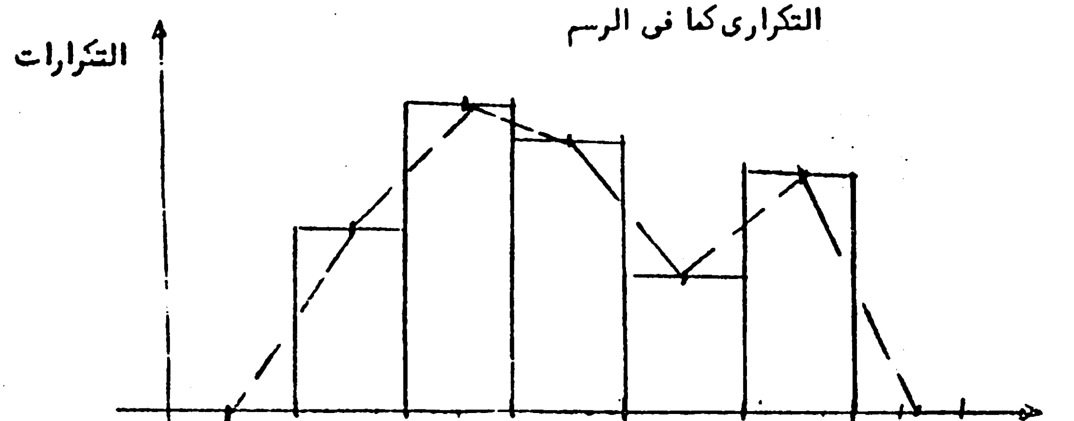
فئات الدخل	عدد العمال	طول الفئة	التكرار المعدل
٥ ـ ١٠	٤	٥	٤/٥ = ٨ر
١٠ ـ ١٥	٦	٥	٦/٥ = ٢ر١
١٥ ـ ٢٠	١٠	١٠	١٠/١٠ = ١
٢٥ ـ ٣٥	١٢	١٠	١٢/١٠ = ٢ر١
٣٥ ـ ٤٠	٨	٥	٨/٥ = ٦ر١
المجموع	٤٠		٨ر٥

والمدرج التكراري كما مبين بالرسم



شكل رقم (٤)

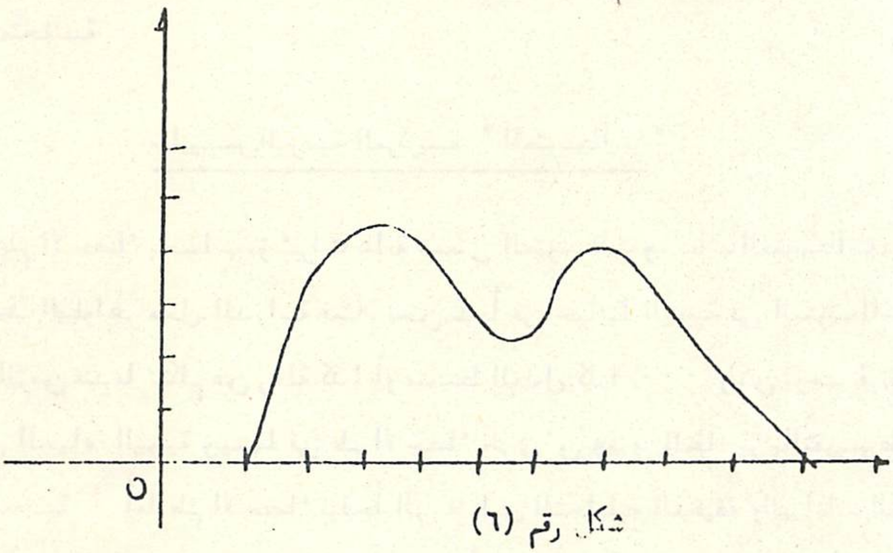
المضلع التكراري : لرسم المضلع التكراري فاننا نوصل بين منتصف الفئات بالنسبة الي المدرج التكراري كما في الرسم



شكل رقم (٥)

ونلاحظ من الرسم أن المساحة أسفل المضلع التكراري تمثل تقريبا مجموع التكرارات .

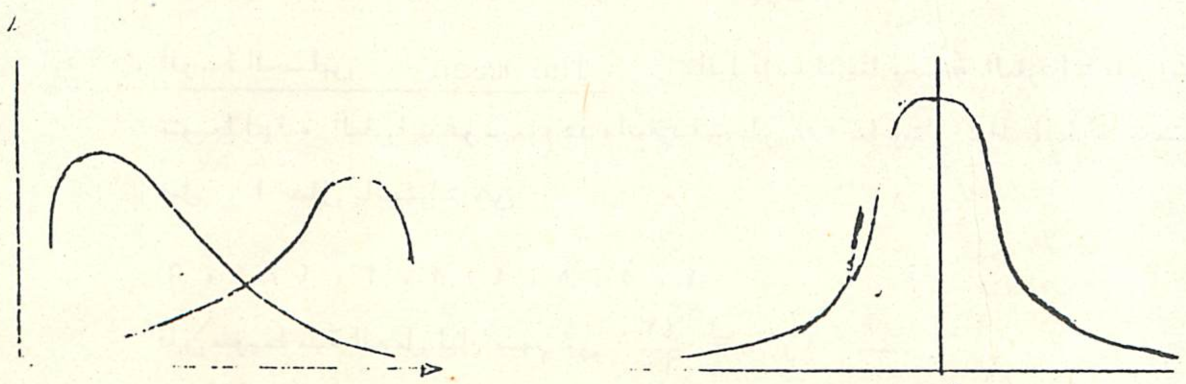
المنحنيات التكرارية : اذا مهدنا المضلع التكراري بمنحنى نسمي المنحنى الناتج بالمنحنى التكراري كما في الشكل (٦)



شكل رقم (٦)

ونلاحظ أن المساحة أسفل هذا المنحنى تمثل مجموع التكرارات ونرى أن مجموعة المنحنيات قد تكون وحيدة القمة ويمكن تقسيمها الى :

(١) منحنيات متماثلة وهي التي تكون قمتها عند مركزها وتكون متماثلة حول مركزها وأهم هذه المنحنيات ما يسمى بالمنحنى المعتاد كما في الشكل (٧) (أ)



(أ) ب

شكل رقم (٧)

(٢) منحنيات ملتوية : وهى التى لا تكون متماثلة وقد تكون قمة المنحنى عن يمين أو يسار مركزها كما فى الشكل (٧ — ب)

وقد يوجد منحنيات بها أكثر من قمة كما فى الشكل (٦) وهذا يمثل على أن الظاهرة محل البحث غير متجانسة .

مقاييس النزعة المركزية " المتوسطات "

يقوم علم الاحصاء بحساب مؤشرات هامة تسمى المتوسطات وحساب المتوسطات هو أكثر الطرق انتشارا لوصف الظواهر محل الدراسة فمثلا نحن نلجأ فى حياتنا اليومية فى المتوسطات فمثلا قد نقول أن متوسط الزمن عندما نتكلم عن رحلة كذا أو متوسط الطول كذا ... ولكن يوجد فرق كبير من هذه المقادير فى الحياه اليومية وبينها فى علم الاحصاء ونرى أن هذه المقادير بالتقريب على أساس الخبرة الشخصية . أما علم الاحصاء فيلجأ الى الطرق التحليلية الدقيقة والبيانات الكثيرة عن الظاهرة . ولذا فان المتوسطات الاحصائية ذات أهمية كبرى فهى تمثل الظاهرة التى محل البحث ولكن هذا التمثيل يظهر فقط عندما تكون البيانات المعطاه بيانات سليمه فمثلا لا يعقل أن نجمع بيانات عن الدخل من مجموعة أحدهما منخفض دخلها جدا والآخرى مرتفع دخلها جدا فنرى أن النتيجة لا تمثل مستوى الدخل ككل .

من المتوسطات : الوسط الحسابى — الوسيط — المنوال

أولا : الوسط الحسابى The mean : اذا كانت لدينا مجموعة المفردات فان أبسط متوسط لهذه المقررات هو مجموع هذه المفردات على عددها ومثال ذلك اذا كانت مدة عمل ١٠ عمال بالسنوات هى

٦ ، ٤ ، ٤ ، ٣ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٥ ، ٤ ،

فان متوسط مدة العمل لكل منهم هى $\frac{٤٣}{١٠}$ = ٤٫٣ سنة

ويسمى المقدار بالناتج بالمتوسط الحسابى

ويمكن حل نفس المثال وذلك بتقسيم العمال الى مجموعات حسب مدة عملهم واعداد جدول تكرارى كما يلى :

جدول رقم (٩)

مدة العمل (س)	عدد العمال (التكرارات ك)	حاصل الضرب = ك س
٣	٢	٦
٤	٤	١٦
٥	٣	١٥
٦	١	٦
المجموع	١٠	٤٣

أى أنه تحسب مدة العمل المتوسط نضرب أرقام العمود الأول مدة العمل (س) فى أرقام العمود الثانى (التكرارات ك) وجمع حاصل الضرب ثم قسم المجموع على العدد الكلى للعمال فنحصل على متوسط قدره ٣ر٤ ويسمى بالوسط الحسابى التكرارى ٠

ومثال آخر نفرض أن الأجر اليومى (بالقرش) لعدد عشرين عامل هو

٨٠ ، ٨٦ ، ٨٦ ، ٩٢ ، ٩٢ ، ٩٢ ، ٩٨ ، ٩٨ ، ٩٨ ، ٩٨ ، ٩٨ ، ١٠٥ ، ١٠٥ ، ١٠٥ ، ١٠٥ ،
١١٠ ، ١١٠ ، ١٤ ، ١١٨ ، ١٢٠ ، ١٣٠

فان متوسط الأجر لكل منهم هو $\frac{٢٠٣٥}{٢٠}$ = ٧٥ر١٠١ قرشا (١)

وجبريا اذا كان عدد العمال هو ن وأن مفردات الدخل هى

$س_١ ، س_٢ ، ٠٠٠٠ ، س_ن$

فان المتوسط $\bar{س} = \dfrac{\sum_{1}^{ن} س}{ن}$

ويمكن الوصول الى النتيجة (١) بتقسيم العمال الى مجموعات حسب الأجر واعداد جدول تكــــرارى كما يلى

جدول رقــم (١٠)

الأجر اليومى (س) بالقـروش	عـدد العمـال التكرارات ك	ك س
٨٠	١	٨٠
٨٦	٢	١٧٢
٩٢	٣	٢٧٦
٩٨	٥	٤٩٠
١٠٥	٣	٣١٥
١١٠	٢	٢٢٠
١١٤	١	١١٤
١١٨	١	١١٨
١٢٠	١	١٢٠
١٣٠	١	١٣٠
المجموع	٢٠	٢٠٣٥

أى نحسب متوسط الأجر بضرب أرقام العمود الأول (الأجر اليومى س) فى أرقام العمود الثانـــــى (التكرارات ك) وجمع حاصل الضرب ثم قسمة المجموع على العدد الكلى للعمال فنحصل على متوسـط قدرة $\dfrac{٢٠٣٥}{٢٠}$ = ١٠١٫٧٥ قرشا

وجبريا اذا كان الأجر $س$ يأخذ القيم $س_١$ ، $س_٢$ ، ... ، $س_ن$ والتكرارات لها $ك_١$ ، $ك_٢$ ، ..... ، $ك_ن$

$$\text{حيث } ك_١ + ك_٢ + \cdots + ك_ن = \text{مجموع الكلى للعمال}$$

$$\text{فان المتوسط } \bar{س} = \frac{ك_١ س_١ + ك_٢ س_٢ + \cdots + ك_ن س_ن}{ك_١ + ك_٢ + \cdots + ك_ن}$$

$$\therefore \quad \bar{س} = \frac{\text{مج } ك\ س}{\text{مج } ك}$$

ففى الجدول التكرارى التالى (يمثل أجر ٥٠٠ عامل)

جدول رقم (١١)

فئات الأجر	مركز الفئة س	التكرارات ك عدد العمال	ك س
٥٠ ـ ٦٠	٥٥	٣٠	١٦٥٠
٦٠ ـ ٧٠	٦٥	٤٠	٢٦٠٠
٧٠ ـ ٨٠	٧٥	٧٠	٥٢٥٠
٨٠ ـ ٩٠	٨٥	١٢٠	١٠٢٠٠
٩٠ ـ ١٠٠	٩٥	٩٥	٩٠٢٥
١٠٠ ـ ١١٠	١٠٥	٨٠	٨٤٠٠
١١٠ ـ ١٢٠	١١٥	٥٠	٥٧٥٠
١٢٠ ـ ١٣٠	١٢٥	١٥	١٨٧٥
المجموع	ـ	٥٠٠	٤٤٧٥٠

$$\left(\text{مركز الفئه} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة} + \text{الحد الأعلى}}{٢} \right)$$

متوسط الأجر اليومى للعامل (بالقرش) هو

$$\bar{س} = \frac{\text{مج ك س}}{\text{مج ك}} = \frac{٤٤٧٥٠}{٥٠٠} = ٨٩٫٥ \text{ قرشا}$$

ملحوظة : اذا كان الدخل مفتوح الى أسفل أو الى أعلى ، فانه لا يمكن ايجاد المتوسط الا اذا حددنا الفئة الأولى أو الأخيرة . كما فى الجدول السابق .

خصائص الوسط الحسابى :-

(١) حاصل ضرب الوسط الحسابى فى مجموع التكرارات يساوى مجموع حاصل ضرب التكرار فى القيمة وجبريا يمكن كتابتها على الصورة

$$\bar{س} \text{ مج ك} = \text{مج ك س}$$

ففى المثال السابق نرى أن

$$\bar{س} \text{ مج ك} = ٨٩٫٥ \times ٥٠٠ = \text{مج ك س} = ٤٤٧٥٠$$

(٢) اذا أخذ من كل قيمة من القيم أى عدد وليكن أ فان المتوسط الجديد يقل عن الأول بمقدار أ وجبريا يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{\text{مج (س – أ) ك}}{\text{مج ك}} = \bar{س} - \text{أ}$$

$$\text{ومنها فان } \bar{س} = \frac{\text{مج (س – أ) ك}}{\text{مج ك}} + \text{أ}$$

ففى المثال السابق اذا افترضنا أن أ = ٥٥ فان الوسط الحسابى الجديد يساوى

$$٨٩٫٥ - ٥٥ = ٣٤٫٥$$

جدول رقم (١٢)

حساب الوسط الحسابى عند أ = ٥٥

فئات الأجر (بالقرش)	مركز الفئة س	س ـ أ	التكرارات ك عدد العمال	(س ـ أ) ك
٥٠ ـ ٦٠	٥٥	صفر	٣٠	صفر
٦٠ ـ ٧٠	٦٥	١٠	٤٠	٤٠٠
٧٠ ـ ٨٠	٧٥	٢٠	٧٠	١٤٠٠
٨٠ ـ ٩٠	٨٥	٣٠	١٢٠	٣٦٠٠
٩٠ ـ ١٠٠	٩٥	٤٠	٩٥	٣٨٠٠
١٠٠ ـ ١١٠	١٠٥	٥٠	٨٠	٤٠٠٠
١١٠ ـ ١٢٠	١١٥	٦٠	٥٠	٣٠٠٠
١٢٠ ـ ١٣٠	١٢٥	٧٠	١٥	١٠٥٠
المجموع	ـ	ـ	٥٠٠	١٧٢٥٠

من هذا الجدول نجد أن $\overline{س} - أ = \frac{مج\,(س - أ)\,ك}{مج\,ك} = \frac{١٧٢٥٠}{٥٠٠} =$ ٥ر٣٤ قرشا

ومنها فان $\overline{س} = ٥٥ + ٥ر٣٤ =$ ٥ر٨٩ قرشا

(٣) اذا أضفنا أى عدد وليكن أ لكل من القيم فان الوسط الحسابى يزيد بمقدار القيمة أ

وجبريا يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{مج\,(س + أ)}{مج\,ك} = \overline{س} + أ$$

ومنها فان $\overline{س} = \frac{مج\,(س + أ)\,ك}{مج\,ك} - أ$

نرى أن الخاصية الثانية والثالثة هى أن اضافة أو طرح قيمة ثابتة من كل القيم فيكون الوسط الحسابى الأصلى للقيم هو طرح أو اضافة هذه القيمة الثانية الى الوسط الحسابى الجديد .

(٤) اذا قسمنا كل من القيم على عدد ثابت أ فان الوسط الحسابى الجديد يقل فى أ مرة

وجبريا يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{\bar{س}}{أ} = \frac{مجـ \frac{س}{أ} . ك}{مجـ ك}$$

ومنها فان

$$\bar{س} = أ . \frac{مجـ \frac{س}{أ} . ك}{مجـ ك}$$

فمثلا فى المثال السابق اذا فرض أن أ = ٥ فان الوسط الحسابى الجديد يساوى

$$\frac{٨٩٫٥}{٥} = ١٧٫٩$$

جدول رقم (١٣)

حساب الوسط الحسابى عند أ = ٥

فئات الأجور (بالقرش)	مركز الفئة س	$\frac{س}{أ} = \frac{س}{٥}$	التكرار ك عدد العمال	$\frac{س}{أ}$. ك
٥٠ — ٦٠	٥٥	١١	٣٠	٣٣٠
٦٠ — ٧٠	٦٥	١٣	٤٠	٥٢٠
٧٠ — ٨٠	٧٥	١٥	٧٠	١٠٥٠
٨٠ — ٩٠	٨٥	١٧	١٢٠	٢٠٤٠
٩٠ — ١٠٠	٩٥	١٩	٩٥	١٨٠٥
١٠٠ — ١١٠	١٠٥	٢١	٨٠	١٦٨٠
١١٠ — ١٢٠	١١٥	٢٣	٥٠	١١٥٠
١٢٠ — ١٣٠	١٢٥	٢٥	١٥	٣٧٥
المجموع	—	—	٥٠٠	٨٩٥٠

من الجدول $\frac{\bar{س}}{أ} = \frac{مج \frac{س}{أ} ك}{مج ك} = \frac{٨٩٥٠}{٥٠٠} = ١٧,٩$ قرشا

ومنها فان الوسط الحسابى هو

$\bar{س} = ١٧,٩ \times أ = ١٧,٩ \times ٥ = ٨٩,٥$ قرشا

(٥) ضرب أى عدد ثابت (أ) فى قيم س يزيد الوسط الحسابى فى عدد أ مرة

وجبريا يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{مج (س \times أ)}{مج ك} = أ \bar{س}$$

ومنها فان $\bar{س} = \frac{١}{أ} \times \frac{مج (س \times أ) \cdot ك}{مج ك}$

(٦) بقسمه أو ضرب كل التكرارات على أى عدد فان تيمة الوسط الحسابى لا يتغير

ففى المثال السابق بقسمه كل التكرارات على ٥٠٠ وضرب فى ١٠٠ (النسبة المئوية) نحصل على الجدول التالى :

جدول رقم (١٤)

فئات الاجر بالقرش	مركز الفئه س	التكرارات ك عدد العمال	$\frac{ك}{٥٠٠} \times ١٠٠$	س × $\frac{ك}{٥٠٠}$ × ١٠٠
٥٠ ـ ٦٠	٥٥	٣٠	٦	٣٣٠
٦٠ ـ ٧٠	٦٥	٤٠	٨	٥٢٠
٧٠ ـ ٨٠	٧٥	٧٠	١٤	١٠٥٠
٨٠ ـ ٩٠	٨٥	١٢٠	٢٤	٢٠٤٠
٩٠ ـ ١٠٠	٩٥	٩٥	١٩	١٨٠٥
١٠٠ ـ ١١٠	١٠٥	٨٠	١٦	١٦٨٠
١١٠ ـ ١٢٠	١١٥	٥٠	١٠	١١٥٠
١٢٠ ـ ١٣٠	١٢٥	١٥	٣	٣٧٥
المجموع	ـ	٥٠٠	١٠٠	٨٩٥٠

من الجدول الوسط =

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ}\ \frac{\text{س} \times \text{ك}}{٥٠٠} \times ١٠٠}{\text{مجـ}\ \frac{\text{ك}}{٥٠٠} \times ١٠٠} = \frac{٨٩٥٠}{١٠٠} = ٨٩٫٥ \text{ قرشا}$$

نرى أن باستخدام الخواص السابقة يمكن حساب الوسط الحسابى بسهولة وذلك لتسهيل العمليات الحسابية الكبيرة

(٧) الخاصية الأخيرة يمكن صياغتها على الصورة التالية

مجموع انحرافات القيم عن الوسط الحسابى يساوى صفرا

وجبريا تكتب على الصورة

$$\frac{\text{مجـ}\ (\text{س} - \bar{\text{س}})\ \text{ك}}{\text{مجـ}\ \text{ك}} = \text{صفر}$$

ونبرهن هذه الخاصية بالمثال التالى

جدول رقم (١٥)

فئات الاجر (بالقرش)	مركز الفئات (س)	التكرارات ك عدد العمال	س ـ $\bar{\text{س}}$ = س ـ ٨٩٫٥	(س ـ $\bar{\text{س}}$) ك
٥٠ ـ ٦٠	٥٥	٣٠	٥٥ ـ ٨٩٫٥ = ـ ٣٤٫٥	ـ ١٠٣٥
٦٠ ـ ٧٠	٦٥	٤٠	٦٥ ـ ٨٩٫٥ = ـ ٢٤٫٥	ـ ٩٨٠
٧٠ ـ ٨٠	٧٥	٧٠	٧٥ ـ ٨٩٫٥ = ـ ١٤٫٥	ـ ١٠١٥
٨٠ ـ ٩٠	٨٥	١٢٠	٨٥ ـ ٨٩٫٥ = ـ ٤٫٥	ـ ٥٤٠
٩٠ ـ ١٠٠	٩٥	٩٥	٩٥ ـ ٨٩٫٥ = ٥٫٥	٥٢٢٫٥
١٠٠ ـ ١١٠	١٠٥	٨٠	١٠٥ ـ ٨٩٫٥ = ١٥٫٥	١٢٤٠
١١٠ ـ ١٢٠	١١٥	٥٠	١١٥ ـ ٨٩٫٥ = ٢٥٫٥	١٢٧٥
١٢٠ ـ ١٣٠	١٢٥	١٥	١٢٥ ـ ٨٩٫٥ = ٢٥٫٥	
المجموع	ـ	٥٠٠	ـــــ	[illegible] ـ [illegible]٧٠ +

ويمكن استخدام الخواص السابقة مع بعضها عند ايجاد الوسط الحسابى لمجموعة من القيم وذلك بطرح أو اضافة عدد الى القيم ثم نقسم على عدد آخر ثم بالضرب فى عدد آخر والى أن نصل الى أبسط القيم التى يمكن حسابها بسهولة فمثلا الاجر الشهرى (بالجنيه) لعدد ٥٠ عامل موزع كالتالى :

فئات الأجر :	صفر ـ	٥ـ	١٠ـ	١٥ـ	٢٠ـ	٢٥ـ	٣٠ـ٣٥	المجموع
التكرارات عدد العمال :	٤	٨	١٠	١٠	١٠	٦	٢	٥٠

عند حساب متوسط الأجر يكون الجدول التالى

فئات الاجر (بالجنيه)	مركز الفئات س	ص = س ـ ١٧٫٥	ل = $\frac{\text{س ـ ١٧٫٥}}{\text{٥}}$	التكرارات ك	$\frac{\text{س ـ ١٧٫٥}}{\text{٥}}$ × ك
صفر ـ	٢٫٥	ـ ١٥	ـ ٣	٤	ـ ١٢
٥ ـ	٧٫٥	ـ ١٠	ـ ٢	٨	ـ ١٦
١٠ ـ	١٢٫٥	ـ ٥	ـ ١	١٠	ـ ١٠
١٥ ـ	١٧٫٥	صفر	صفر	١٠	صفر
٢٠ ـ	٢٢٫٥	٥	١	١٠	١٠
٢٥ ـ	٢٧٫٥	١٠	٢	٦	١٢
٣٠ ـ ٣٥	٣٢٫٥	١٥	٣	٢	٦
المجموع	ـ	ـ	ـ	٥٠	ـ ١٠

من الجدول

$$= \frac{\text{ـ ١٠}}{\text{٥٠}} = \text{ـ ٠٫٢}$$

$$\bar{\text{ص}} = \frac{\frac{\text{٥ مجـ (س ـ ١٧٫٥) ك}}{\text{٥}}}{\text{مجـ ك}} = \text{٥} \times \text{ـ ٠٫٢} = \text{ـ ١}$$

ومنها فان $\bar{س}$ = ١٧٫٥ — ١ = ١٦٫٥ جنيها

ثانيا : الوسيط median

تعريف : الوسيط لمجموعة من القيم لمتغير ما هو قيمة المتغير الذى عدد المفردات التى أقل منه يساوى عدد المفردات التى أكبر منه .

كما يمكن تعريفه أيضا بأنه القيمة التى أقل منه ٥٠٪ من المفردات

فمثلا اذا كان لدينا مجموعة من المفردات يمثل أجر العمال وهى

٥ ، ٣ ، ١٢ ، ٩ ، ١٧

لحساب الوسيط نبدأ بترتيب المفردات حسب قيم كل منها أما تصاعديا

٣ ، ٥ ، ٩ ، ١٢ ، ١٧ أو تنازلنا ١٧ ، ١٢ ، ٩ ، ٥ ، ٣

وترى أن الوسيط هو القيمة ٩ حيث يوجد قيمتان أقل منها وقيمتان أكبر منها أما اذا كانت المفردات بالشكل التالى :

٥ ، ٣ ، ١٢ ، ٩ ، ١٧ ، ١٠

فترتب هذه المفردات

٣ ، ٥ ، ٩ ، ١٠ ، ٢٠ ، ١٧

نرى هنا أنه لا يوجد قيمة يكون عدد القيم التى أقل منها يساوى عدد القيم التى أكبر منها ولكن يوجد قيمتين يكون عدد القيم التى أقل منهم يساوى عدد القيم التى أكبر منهم وهذه القيم هى ٩ ، ١٠

وعلى ذلك فان الوسيط فى هذه الحالة يساوى

$$\frac{٩ + ١٠}{٢} = \frac{١٩}{٢} = ٩٫٥$$

وجبريا اذا كان $ح_ر$ هو الحد الرائى فى القيم بعد ترتيبها

فاذا كانت ر فردية

$$\text{فان الوسيط} = ح_{\frac{ر-1}{ن}+1}$$

أما اذا كانت ر زوجية فان

$$\text{الوسيط} = \frac{1}{2}\left(ح_{\frac{ر}{2}} + ح_{\frac{ر}{2}+1} \right)$$

<u>حساب الوسط من الجداول التكراريــــة</u> :

أ : <u>بطريقة الحساب</u>

نفرض الأجر الشهرى لعدد ٢٠ عامل موزع كالتالى

فئات الأجر :	٥ ـ ١٠	١٠ ـ ١٥	١٥ ـ ٢٠	٢٠ ـ ٢٥	المجموع	.
عدد العمال :	٢	١١	٨	٣	٢٠	

من واقع البيانات السابقة نجد أن أجر العمال موزع على فئات متساوية مكتوبة بالترتيب ، وعلى ذلــك فان الوسيط هو القيمة (الأجر) الذى أقل من ١٠ وأكبر من ١٠ من الأجور ، ولتحديد هــذه القيمة تكون الجدول التكرارى الصاعد أو الهابط ·

جدول رقم (١٧)

جدول تكرارى صاعــد

فئات الأجر	التكرارات (عدد العمال)
ـ ٥	صفر
ـ ١٠	٢
ـ ١٥	٩
ـ ٢٠	١٧
ـ ٢٥	٢٠

والسؤال ما هو قيمة الأجر التى أقل من ١٠ وأكبر منه ١٠ من الأجور

من الجدول السابق نرى أن ـ ١٥ نوجد ٩ عمال ، ـ ٢٠ يوجد ١٧ عامل أى أن الوسيط يقع داخل الفترة ١٥ ـ ٢٠

وتسمى الفئة ١٥ ـ ٢٠ بالفئة الوسيطة أى الفئة التى يقع داخلها الوسيط ، وموقع الوسيط داخل هذه الفئة هو كموقع $\frac{ن}{٢} = \frac{٢٠}{١٠} = ١٠$ بين ٩ ، ١٧

أى أن الوسيط يقسم المسافة بين ١٥ ، ٢٠ بنفس النسبة التى تقسم بها العدد ١٠ المسافة من المفردة ٩ ، ١٧ أى بنسبة ١ : ٨

وعلى ذلك فان الوسيط يساوى

$$= ١٥ + \frac{١}{٨} \times ٥ = ١٥٫٦٢٥ \text{ جنيها}$$

$$\text{أو} \quad = ٢٠ - ٥ \times \frac{٧}{٨} = ١٥٫٦٢٥ \text{ جنيها}$$

<u>ومثال آخر :</u>

فى الجدول التالى يمثل أجر يومى ٥٠٠ عامل

جدول رقم (١٨)

فئات الاجر (بالقرش	التكرارات
٥٠ ـ ٦٠	٣٠
٦٠ ـ ٧٠	٤٠
٧٠ ـ ٨٠	٧٠
٨٠ ـ ٩٠	١٢٠
٩٠ ـ ١٠٠	٩٥
١٠٠ ـ ١١٠	٨٠
١١٠ ـ ١٢٠	٥٠
١٢٠ ـ ١٣٠	١٥
المجموع	٥٠٠

نجد أن نصف العمال هو $\frac{ن}{٢} = \frac{٥٠٠}{٢} = ٢٥٠$

والوسيط هو القيمة (الأجر) التى أقل من ٢٥٠ وأكبر من ٢٥٠ من الأجور ولتحديد هذه القيمة يكون الجدول التكرارى الصاعد أو الهابط .

جدول رقم ١٩

جدول تكرارى هابط

فئات الأجور	التكرارات عدد العمال
أقل من ـ ١٣٠	٥٠٠
ـ ١٢٠	٤٨٥
ـ ١١٠	٤٢٥
ـ ١٠٠	٣٥٥
ـ ٩٠	٢٦٠
ـ ٨٠	١٤٠
ـ ٧٠	٧٠
ـ ٦٠	٣٠
ـ ٥٠	صفر

من الجدول السابق نرى أن ـ ٨٠ يوجد ١٤٠ عامل ، ـ ٩٠ يوجد ٢٦٠ عامل أى أن الوسيط تقع داخل الفترة ٨٠ ـ ٩٠ وتسمى بالفئة الوسيطة ، وموقع الوسيط داخل هذه الفترة يقسم المسافة بين ٨٠ ، ٩٠ بنفس النسبة التى تقسم بها العدد ٢٥٠ المسافة بين المفردة ١٤٠ ، ٢٦٠ أى نسبة ١١٠ : ١٠

ومن ذلك فان الوسيط يساوى

$$= ٨٠ + \frac{١١٠}{١٢٠} \times ١٠ = ٨٩,١٦ \text{ قرشا}$$

$$\text{أو} \quad = ٩٠ - \frac{١٠}{١٢٠} \times ١٠ = ٨٩,١٦ \text{ قرشا}$$

وجبريا يمكن حساب الوسيط كالتالى

نفرض أن ل طول الفئة الوسيطة

وأن $\text{ص}_{١}$ ــ الحد الأدنى للفئة الوسيطية

وأن $\text{ص}_{٢}$ ــ الحد الأعلى للفئة الوسيطية

$\text{ك}_{\text{ص}١}$ ــ التكرار المقابل للحد الأدنى

$\text{ك}_{\text{ص}٢}$ ــ التكرار المقابل للحد الأعلى

$$\text{فان الوسيط} = \text{ص}_{١} + \text{ل}\ \frac{\frac{\text{ن}}{٢} - \text{ك}_{\text{ص}١}}{\text{ك}_{\text{ص}٢} - \text{ك}_{\text{ص}١}}$$

$$= ٨٠ + ١٠\ \frac{٢٥٠ - ١٤٠}{٢٦٠ - ١٤٠} = ٨٠ + \frac{١١٠}{١٢٠} \times ١٠ = ٨٩٫١٦ \text{ قرشا}$$

$$\text{أو} = \text{ص}_{٢} + \frac{\text{ل}\left(\frac{\text{ن}}{٢} - \text{ك}_{\text{ص}٢}\right)}{\text{ك}_{\text{ص}٢} - \text{ك}_{\text{ص}١}} = ٩٠ - \frac{١٠}{١٢٠} \times ١٠ = ٨٩٫١٦ \text{ قرشا}$$

<u>مثال ٣</u> : احسب الوسيط مدة العمل لمجموعة ٩٩ عامل موزعة كالتالى

فئات مدة العمل :	٤ ــ ٦	٦ ــ ٨	٨ ــ ١٠	١٠ ــ ١٢	١٢ ــ ١٤	المجموع
عدد العمال :	١٢	١٨	٣٥	٢٢	١٢	٩٩

لحساب الوسيط تكون الجدول التكرارى الصاعد أو الهابط

جدول رقم (٢٠)

جدول تكرارى صاعد

فئات مدة العمل	التكرارات
ــ ٦	١٢
ــ ٨	٣٠
ــ ١٠	٦٥
ــ ١٢	٧٨
ــ ١٤	٩٩

نجد أن نصف العمال هو $\frac{\text{ن}}{٢} = \frac{٩٩}{٢٠} = ٤٩٫٥٠$

نجد أن $\text{ص}_{١} = ٨$ ، $\text{ص}_{٢} = ١٠$ ، $\text{ك}_{\text{ص}_{١}} = ٣٠$ ، $\text{ك}_{\text{ص}_{٢}} = ٦٥$

، ل = ٢

$$\therefore \text{الوسيط} = \text{ص}_{١} + \text{ل} \frac{\frac{\text{ن}}{٢} - \text{ك}_{\text{ص}_{١}}}{\text{ك}_{\text{ص}_{٢}} - \text{ك}_{\text{ص}_{١}}} = ٨ + ٢ \frac{٤٩٫٥ - ٣٠}{٦٥ - ٣٠}$$

$$= ٨ + ٢ \frac{١٩٫٥}{٣٥} = ٨ + ١٫١ = ٩٫١ \text{ سنة تقريبا}$$

$$\text{أ،} \quad = ١٠ - ٢ \frac{١٥٫٥}{٣٥} = ٩٫١ \text{ سنة تقريبا}$$

(ب) حساب الوسيط بطريقة الرسم : (الجدول التكرارى الصاعد أو الهابط أو الآثنين معا)

نفرض أجر ٥٠ عامل شهريا موزعة كالتالى

جدول رقم (٢١)

الاجر بالجنيه	عدد العمال التكرارات
صفر – ١٠	٥
١٠ – ٢٠	٨
٢٠ – ٣٠	١٨
٣٠ – ٤٠	١٢
٤٠ – ٥٠	٧
المجموع	٥٠

نكون الجدول التكرارى الصاعد والهابط

جدول رقم (٢٢)

جدول تكـــراري صاعـــــد

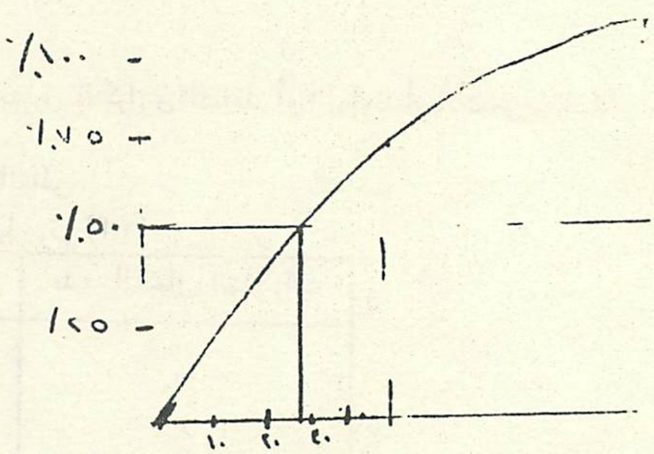
فئات الاجر	عدد العمال	النسبة المئوية
١٠ ـــ	٥	١٠
٢٠ ـــ	١٣	٢٦
٣٠ ـــ	٣١	٦٢
٤٠ ـــ	٤٣	٨٦
٥٠ ـــ	٥٠	٪١٠٠

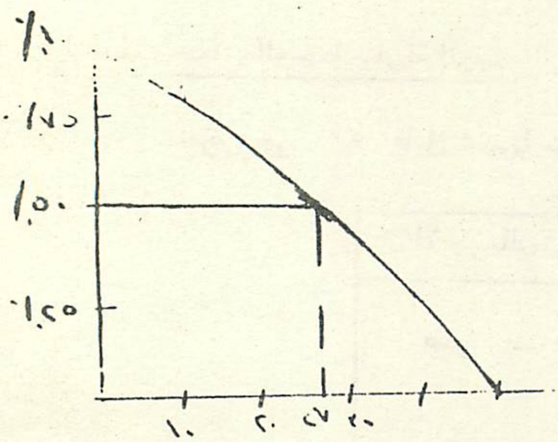
جدول رقم (٢٣)

جدول تكـــراري هابـــــط

فئات الاجر	عدد العمال	النسبة المئوية
صفر ـــ	٥٠	٪١٠٠
١٠ ـــ	٤٥	٪ ٩٠
٢٠ ـــ	٣٧	٪ ٧٤
٣٠ ـــ	١٩	٪ ٣٨
٤٠ ـــ	٧	٪ ١٤
٥٠ ـــ	صفر	٪ صفر

نرسم المنحنى الصاعد والهابط من واقع البيانات من الجدول السابق

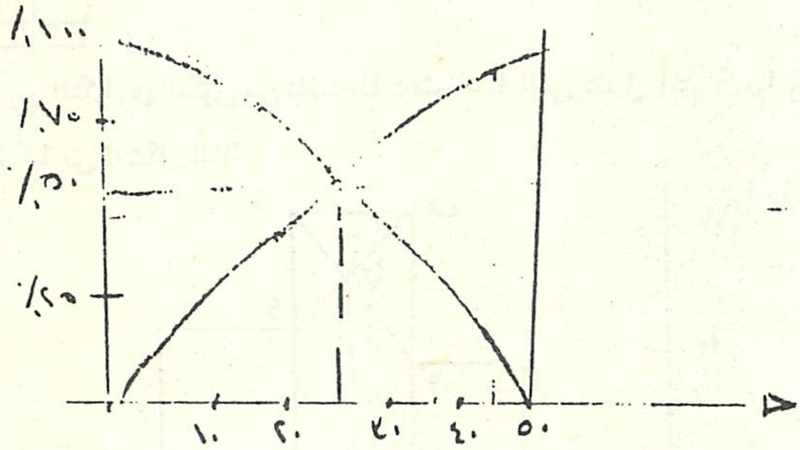




من الرسم السابق وهو المنحنى الصاعد أو الهابط تعين القيمة التى تناظر ٪٥٠ وذلك برسم مستقيم أفقيا منهما يقابل المنحنى فى نفقطة تسقط منها مستقيما رأسيا يقابل المحور الأفقى فى نقطة ونقرأ القيمة فتكون هى قيمة الوسيط ومن الرسم نجد أن

الوسيـــط = ٢٧ تقريبا

ويمكن التوصل الى هذه القيمة برسم المنحنين ومن نقطة تقاطعهما نسقط عمود رأسيا يقابل الـ الأفقى فى نقطة هى تساوى عن قيمة الوسيط كما فى الرسم



ثالثا : **المنوال** mode

تعريف : هو قيمة الأكثر شيوعا (الأكثر تكرارا) بين القيم المعطاه

ويتضح هنا أنه اذا كانت القيمة المعطاه قليلة العدد فيمكن ملاحظة القيمة الأكثر تكرارا . أما اذا كانت القيم كثيرة فيجب أولا تكوين الجدول التكرارى لتوزيع القيم فاذا كان الجدول بسيطا فانه يمكن معرفة القيمة الأكثر شيوعا (تكرارا) أما اذا كان الجدول على الصورة التالية

اذا كان دخل ٤٢ أسرة موزعة كالجدول التالى

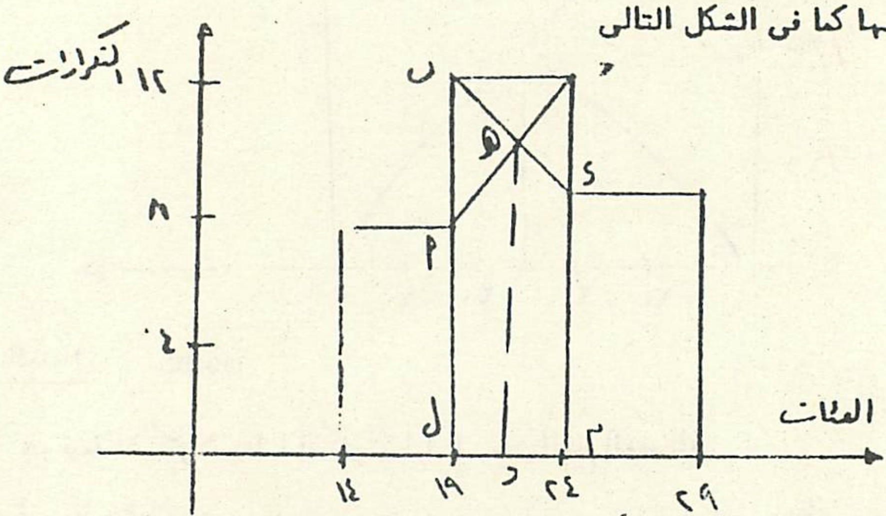
جدول رقم (٢٤)

فئات الدخل (بالجنيه)	التكرارات (ك)
٤ _ ٩	٢
٩ _ ١٤	٥
١٤ _ ١٩	٨
١٩ _ ٢٤	١٣
٢٤ _ ٢٩	١٠
٢٩ _ ٣٤	٤
المجموع	٢٤

طرق تقدير قيمة المنـــوال :

(أ) الطريقة البيانيـة

نرسم المدرج التكراري المكون من ثلاث فئات فقط هما التي تقابل أكثر تكرارا والفئة التي تسبقهـا والفئة التي تليها كما في الشكل التالي



نصل كل من أ حـ ، د ب ونفرض أن نقطة تقاطعهما هي هـ تسقط منها عمود هـ و على المحـور الأفقي فتكون النقطة و تقديرا لقيمة المنوال بيانيا .

(ب) ولحساب القيمة جبريا نجد أن النقطة و تقسم الفئة ١٤ ــ ١٩ بنفس النسبة التي تقسم بها النقطة هـ المستقيم أ حـ

من الرسم نجد أن هـ و // أ ل // حـ م

$$\therefore \quad \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ حـ}} = \frac{\text{ل و}}{\text{و م}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{حـ د}} = \frac{\text{ب ل ــ أ ل}}{\text{حـ م ــ م د}} = \frac{١٣ - ٨}{١٣ - ١٠} = \frac{٥}{٣}$$

$\therefore$ النقطة و تقسم الفئة ١٩ ــ ٢٤ نسبة ٥ : ٣

وعلى ذلك فان قيمة النقطة و هي

$$= ١٩ + ٥ \times \frac{٥}{٨} = ٢٢{,}١٢٥$$

$$\text{أو} \quad = ٢٤ - ٥ \times \frac{٣}{٨} = ٢٢{,}١٢٥$$

وجبريا اذا كانت ل طول الفئة المنوالية

$ص_١$ ــ الحد الأدنى للفئة المنوالية

$ص_٢$ ــ الحد الأعلى للفئة المنوالية

ك ــ التكرار الذى يقابل الفئة المنوالية

$ك_١$ ــ تكرار السابق للفئة المنوالية

$ك_٢$ ــ التكرار اللاحق للفئة المنوالية

فان القيمة التقديرية للمنوال هى

$$= ص_١ + ل \frac{(ك - ك_١)}{(ك - ك_١) + (ك - ك_٢)}$$

$$= ص_٢ - ل \frac{ك - ك_٢}{(ك - ك_١) + (ك - ك_٢)}$$

ففى المثال السابق نجد أن

$ل = ٥$

$ص_١ = ١٩$ ، $ص_٢ = ٢٤$ ، $ك = ١٣$ ، $ك_١ = ٨$ ، $ك_٢ = ١٠$

$$\therefore \text{قيمة المنوال} = ١٩ + ٥ \frac{١٣ - ٨}{٣ - ٨ + ١٣ - ١٠}$$

$$= ١٩ + ٥ \frac{٥}{٥ + ٣} = ١٩ + \frac{٥ \times ٥}{٨} = ٢٢ر١٢٥$$

أو

$$= ٢٤ - ٥ \frac{(١٣ - ١٠)}{(١٣ - ٨) + (١٣ - ١٠)} = ٢٤ - \frac{٥ \times ٣}{٨} = ٢٢ر١٢٥$$

ويمكن تقدير قيمة المنوال باستخدام قاعدة الرافعة ، وهى اعتبار أن المنوال هو نقطة الاتزان بين الفئة المنوالية ، وذلك باعتبار أنه يوجد عند حدى الفئة المنوالية اثقال $ك_١$ ، $ك_٢$ ونقطة الاتزان لهذين الثقلين تسمى بالمنوال ، نفرض أن نقطة الاتزان تبعد عن التكرار $ك_١$ مسافة ف وعن التكرار $ك_٢$ مسافة ل ـ ف (حيث ل طول الفئة المنوالية)

ومن قانون الرافعة نجد أن

$$ك_١ \times ف = ك_٢ \, (ل - ف)$$

$$\therefore ف = \frac{ك_٢}{ك_١ + ك_٢} \cdot ل$$

وعلى ذلك فان المنوال $= ص_١ + \dfrac{ك_٢}{ك_١ + ك_٢} \cdot ل$

مثال :

الجدول التالى يبين توزيع الأسر فى الحضر حسب النسبة المئوية للمنفق على مجموعة الطعام والشراب

جدول رقم (٢٥)

النسبة المئوية للانفاق	عدد الأسر
١٤ر٥ ـ	٢٦
٢٤ر٥ ـ	٨٧
٢٤ر٥ ـ	٣٥٩
٤٤ر٥ ـ	٧٧٩
٥٤ر٥ ـ	١٠٩٣
٦٤ر٥ ـ	٦١٣
٧٤ر٥ ـ	١٨٠
٨٤ر٥ ـ	٨
المجموع	٣١٤٥

ملحوظـة : جميع الفئات هنا متساوية ماعدا الفئة الأخيرة مفتوحة الى أسفل ولكن لا يعقل أن يكون آخرها ١٠٠ لأنه لا يوجد أسرة تمثل انفاقها على الطعام والشراب جميع انفاقها الاستهلاكى ، ولذا ممكن اعتبار جميع الفئات متساوية لتقدير قيمة المنوال ·

نرى الفئة المنوالية هى ٥ر٥٤ – ٥ر٦٤

$ك_١ = ٧٧٩$ ، $ك_٢ = ٦١٣$

$$\therefore \quad ف = \frac{ك_٢}{ك_١ + ك_٢} ل = \frac{٦١٣}{٧٧٩ + ٦١٣} \times ١٠ = ٤ر٤$$

المنوال = ٥ر٥٤ + ٤ر٤ = ٩ر٥٨

أى أن الانفاق الأكثر شيوعا هو ٩ر٥٨

مثـال : فى الجدول (١٨) احسب قيمة المنوال

نرى أن الفئة المنوالية ٨٠ – ٩٠

وأن $ك_١ = ٧٠$ ، $ك = ١٢٠$ ، $ك_٢ = ٩٥$

$$\therefore \quad المنوال = ٨٠ + \frac{ك - ك_١}{(ك - ك_١) + (ك - ك_٢)} ل$$

$$= ٨٠ + \frac{١٢٠ - ٧٠}{١٢٠ - ٧٠ + ١٢٠ - ٩٥} \times ١٠$$

$$= ٨٠ + ٧ر٦ = ٧ر٨٦ \text{ قرشا}$$

ملحوظـة : فى التوزيعات المتماثلة نجد أن

الوسط الحسابى = الوسيط = المنوال

متى يستخدم كل من الوسط الحسابى والوسيط والمنوال :

الوسط الحسابـى :

(١) للوسط الحسابى صورة رياضية ولذا فانه أدق قيمة من الوسيط والمنوال حيث أنهم قيم تقديرية ٠

(٢) فى حالة الجداول التكرارية المفتوحة لا يمكن ايجاد الوسط الحسابى ٠

(٣) يتأثر قيمة الوسط الحسابى بالقيم المتطرفة اذ أنه فى حالة وجود قيم متطرفة الى أعلى أو أسفل فان قيمة الوسط لا تمثل واقع البيانات

الوسيـط :

(١) لا يتأثر بالقيم المتطرفة ٠

(٢) قيمة تقريبية سهلة الوصول اليها ٠

(٣) يستخدم بدلا من الوسط الحسابى فى حالة وجود فئات مفتوحة الى أعلى أو أسفل

المنـوال :

(١) يستخدم اذا أريد معرفة القيمة الأكثر شيوعا ٠

(٢) عند الحصول على قيم تقريبية وسريعة ٠

تماريـن

(١) البيانات التالية تمثل دخل مجموعة مكونة من ١٢٠ عاملا

فئات الدخل :	١٦٠ـ	١٦٢ـ	١٦٤ـ	١٦٨ـ	١٧٠ ـ ١٧٢	المجموع
عدد العمال :	١٥	٢٨	٣٨	٢٢	١٧	١٢٠

من واقع البيانات السابقة أوجد

(١) الوسط الحسابى

(٢) الوسيط (بأى طريقة)

(٣) المنوال (بأى طريقة)

(٢) البيانات التالية تمثل النسبة المئوية من الانفاق على مجموعة الطعام والشراب لعدد ١٠٠ أسرة

النسبة المئوية للانفاق :	٤٠ـ	٤٥ـ	٥٥ـ	٦٥ـ	٧٠ـ	٧٥ ـ ٨٠	المجموع
عدد الأسر :	٥	٢٢	٣٠	٢١	١٩	٣	١٠٠

عن واقع البيانات السابقة أوجد

(١) الوسط الحسابي

(٢) الوسيط

(٣) المنوال بيانيا وجبريا

مقاييـــس التشتـــت

ذكرنا أن المتوسطات الاحصائية ذات أهمية كبرى فهى يمكن أن تمثل الظاهرة محل البحث ولكن عند مقارنة مجموعتين من القيم بالنسبة الى المتوسط الحسابى فقد يحدث أن يكون متوسطهما واحد وهنا تصعب المقارنة بينهما ، فمثلا الجدول التالى يبين قيم ظاهرتين ومتوسطهما الحسابى ٠

جدول رقم (٢٦)

المجموعـــة الاولـــى

س	ك	ك س
٢	١	٢
٣	٥	١٥
٤	٣٠	١٢٠
٥	٦٠	٣٠٠
٦	٣٠	١٨٠
٧	٥	٣٥
٨	١	٨
المجموع	١٣٢	٦٦٠

$$\bar{س} = \frac{٦٦٠}{١٣٢} = ٥$$

جدول رقم (٢٧)

المجموعـــة الثانيـــة

س	ك	ك س
٢	٣٠	٦٠
٣	٢٠	٦٠
٤	١٠	٤٠
٥	٥٠	٢٥٠
٦	١٠	٦٠
٧	٢٠	١٤٠
٨	٣٠	٢٤٠
المجموع	١٧٠	٨٥٠

$$\bar{س} = \frac{٨٥٠}{١٧٠} = ٥$$

نلاحظ أن الوسط الحسابى للمجموعتين واحد يساوى ٥ ولكن نلاحظ فى المجموعة الاولـــى أن عدد ١٢٠ (٣٠ + ٦٠ + ٣٠) مفردة من ١٣٢ انحرافها على الوسط الحسابـــى لا يتعدى الوحدة أى ٩١ ٪ من المفردات أما فى المجموعة الثانية فان عدد ٧٠ (١٠ + ٥٠ + ١٠) مفردة من ١٧٠ انحرافها عن الوسط الحسابى لا يتعدى الوحدة أى ٤١ ٪ من المفردات و‍ـــــ الواضح أن المتوسط للمجموعة الاولى أدق منه للمجموعة الثانية أى أنه يوجد اختلاف من المجموعتـــين

ولكن المتوسط لا يظهر هذا الاختلاف من أول وهله كما رأينا ، ولذا فاننا نلجأ الى مقاييس أخـــرى للتفرقة بين المجموعتين ومن هذه المقاييس

(١) المدى (٢) نصف المدى الربيعي (٣) الانحرافات المطلقة

(٤) التباين والانحراف المعيارى .

(١) المـدى :

هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة فى مجموعة المفردات فمثلا المفردات

٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦

$$\bar{س} = \frac{٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦}{٥} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$$

والمجموعة ٣ ، ٧ ، ٤ ، ٢ ، ٤

$$\bar{س} = \frac{٣ + ٧ + ٤ + ٢ + ٤}{٥} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$$

نرى أن المجموعتين لهما نفس الوسط الحسابى ولكن نرى أن المفردات تختلف من المجموعتـــين

والمدى فى المجموعة الأولى هو ٦ ـ ٢ = ٤

والمجموعة الثانية هو ٧ ـ ٢ = ٥

وهذا يظهر الاختلاف بين المجموعتين الا أن المدى فى بعض الأحيان يعطى نتائج مضللـــة

فى المثال الاول نرى أن المدى للمجموعة الأولى ٨ ـ ٢ = ٦

والمجموعة الثانية ٨ ـ ٢ = ٦

أى أنه لا يظهر أى اختلاف بين المجموعتين ولكن هذه النتيجة مضللة اذ يوجد اختـــلاف بينهمـــا .

(٢) نصف المدى الربيعى :

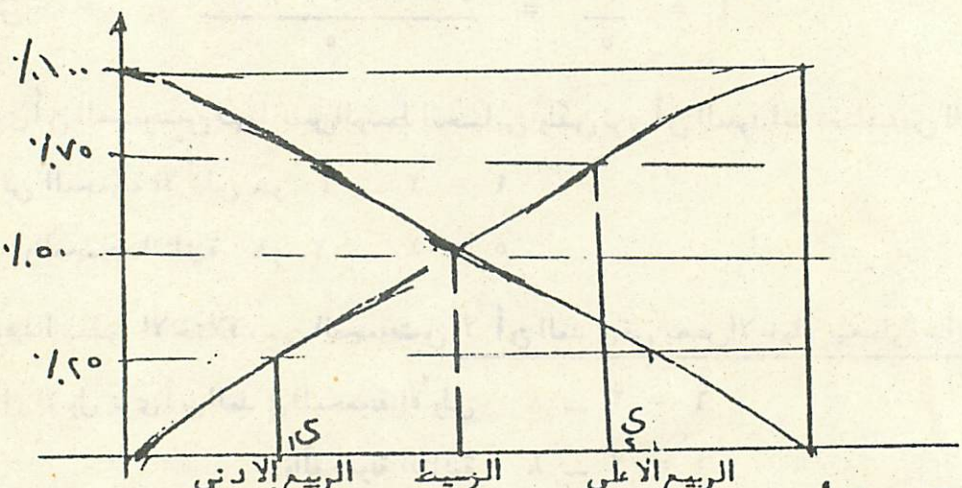
اذا كانت $ى_١$ يمثل قيمة المفردة التى أصغر منها ٢٥٪ من المفردات وأكبر من ٧٥٪ من المفردات وتسمى بالربيع الأدنى

$ى_٢$ يمثل قيمة المفردة التى أصغرها منهما ٧٥٪ من المفردات وأكبر منها ٢٥٪ من المفردات وتسمى بالربيع الأعلى .

فان نصف المدى الربيعى هو

$$\frac{ى_٢ - ى_١}{٢}$$

ولايجاد نصف المدى الربيعى نرسم المنحنى الصاعد أو الهابط كما فى الرسم



نعين على المحور الرأسى ٢٥٪ من المفردات ومنها نرسم مستقيما أفقيا فيقطع المنحنى فى نقطة منها نسقط عمودا رأسيا على المستوى الأفقى فيكون نقطة التلاقى هى قيمة الربيع الأدنى ، ولذلك نعين على المحور الرأسى ٧٥٪ من المفردات ومنها نرسم مستقيما أفقيا يقطع المنحنى فى نقطة منها نسقط عمودا رأسيا على المستوى الأفقى فيكون نقطة التلاقى هى قيمة الربيع الأعلى .

وعلى ذلك فان نصف المدى الربيعي $= \frac{ى_٢ - ى_١}{٢}$

مثال : نفرض أن الجدول التالي يمثل أعمار ٢٠ شخص

فئات العمر :	٥ ـ ١٠	١٠ ـ ١٥	١٥ ـ ٢٠	٢٠ ـ ٢٥	المجموع
عدد الاشخاص :	٢	٧	٨	٣	٢٠

المطلوب ايجاد نصف المدى الربيعي

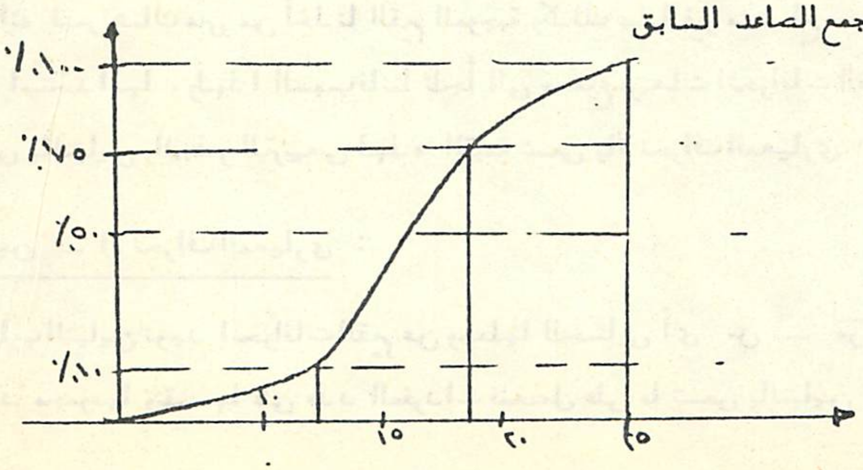
الحل : تكون الجدول التكراري الصاعد أو الهابط وتكون النسب المئوية للتكرارات المتجمعة

جدول رقم (٢٨)

جدول متجمع صاعد

فئات العمر	عدد الاشخاص التكرارات	النسبة المئوية
ـ ١٠	١٠	١٠
		$ى_١$
ـ ١٥	٩	٤٥
		$ى_٢$
ـ ٢٠	١٧	٨٥
ـ ٢٥	٢٠	١٠٠

نرسم منحنى المتجمع الصاعد السابق



من الرسم نرى أن $ى_١$ = ١٢٫١٤

$ى_٣$ = ١٨٫٧٥

∴ نصف المدى الربيعى = $\frac{ى_٣ - ى_١}{٢}$ = $\frac{١٨٫٧٥ - ١٢٫١٥}{٢}$

= $\frac{٦٫٦٠}{٢}$ = ٣٫٣٠

(٣) الانحرافات المطلقة :

من المعروف أن مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابى يساوى صفر ، فمثلا فى مجموع المفردات ·

٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ نجد أن الوسط الحسابى يساوى ٤

وانحرافات القيم عن وسطها هو −٢ ، −١ ، صفر ، ١ ، ٢ ومجموعهما يساوى صفر كما أن المفردات ٣ ، ١٠ ، ٤ ، ٤ ، ١ وسطها الحسابى ٤ وانحرافات القيم عن وسطها هو −١ ، ٦ ، ٠ ، −٢ ، صفر ، −٣ مجموعهما يساوى صفرا ·

نجد أن مجموع الانحرافات المطلقة للمجموعة الأولى ٢ ، ١ ، صفر ، ١ ، ٢ يساوى ٦ والمجموعة الثانية ١ ، ٦ ، صفر ، ٢ ، صفر ، ٣ مجموعهما يساوى ١٠ أى أن يمكن منهما الحكم بأنه يوجد اختلاف من المجموعتين ·

نرى أنه ليس هناك مبرر من أخذنا القيم الموجبة وكذلك عمليا غير مستساغ ، ولذا فمن النادر جدا استخدامها ، ولهذا السبب فاننا نلجأ الى مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها ويسمى بالتباين والجذر التربيعى لهذه القيمة تسمى بالانحراف المعيارى ·

(٤) التباين — الانحراف المعيارى :

لحساب التباين نوجد انحرافات القيم عن وسطها الحسابى أى س — $\bar{س}$ نربع هذه القيم ونوجد مجموعها ونقسمها على عدد المفردات فنحصل على ما تسمى بالتباين

أى أن $\text{ع}^{٢} = \dfrac{\text{مجـ}\,(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}}{\text{ن}}$

فمثلا القيم

٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦

الوسط الحسابى $\bar{\text{س}} = ٤$

انحرافات القيم عن وسطها الحسابى

هو ـ٢ ، ـ١ ، صفر ، ١ ، ٢

مربعات الانحرافات ٤ ، ١ ، صفر ، ١ ، ٤

مجموعها = ١٠

∴ التباين $\text{ع}^{٢} = \dfrac{١٠}{٥} = ٢$

وتعميما اذا كانت القيم هى $\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٢}$ ، ... ، $\text{س}_{\text{ن}}$

والتكرارات هى $\text{ك}_{١}$ ، $\text{ك}_{٢}$ ، ... ، $\text{ك}_{\text{ن}}$

والوسط الحسابى هو $\bar{\text{س}} = \dfrac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}$

فان $\text{ع}^{٢} = \dfrac{\text{مجـ}\,(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}\,\text{ك}}{\text{مجـ ك}}$

ومنها فان الانحراف المعيارى

$$\text{ع} = \sqrt{\dfrac{\text{مجـ}\,(\text{س} - \bar{\text{س}})\,\text{ك}}{\text{مجـ ك}}} \quad \ldots\ldots \quad (٢)$$

نحسب التباين والانحراف المعيارى للمجموعتين الجدول (٢٩) ، (٣٠)

جدول رقم (٢٩)

المجموعـــــة الأولـــى

س	ك	س − $\bar{س}$	(س − $\bar{س}$)^2	ك × (س − $\bar{س}$)^2
٢	١	−٣	٩	٩
٣	٥	−٢	٤	٢٠
٤	٣٠	−١	١	٣٠
٥	٦٠	صفر	صفر	صفر
٦	٣٠	١	١	٣٠
٧	٥	٢	٤	٢٠
٨	١	٣	٩	٩
المجموع	١٣٢	صفر		١١٨

جدول رقم (٣٠)

المجموعـــــة الثانيـــــة

س	ك	(س − $\bar{س}$)	(س − $\bar{س}$)^2	ك × (س − $\bar{س}$)^2
٢	٣٠	−٣	٩	٢٧٠
٣	٢٠	−٢	٤	٨٠
٤	١٠	−١	١	١٠
٥	٥٠	صفر	صفر	صفر
٦	١٠	١	١	١٠
٧	٢٠	٢	٤	٨٠
٨	٣٠	٣	٩	٢٧٠
المجموع	١٧٠	صفر		٧٢٠

∴ التباين

$$ع_1^2 = \frac{\text{مج}\,(س - \bar{س})^2\,ك}{\text{مج}\,ك} = \frac{١١٨}{١٣٢} = \text{٠ر٨٩}$$

$$ع_2^2 = \frac{٧٢٠}{١٧٠} = \text{٤ر٢}$$

الانحراف المعيارى

$$ع_1 = \sqrt{\text{٠ر٨٩}} = \text{٠ر٩٤}$$

$$\therefore ع_2 = \sqrt{\text{٤ر٢}} = \text{٢ر٠٥}$$

ونلاحظ أن الانحراف المعيارى للمجموعة الأولى تقريبا نصف الانحراف المعيارى للمجموعة الثانية وهذا يبين على أن المجموعتين مختلفتين اذ أن تشتت القيم على وسطها الحسابى أكبر فى المجموعة الثانية منه فى المجموعة الأولى .

المثال التالى يبين الانحراف المعيارى لدخل عدد ٥٠٠ أسرة

جدول رقم (٣١)

فئات الدخل السنوى	مراكز الفئات س	ك عدد الاسر	ك س	س ـ س̄	(س ـ س̄)^2	ك × (س ـ س̄)^2
٥٠ ـ ٦٠	٥٥	٣٠	١٦٥٠	ـ ٣٤ر٥	١١٩٠ر٢٥	٣٥٧٠٧ر٥
٦٠ ـ ٧٠	٦٥	٤٠	٢٦٠٠	ـ ٢٤ر٥	٦٠٠ر٢٥	٢٤٠١٠
٧٠ ـ ٨٠	٧٥	٧٠	٥٢٥٠	ـ ١٤ر٥	٢١٠ر٢٥	١٤٧١٧ر٥
٨٠ ـ ٩٠	٨٥	١٢٠	١٠٢٠٠	ـ ٤ر٥	٢٠ر٢٥	٢٤٣٠
٩٠ ـ ١٠٠	٩٥	٩٥	٩٠٢٥	٥ر٥	٣٠ر٢٥	٢٨٧٣ر٧٥
١٠٠ ـ ١١٠	١٠٥	٨٠	٨٤٠٠	١٥ر٥	٢٤٠ر٢٥	
١١٠ ـ ١٢٠	١١٥	٥٠	٥٧٥٠	٢٥ر٥	٦٥٠ر٢٥	٣٢٥١٢ر٥
١٢٠ ـ ١٣٠	١٢٥	١٥	١٨٧٥	٣٥ر٥	١٢٦٠ر٢٥	١٨٩٠٣ر٧٥
المجموع		٥٠٠	٤٤٧٥٠			١٥٠٢٧٥

من الجدول السابق نجد أن

$$\text{الوسط الحسابى } \bar{س} = \frac{\text{مج ك س}}{\text{مج ك}} = \frac{٤٤٧٥٠}{٥٠٠} = ٨٩ر٥ \text{ جنيها سنويا}$$

والتبايـــن

$$ع^2 = \frac{\text{مج ك } (س - \bar{س})^2}{\text{مج ك}} = \frac{١٥٠٢٧٥}{٥٠٠} = ٣٠٠ر٧٥$$

والانحراف المعيارى

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مج ك } (س - \bar{س})^2}{\text{مج ك}}} = \sqrt{٣٠٠ر٧٥} = ١٧ر٣٤ \text{ جنيها}$$

<u>خواص التبايـــن</u> :

(١) اضافة أو طرح أى عدد وليكن أ من جميع قيم المفردات فان التباين لا يتغير .

أى أن التباين يمكن حسابه من القيم الناتجة عن طرح أى مقدار عن القيم الأصلية .

وجبريا اذا كانت $س_١$ ، $س_٢$ ، ... $س_ن$ قيم المفردات

$$، ص_١ = س_١ \pm أ ، ص_٢ = س_٢ \pm أ ، \ldots ص_ن = س_ن \pm أ$$

$$فان\ ع^٢_ص = \frac{مجـ (ص - \bar{ص})^٢}{ن} = \frac{مجـ \left(س \pm أ - (\bar{س} \pm أ) \right)^٢}{ن}$$

$$= \frac{مجـ (س \pm أ - \bar{س} \mp أ)^٢}{ن}$$

$$\therefore ع^٢_ص = \frac{مجـ (س - \bar{س})^٢}{ن} = ع^٢_س$$

أى أن التباين لا يتغير وذلك الانحراف المعيارى

(٢) اذا قسمت جميع قيم المفردات على أى عدد ثابت وليكن أ فان التباين الناتج للقيم الجديدة يقل عن التباين الأصلى فى $أ^٢$ مرة والانحراف المعيارى يقل عنه بمقدار أ مرة

وجبريا اذا كانت $س_١$ ، $س_٢$ ، ... ، $س_ن$ قيم المفردات

$$، ص_١ = \frac{س_١}{أ} ، ص_٢ = \frac{س_٢}{أ} ، \ldots ص_ن = \frac{س_ن}{أ}$$

$$فان\ ع^٢_ص = \frac{مجـ (ص - \bar{ص})^٢}{ن} = \frac{مجـ \left(\frac{س}{أ} - \frac{\bar{س}}{أ} \right)^٢}{ن} = \frac{١}{أ^٢} \frac{مجـ (س - \bar{س})^٢}{ن}$$

$$\therefore ع^٢_ص = \frac{١}{أ^٢} ع^٢_س \quad ومنها\ فان\ ع^٢_س = أ^٢ ع^٢_ص$$

ولذلك $\text{ع}_{\text{ص}} = \frac{1}{\text{أ}}\ \text{ع}_{\text{س}}$ ومنها فان $\text{ع}_{\text{س}} = \text{أ}\ \text{ع}_{\text{ص}}$

ونذكر المثال التالى لنبين الخاصية الأولى .

جدول رقم (٣٢)

فئات الدخل	مراكز الفئات س	عدد العمال ك التكرارات	س ــ ٩٥	(س ــ ٩٥)^{٢}	ك (س ــ ٩٥)^{٢}
٥٠ ــ ٦٠	٥٥	٣٠	ــ ٤٠	١٦٠٠	٤٨٠٠٠
٦٠ ــ ٧٠	٦٥	٤٠	ــ ٣٠	٩٠٠	٣٦٠٠٠
٧٠ ــ ٨٠	٧٥	٧٠	ــ ٢٠	٤٠٠	٢٨٠٠٠
٨٠ ــ ٩٠	٨٥	١٢٠	ــ ١٠	١٠٠	١٢٠٠٠
٩٠ ــ ١٠٠	٩٥	٩٥	صفر	صفر	صفر
١٠٠ ــ ١١٠	١٠٥	٨٠	١٠	١٠٠	٨٠٠٠
١١٠ ــ ١٢٠	١١٥	٥٠	٢٠	٤٠٠	٢٠٠٠٠
١٢٠ ــ ١٣٠	١٢٥	١٥	٣٠	٩٠٠	١٣٥٠٠
المجموع	ــ	٥٠٠	ــ	ــ	١٦٥٥٠٠

من الجدول

$$\therefore \quad \frac{\text{مج (س ــ ٩٥) ك}}{\text{مج ك}} = \frac{١٦٥٥٠٠}{٥٠٠} = ٣٣١$$

وبما أن

$$\text{ع}^{٢} = \frac{\text{مج ك}\ (\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}}{\text{مج ك}}$$

$$= \frac{\text{مج ك}\ \left[(\text{س} - \text{أ}) + (\text{أ} - \bar{\text{س}})\right]^{٢}}{\text{مج ك}}$$

$$= \frac{\text{مج ك}\ (\text{س} - \text{أ})^{٢} - ٢\text{ك}\ (\text{س} - \text{أ})(\bar{\text{س}} - \text{أ}) + (\bar{\text{س}} - \text{أ})^{٢}}{\text{مج ك}}$$

$$= \frac{\text{مح ك}\ (\text{س} - \text{أ})^2}{\text{مح ك}} - (\bar{\text{س}} - \text{أ})^2$$

∴ التباين ع^2 = ٣٢١ _ (٨٩ر٥ _ ٩٥)^2 = ٣٢١ _ ٣٠ر٢٥ = ٣٠٠ر٧٥

ومنها فان الانحراف المعيارى ع = $\sqrt{\text{٣٠٠ر٧٥}}$ = ١٧ر٣٤ جنيها

ملحوظة : مما سبق ع^2 $= \frac{\text{مح ك}\ (\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{مح ك}}$

$$\therefore \quad \text{ع}^2 = \frac{\text{مح ك س}^2}{\text{مح ك}} - \bar{\text{س}}^2$$

<u>وهذا يعنى أن التباين يساوى متوسط الحسابى لمربعات قيم المفردات مطروحا منه مربع الوسط الحسابى للقيم .</u>

ويمكن حساب التباين باستخدام الصورة الأخيرة للجدول التالى :

جدول رقم (٣٣)

فئات الدخل	مراكز فئات الدخل س	عدد العمال ك	$\text{ص} = \frac{\text{س} - \text{٨٥}}{\text{١٠}}$	ك ص	ص^2	ك ص^2
٥٠ _ ٦٠	٥٥	٦٠	_ ٣	_ ١٨	٩	٥٤
٦٠ _ ٧٠	٦٥	٨	_ ٢	_ ١٦	٤	٣٢
٧٠ _ ٨٠	٧٥	١٤	_ ١	_ ١٤	١	١٤
٨٠ _ ٩٠	٨٥	٢٤	صفر	صفر	صفر	صفر
٩٠ _ ١٠٠	٩٥	١٩	١	١٩	١	١٩
١٠٠ _ ١١٠	١٠٥	١٦	٢	٣٢	٤	٦٤
١١٠ _ ١٢٠	١١٥	١٠	٣	٣٠	٩	٩٠
١٢٠ _ ١٣٠	١٢٥	٣	٤	١٢	١٦	٤٨
	المجموع	١٠٠		٤٥		٣٢١

من الجدول $\bar{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ك ص}}{\text{مجـ ك}} = \frac{٤٥}{١٠٠} = \text{٤٥ر}$

، $\frac{\text{مجـ ك ص}^2}{\text{مجـ ك}} = \frac{٣٢١}{١٠٠} = \text{٢١ر٣}$

$\therefore \text{ع}^2_{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ك ص}^2}{\text{مجـ ك}} - \bar{\text{ص}}^2 = \text{٢١ر٣} - (\text{٤٥ر٠})^2$

$\therefore \text{ع}_{\text{س}} = ١٠ \ \text{ع ص}$

$\therefore \text{ع س} = ١٠ \sqrt{\text{٢١ر٣} - (\text{٤٥ر٠})^2} = ١٠ \sqrt{\text{٢١ر٣} - \text{٢٠٢٥ر}}$

$= ١٠ \sqrt{\text{٠٠٧٥ر٣}} = \text{٣٤ر١٧}$ جنيها

مثال الجدول التالى يبين دخل ١٢٥ أسرة سنويا وطريقة ايجاد الانحراف المعيارى

جدول رقم (٣٤)

فئات الدخل	عدد الاسر	مراكز الفئات	$\text{ص} = \frac{\text{س} - ١٢٥}{١٠٠}$	ك ص	ص^2	ك ص^2
٩٠ _ ١١٠	٢	٩٥	_ ٤	_ ٨	١٦	٣٢
١٠٠ _ ١١٠	٥	١٠٥	_ ٣	_ ١٥	٩	٤٥
١١٠ _ ١٢٠	١٣	١١٥	_ ٢	_ ٢٦	٤	٥٢
١٢٠ _ ١٣٠	١٧	١٢٥	_ ١	_ ١٧	١	١٧
١٣٠ _ ١٤٠	١٨	١٣٥	صفر	صفر	صفر	صفر
١٤٠ _ ١٥٠	٣١	١٤٥	١	٣١	١	٣١
١٥٠ _ ١٦٠	٢٢	١٥٥	٢	٤٤	٤	٨٨
١٦٠ _ ١٧٠	١٢	١٦٥	٣	٣٦	٩	١٠٨
١٨٠ _ ١٨٠	٥	١٧٥	٤	٢٠	١٦	٨٠
المجموع	١٢٥			٦٥		٤٥٣

من الجدول نرى أن

$$\bar{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ك ص}}{\text{مجـ ك}} = \frac{\text{٦٥}}{\text{١٢٥}} = \text{٠ر٥٢}$$

$$، \quad \frac{\text{مجـ ك ص}^2}{\text{مجـ ك}} = \frac{\text{٤٥٣}}{\text{١٢٥}} = \text{٣ر٦٢}$$

$$\therefore \text{ الانحراف المعيارى } = \text{١٠} \sqrt{\frac{\text{مجـ ك ص}^2}{\text{مجـ ك}} - \bar{\text{ص}}^2} =$$

$$= \text{١٠} \sqrt{\text{٣ر٦٢} - (\text{٠ر٥٢})^2} = \text{١٠} \sqrt{\text{٣ر٣٥}} = \text{١٨ر٣ جنيها}$$

$$\text{والوسط الحسابى للدخل هو } = \text{أ} + \text{١٠} \, \bar{\text{ص}}$$

$$= \text{١٣٥} + \text{١٠} \times \text{٠ر٥٢} = \text{١٤٠ر٢ جنيها}$$

تماريـــــــــن

(١) نحقق خطة الانتاج العاديه بالنسبة الى كل عامل معطاه بالجدول التالى :

جـدول رقم (٣٥)

النسبة المئوية المحققة	عدد العمال
٩٠ — ١٠٠	١٠
١٠٠ — ١١٠	١٦٠
١١٠ — ١٢٠	١٠٠
١٢٠ — ١٣٠	٦٠
١٣٠ —	٢٠

من واقع هذه البيانات أوجد

(١) متوسط النسبة المئوية لتحقيق الخطة الانتاجية بالنسبة الى العامل

(٢) الانحراف المعيارى ($\bar{س}$ = ١٢ر١ ، ع = ٨ر٨)

(٢) اذا كانت الانتاج موزع بالنسبة الى عدد العمال بالجدول التالى :

الانتاج بالقطعة :	٤٠	٤٢	٤٥	٤٦	٤٨	٥٠
عدد العمال :	٢٥	٥٠	١٠٠	١٢٥	١٥٠	٥٠

أوجد (١) متوسط الانتاج للعامل الواحد

(٢) التباين — الانحراف المعيارى ($\bar{س}$ = ٤٦ر١ ، ع = ٢ر٥٣)

(٣) اذا كان محصول ما موزع حسب الارض بالجدول التالى

المحصول (بالقنطار) :	١٨	٢١	٢٤	٢٧	٣٠	المجموع
عدد الافدنة :	١١	١٩	٣٠	٢٧	١٣	١٠٠

(١) أوجد متوسط محصول الفدان الواحد

(٢) التباين — الانحراف المعيارى ٠

الارتباط Correlation

عند دراسة ظاهرة معينة سواء كانت اقتصادية أو غير ذلك نقوم بايجاد الارتباط بين الظاهرة وعناصرها الاساسية أو بينها وبين ظاهرة أخرى . فمثلا الارتباط بين الدخل والاستهلاك ، الارتباط الدخل والانفاق والادخار - العرض والطلب - المخزون والاستهلاك ...

وعلم الاحصاء يحاول أن يبحث عن مدى ارتباط الظاهرة بعناصرها أو مدى ارتباطها بأخرى وقد يكون الارتباط بين ظاهرتين ارتباطا طرديا أى أنه بزيادة أحدى الظاهرتين يزيد الأخرى كالعلاقة بين الدخل والاستهلاك أو أن يكون الارتباط بينهما عكسيا أى أن بزيادة احدى الظاهرتين تقل الأخرى فمثلا الاستهلاك والمخزون وسواء أكان الارتباط طرديا أو عكسيا يسمى ارتباط تاما .

فاذا رمزنا لقيم الظاهرة الأولى بالرمز س_1 ، س_2 ، ... ، $\text{س}_\text{ن}$

وقيم الظاهرة الثانية بالرمز ص_1 ، ص_2 ، ... ، $\text{ص}_\text{ن}$

وكان الوسط الحسابى للمجموعة الاولى $\bar{\text{س}}$ والثانية $\bar{\text{ص}}$

والانحراف المعيارى للمجموعة الأولى $\text{ع}_\text{س}$ والثانية $\text{ع}_\text{ص}$

ويعرف معامل الارتباط بين الظاهرة س والظاهرة ص بأنه

$$\text{ر} = \frac{\text{مج}\ (\text{س} - \bar{\text{س}})\ (\text{ص} - \bar{\text{ص}})}{\text{ن}\ \text{ع}_\text{س}\ \text{ع}_\text{ص}} \qquad \ldots\ldots \qquad (1)$$

وقيمة هذا المعامل ينحصر بين +١ ، -١ ولا تكون القيمة +١ ، -١ الا اذا كان الارتباط تاما ويكون الارتباط تاما اذا كانت العلاقة بين الظاهرتين علاقة خطية . يسمى (١)

(١) بمعامل ارتباط بيرسون .

ومعامل الارتباط قيمة عددية نسبية فلا يمكن تحديد قوة الارتباط اذا كانت هذا المعامل أقل من الوحدة أو أكبر من الصفر أى عندما ينحصر بين (+١ ، ـ١) فلا يمكن أن يقال أن الارتباط قويـا أو متوسط أو ضعيف لأن هذا يعتمد على طبيعة كل من الظاهرتين ·

حساب قيمة معامل الارتباط بيرسون :

(١) الطريقة الأولى : بوضع $ع^٢_{س} = \frac{مح\,(س - \bar{س})^٢}{ن}$ ، $ع^٢_{ص} = \frac{مح\,(ص - \bar{ص})^٢}{ن}$

$$فان\ ر = \frac{مح\,(س - \bar{س})\,(ص - \bar{ص})}{ن\ ع_{س}\ ع_{ص}} = \frac{مح\,(س - \bar{س})\,(ص - \bar{ص})}{\sqrt{مح\,(س - \bar{س})^٢ \cdot مح\,(ص - \bar{ص})^٢}}$$

(٢)

نفرض أن قيم الظاهرتين هما

س : ٢ ٣ ٤ ٦ ٧ ٨

ص : ٤ ٢ ٥ ٣ ٤ ٦

من هذا نستنتج أن $\bar{س}$ = ٥ ، $\bar{ص}$ = ٤ ثم تكون الجدول التالى

جدول رقم (٣٦)

س	ص	س ـ ٥	ص ـ ٤	(س ـ ٤)(ص ـ ٤)	$(س - ٥)^٢$	$(ص - ٤)^٢$
٢	٤	ـ ٣	صفر	صفر	٩	صفر
٣	٢	ـ ٢	ـ ٢	٤	٤	٤
٤	٥	ـ ١	١	ـ ١	١	١
٦	٣	١	ـ ١	ـ ١	١	١
٧	٤	٢	صفر	صفر	٤	صفر
٨	٦	٣	٢	٦	٩	٤
٣٠	٢٤			٨	٢٨	١٠

$$\therefore \quad ر = \frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\text{مجـ}(س - \bar{س})^{٢} \cdot \text{مجـ}(ص - \bar{ص})^{٢}}} = \frac{٨}{\sqrt{(٢٨)(١٠)}} = \frac{٤}{٧٠}$$

$$\therefore \quad ر = \frac{١}{٢{,}١٢} = ٠{,}٤٧$$

(٢) <u>الطريقة الثانية</u> : بما أن

$$\text{مجـ}(س - \bar{س})^{٢} = \text{مجـ} س^{٢} - ن \left(\frac{\text{مجـ} س}{ن}\right)^{٢} = \text{مجـ} س^{٢} - ن \bar{س}^{٢}$$

$$\text{مجـ}(ص - \bar{ص}) = \text{مجـ} ص^{٢} - ن \bar{ص}^{٢}$$

وذلك $\text{مجـ}(س - \bar{س})(ص - \bar{ص}) = \text{مجـ} س ص - ن \bar{س} \cdot \bar{ص}$

$$ر = \frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\text{مجـ}(س - \bar{س})^{٢} \cdot \text{مجـ}(ص - \bar{ص})^{٢}}} = \frac{\text{مجـ} س ص - ن \bar{س} \bar{ص}}{\sqrt{(\text{مجـ} س^{٢} - ن \bar{س}^{٢})(\text{مجـ} ص^{٢} - ن \bar{ص}^{٢})}} \quad .. (٢)$$

وهذه الصورة أفضل من الصورة (٢) حيث أنها سهلة فى حساب القيم .

ففى المثال السابق يكون الجدول التالى :

جدول رقم (٢٧)

س	ص	س ص	$س^{٢}$	$ص^{٢}$
٢	٤	٨	٤	١٦
٣	٢	٦	٩	٤
٤	٥	٢٠	١٦	٢٥
٦	٣	١٨	٣٦	٩
٧	٤	٢٨	٤٩	١٦
٨	٦	٤٨	٦٤	٣٦
٣٠	٢٤	١٢٨	١٧٨	١٠٦

من الجدول

$$\bar{س} = \frac{٣٠}{٦} = ٥$$

$$\bar{ص} = \frac{٢٤}{٦} = ٤$$

$\therefore$ مج س ص = ١٢٨ ، مج س^2 = ١٧٨ ، مج ص^2 = ١٠٦

$$ر = \frac{\text{مج س ص} - \text{ن}\ \bar{س}\ \bar{ص}}{\sqrt{(\text{مج س}^2 - \text{ن}\bar{س}^2)(\text{مج ص}^2 - \text{ن}\bar{ص}^2)}} = \frac{١٢٨ - ٦ \times ٥ \times ٤}{\sqrt{(١٧٨ - ٦ \times ٢٥)(١٠٦ - ١٦ \times ٦)}}$$

$$ر = \frac{١٢٨ - ١٢٠}{\sqrt{(١٧٨ - ١٥٠)(١٠٦ - ٩٦)}} = \frac{٨}{\sqrt{٢٨ \times ١٠}}$$

$$\therefore ر = \frac{٤}{\sqrt{٧٠}} = \frac{٤}{٨{,}٤٨} = \frac{١}{٢{,}١٢} = ٠{,}٤٧$$

وهذا يبين أن العلاقة بين س ، ص علاقة طردية ٠

خواص معامل الارتباط :

(١) اضافة أو طرح كمية ثابتة من قيم المتغيرين لا يغير من معامل الارتباط

واثبات ذلك نفرض أن الكمية الثابتة هى أ من س ، ب من ص

نفرض أن $س' = س \pm أ$

$ص' = ص \pm ب$

$$\therefore ر_{س'ص'} = \frac{\text{مج}\ (س' - \bar{س})\ (ص' - \bar{ص})}{\text{ن}\ ع_{س'}\ ع_{ص'}}$$

$$ر_{س،ص} = \frac{مج (س \pm أ - \bar{س} \mp أ)(ص \pm ب - \bar{ص} \mp ب)}{ن\ ع_س\ ع_ص}$$

$$ر_{س،ص} = \frac{مج (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{ن\ ع_س\ ع_ص} = ر_{س،ص}$$

(٢) <u>قسمة كل قيم المتغيرين بعد ذلك على مقدار ثابت لا يغير من معامل الارتباط</u>

واثبات ذلك

نفرض أن $س' = \frac{س \pm أ}{حـ}$ ، $ص' = \frac{ص \pm ب}{د}$

$$ر_{س'،ص'} = \frac{مج (س' - \bar{س}')(ص' - \bar{ص}')}{ن\ ع_{س'}\ ع_{ص'}} = \frac{مج \left(\frac{س - \bar{س}}{حـ}\right)\left(\frac{ص - \bar{ص}}{د}\right)}{ن\ \frac{ع_س}{حـ}\ \frac{ع_ص}{د}} =$$

$$ر_{س'،ص'} = \frac{مج (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{ن\ ع_س\ ع_ص} = ر_{س ص}$$

مثـال : احسب معامل الارتباط للمتغيرين س ، ص

س	:	٢٠	٣٠	٤٠	٦٠	٧٠	٨٠
ص	:	٤٠	٢٠	٥٠	٣٠	٤٠	٦٠

باستخدام الخواص السابقة

$س = \frac{س - ٢٠}{١٠}$: صفر ١ ٢ ٤ ٥ ٦

$ص = \frac{ص - ٢٠}{١٠}$: ٢ صفر ٣ ١ ٢ ٤

جـــدول رقم (٣٨)

نكون الجدول التالى :

س	ص	س ص	س٢	ص٢
صفر	٢	صفر	صفر	٤
١	صفر	صفر	١	صفر
٢	٣	٦	٤	٩
٤	١	٤	١٦	١
٥	٢	١٠	٢٥	٤
٦	٤	٢٤	٣٦	١٦
١٨	١٢	٤٤	٨٢	٣٤

من الجدول

$$\bar{\text{س}}_{1} = \frac{١٨}{٦} = ٣ \quad ، \quad \bar{\text{ص}}_{1} = \frac{١٢}{٦} = ٢$$

$$\text{مج س}_1\text{ص}_1 = ٤٤ \quad ، \quad \text{مج س}_1^2 = ٨٢ \quad \text{مج ص}_1^2 = ٣٤$$

$$\text{ر}_{\text{س}_1\text{ص}_1} = \frac{\text{مج س}_1\text{ص}_1 - \text{ن } \bar{\text{س}}_1\bar{\text{ص}}_1}{\sqrt{(\text{مج س}_1^2 - \text{ن } \bar{\text{س}}_1^2)(\text{مج ص}_1^2 - \text{ن } \bar{\text{ص}}_1^2)}}$$

$$= \frac{٤٤ - ٦ \times ٣ \times ٢}{\sqrt{(٨٢ - ٥٤)(٣٤ - ٢٤)}}$$

$$\therefore \ \text{ر}_{\text{س}_1\text{ص}_1} = \text{ر}_{\text{س ص}} = \frac{٨}{\sqrt{٢٨ \times ١٠}} = \frac{٤}{\sqrt{٧٠}} = ٤٧\text{ر}$$

(٣) اذا كان الارتباط تاما فان معامل الارتباط $r = \pm 1$

الارتباط التام بين المتغيرين س ، ص هو أن العلاقة بينهما هى

$$\text{ص} = \text{أ}\ \text{س} + \text{حـ}$$

حيث أ ، حـ ثوابت موجبة أو سالبة

ومنها

$$\text{ص} - \bar{\text{ص}} = \text{أ}\ (\text{س} - \bar{\text{س}})$$

وبما أن معامل الارتباط هو

$$= \frac{\text{مجـ}\ (\text{س} - \bar{\text{س}})\ (\text{ص} - \bar{\text{ص}})}{\sqrt{\text{مجـ}\ (\text{س} - \bar{\text{س}})^{2}\ \ \text{مجـ}\ (\text{ص} - \bar{\text{ص}})^{2}}}$$

بالتعويض عن قيمة ص — ص̄ بدلالة س — س̄ نحصل على

$$= \frac{\text{أ}\ \text{مجـ}\ (\text{س} - \bar{\text{س}})^{2}}{\sqrt{\text{أ}^{2}\ \left(\text{مجـ}\ (\text{س} - \bar{\text{س}})^{2}\right)^{2}}} = \pm 1$$

حيث المقام موجب دائما

مثال : نحسب معامل الارتباط بين النسبة المئوية للبطالة وقيمة الانتاج بالمليون جنيه

جدول رقم (٣٩)

نسبة البطالة س	قيمة الانتاج ص	$\text{س} = \frac{\text{س} - ٣٠}{٥}$	$\text{ص} = \frac{\text{ص} - ٥٠}{٥}$	س ص	س ٢	ص ٢
١٠	٩٠	— ٤	٨	— ٣٢	١٦	٦٤
٢٠	٧٠	— ٢	٤	— ٨	٤	١٦
٣٠	٥٠	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
٤٠	٣٠	٢	— ٤	— ٨	٤	[illegible]
٥٠	١٠	٤	— ٨	— ٣٢	١٦	٦٤
١٥٠	٢٥٠			— ٨٠	٤٠	١٦٠

باستخدام الصورة (٢) نجد أن

$$ر = \frac{\text{مح}\,(س - \bar{س})\,(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\text{مح}\,(س - \bar{س})^{٢}\ \text{مح}\,(ص - \bar{ص})}} = \frac{-٨٠}{\sqrt{٤٠ \times ١٦٠}} = -١$$

أى أن الارتباط تماما وعكسيا ويساوى -١

حساب معامل الارتباط فى حالة الجداول التكرارية المزدوجة

نفرض أن لدينا ٤٠ عامل وسألنا كل منهم عن دخله ومدة العمل وحصلنا على الجدول التكـــرارى المزدوج التالى

جـدول رقم (٤٠)

س الدخل بالجنيه / ص مدة العمل بالسنة	٣٥-	٤٥-	٥٥-	٦٥-٧٥	المجموع
١٠-	٢	١	١	-	٤
١٢-	١	٧	٥	١	١٤
١٤-	-	١٠	٥	٢	١٧
١٦-١٨	-	-	٣	٢	٥
المجموع	٣	١٨	١٤	٥	٤٠

والمطلوب حساب معامل الارتباط بين مدة العمل والدخل

معامل الارتباط فى حالة الجداول التكرارية المزدوجة نوضع على الصورة

$$ر = \frac{\text{مح ك س ص} - \text{ن} \,(\bar{\text{س}})\, \bar{\text{ص}}}{\sqrt{(\text{مح ك س}^2 - \text{ن } \bar{\text{س}}^2)(\text{مح ك ص}^2 - \text{ن } \bar{\text{ص}}^2)}}$$

$$ر = \frac{\text{ن مح ك س ص} - \text{مح ك . مح ك ص}}{\sqrt{\left(\text{ن مح ك س}^2 - (\text{مح ك س})^2\right)\left(\text{ن مح ك ص}^2 - (\text{مح ك ص})^2\right)}}$$

حيث $\bar{\text{س}} = \frac{\text{مح ك س}}{\text{ن}}$ ، $\bar{\text{ص}} = \frac{\text{مح ك ص}}{\text{ن}}$

لايجاد معامل الارتباط فى مثل هذه الحالات تقسم الحالات الى

(أ) ايجاد مح ك س^2 ، $\bar{\text{س}}$ من التوزيع الهامشى للمتغير س

(ب) ايجاد مح ك ص^2 ، $\bar{\text{ص}}$ من التوزيع الهامشى للمتغير ص

(حـ) ايجاد مح ك س ص من الجدول المزدوج

(أ) من التوزيع الهامشى للمتغير س نحصل على

جدول رقم (٤١)

فئات الدخل	التكرارات عدد العمال ك	مراكز الفئات	$\text{س} = \frac{\text{س} - ٥٠}{١٠}$	ك س	ك س^2
٣٥ــ	٣	٤٠	ــ١	ــ٣	٣
٤٥ــ	١٨	٥٠	صفر	صفر	صفر
٥٥ــ	١٤	٦٠	١	١٤	١٤
٦٥ــ٧٥	٥	٧٠	٢	١٠	٢٠
المجموع	٤٠			٢١	٢٧

∴ مح ك س = ٢١ ، مح ك س^2 = ٢٧

(ب) من التوزيع الهامشى للمتغير ص نحصل على

جـــدول رقم (٤٢)

فئات مدة العمل	التكرارات عدد العمال ك	مراكز الفئات ص	$ص = \frac{ص - ١٥}{٢}$	ك ص	ك ص٢
١٠ ـ	٤	١١	ـ ٢	ـ ٨	١٦
١٢ ـ	١٤	١٣	ـ ١	ـ ١٤	١٤
١٤ ـ	١٧	١٥	صفر	صفر	صفر
١٦ ـ ١٨	٥	١٧	١	٥	٥
المجموع	٤٠			ـ ١٧	٣٥

∴ مجـ ك ص = ـ ١٧ ، مجـ ك ص٢ = ٣٥

ولايجاد الخطوة (حـ) الجدول التكرارى المزدوج لكل من ص ، س

جـــدول رقم (٤٣)

ص \ س	ـ ١	صفر	١	٢
ـ ٢	٢ (٤)	١	١ (ـ ٢)	ـ
ـ ١	١ (١)	٧	٥ (ـ ٥)	١ (ـ ٢)
صفر		١٠	٥	٢
١			٣ (٣)	٢ (٢)

لحساب مجـ ك س ص نجد أن قيمة حاصل الضرب ك س ص = صفر لقيمة س = صفر ، ص = صفر وباقى القيم تساوى

مجـ ك س ص = ٤ + ١ ـ ٢ ـ ٥ + ٣ ـ ٢ + ٢ = ٣

$$\therefore\ \text{ر} = \frac{\text{ن مجـ ك س ص} - (\text{مجـ ك س})(\text{مجـ ك ص})}{\sqrt{\text{ن مجـ ك س}^{2} - (\text{مجـ ك س})^{2} \cdot \text{ن مجـ ص}^{2} - (\text{مجـ ك ص})^{2}}}$$

$$\text{ر} = \frac{٤٠ \times ٣ - (-١٧)(٢١)}{\sqrt{(٤٠)(٣٥) - (-١٧)^{2} \quad (٤٠)(٣٧) - (٢١)^{2}}} = \frac{٤٤٧}{(١١) \times ١٠٣٩}$$

$$\therefore\ \text{ر} = ٤٤\text{ر}٠$$

أى أن العلاقة بين الدخل ومدة العمل طردية

<u>مثـال ٢</u> : من الجدول التكرارى المزدوج احسب معامل الارتباط

جـدول رقم (٤٤)

ص / س	١٠ر٥ ـ ١٧ر٥	١٧ر٥ ـ ٢٤ر٥	٢٤ر٥ ـ ٣١ر٥	المجموع
٢٢ر٥ ـ ٢٧ر٥	—	—	١	١
٢٧ر٥ ـ ٢٢ر٥	—	٢	٢	٤
٢٢ر٥ ـ ١٧ر٥	١	٤	١	٦
١٧ر٥ ـ ١٢ر٥	٢	٢	—	٤
١٢ر٥ ـ ٧ر٥	١	—	—	١
المجموع	٤	٨	٤	١٦

من التوزيع الهامشي للمتغير س

جدول رقم (٤٥)

فئات س	التكرارات ك	مراكز الفئات	س = (س ـ ٢٠) / ٥	ك س	ك س٢
٣٢ر٥ ـ ٢٧ر٥	١	٣٠	٢	٢	٤
٢٧ر٥ ـ ٢٢ر٥	٤	٢٥	١	٤	٤
٢٢ر٥ ـ ١٧ر٥	٦	٢٠	صفر	صفر	صفر
١٧ر٥ ـ ١٢ر٥	٤	١٥	ـ١	ـ٤	٤
١٢ر٥ ـ ٧ر٥	١	١٠	ـ٢	ـ٢	٤
المجموع	١٦			صفر	١٦

∴ مجـ ك س = صفر ، مجـ ك س٢ = ١٦

من التوزيع الهامشي للمتغير ص

جدول رقم (٤٦)

فئات ص	التكرارات ك	مراكز الفئات ص	ص = (ص ـ ٢١) / ٧	ك ص	ك ص٢
١٠ر٥ ـ ١٧ر٥	٤	١٤	ـ ١	ـ ٤	٤
١٧ر٥ ـ ٢٤ر٥	٨	٢١	صفر	صفر	صفر
٢٤ر٥ ـ ٣١ر٥	٤	٢٨	١	٤	٤
المجموع	١٦			صفر	٨

∴ مجـ ك ص = صفر ، مجـ ك ص٢ = ٨

لحساب مجـ ك س ص نكون الجدول التكرارى المزدوج التالى

جـدول رقم (٤٧)

ص / س	١-	صفر	١
٢	—	—	١ ٢
١	—	٢	٢ ٢
صفر	١	٤	١
١-	٢ ٢	٢	—
٢-	١ ٢	—	—

من الجدول السابق مجـ ك س ص = ٨

∴ معامل الارتباط يساوى

$$ر = \frac{\text{ن مجـ ك س ص} - (\text{مجـ س})(\text{مجـ ص})}{\sqrt{\left(\text{ن مجـ س}^{2} - (\text{مجـ س})^{2}\right)\left(\text{ن مجـ ص} - (\text{مجـ ص})^{2}\right)}}$$

$$ر = \frac{١٦ \times ٨ - \text{صفر} \cdot \text{صفر}}{\sqrt{(١٦ \times ١٦)(١٦ \times ٨)}} = \frac{١}{\sqrt{٢}} = ٧ر$$

أى أن الارتباط طرديـــا .

معامل ارتباط سبيرمان لفروق الرتب :

نحسب معامل ارتباط بيرسون اذا كانت العلاقة بين المتغيرين علاقة خطية أما اذا اختلفت عن ذلك فان القيمة ليست دليلا على الارتباط بين المتغيرين وفى مثل هذه الحالة وحالات أخرى كعدم تجانس البيانات المعطاه . فاننا نلجأ الى حساب معامل ارتباط آخر وهو معامل ارتباط سبيرمان لفروق الرتب . وذلك بوضع كل قيم المتغيرين فى صورة رتب وتكتب معامل ارتباط سبيرمان على الصورة

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مج } ق^٢}{ن (ن^٢ - ١)}$$

حيث ن هى عدد المفردات

ق - هى فرق الرتب بين المتغيرين س ، ص

مثال (١) : احسب معامل الارتباط لسبيرمان للمتغيرين

س (نسبة البطالة) :	١٠	٩٠	٣٠	٤٠	٥٠
ص (قيمة الانتاج) :	٩٠	٧٠	٥٠	٣٠	١٠

ترتب مفردات المتغير س حسب قيمتها بحيث تظل الازدواج بين المتغيرين س ، ص كما هو .

س :	٥٠	٤٠	٣٠	٢٠	١٠
ص :	١٠	٣٠	٥٠	٧٠	٩٠

نضع الرتبة ١ أمام أكبر عدد والرتبة ٢ أمام العدد الذى يليه وهكذا نحصل على الجدول التالى

جدول رقم (٤٨)

س	ص	رتبه س	رتبه ص	فرق الرتب ق	ق٢
٥٠	١٠	١	٥	٤ ـ	١٦
٤٠	٣٠	٢	٤	٢ ـ	٤
٣٠	٥٠	٣	٣	صفر	صفر
٢٠	٧٠	٤	٢	٢	٤
١٠	٩٠	٥	١	٤	١٦
					٤٠

∴ مج ق٢ = ٤٠ ، ن = ٥

$$\therefore \; = 1 - \frac{6 \text{ مج ق}^2}{\text{ن} (\text{ن}^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 4}{5 \times 24} = -1$$

أى أن الارتباط تاما عكسيـــا .

<u>مثال ٢</u> : احسب معامل ارتباط سبيرمان للمتغيرين

س :	٢	٩	٣	٧	٥	٩	٨	٦	٤	٦
ص :	٨	٩	٤	٤	٤	٦	٥	٣	٤	٤

نرتب مفردات المتغير س تنازليا حسب قيمتها بحيث يظل الازدواج بين س ، ص كما هو

س :	٩	٩	٨	٧	٦	٦	٥	٤	٤	٢
ص :	٩	٦	٥	٤	٤	٣	٤	٤	٣	٨

نضع الرتبة ١ أمام أكبر عدد والرتبة ٢ أمام الذى يليه وهكذا ولكن اذا تكررت قيمة أكبر من مرة فان رتبتها عن متوسط رتبتهم جميعا فمثلا القيمة ٩ تكررت مرتين رتبتهما $\frac{1+2}{2}$ = ١٫٥ أى

لكل منهم رتبة مقدارها ٥ر١ وهكذا بالنسبة الى بقية القيم فنحصل على الجدول التالى :

جدول رقم (٤٩)

س	ص	رتبة س	رتبة ص	الفرق ق	$ق^2$
٩	٩	٥ر١	١	٥ر٠	٢٥ر٠
٩	٦	٥ر١	٣	ـ ٥ر١	٢٥ر١
٨	٥	٣	٤	ـ ١	٠٠ر١
٧	٤	٤	٥ر٦	ـ ٥ر٢	٢٥ر٦
٦	٤	٥ر٥	٥ر٦	ـ ١	٠٠ر١
٦	٣	٥ر٥	٥ر٩	ـ ٤	٠٠ر١٦
٥	٤	٧	٥ر٦	ـ ٥ر١	٢٥ر١
٤	٤	٥ر٨	٥ر٦	٢	٠٠ر٤
٤	٣	٥ر٨	٥ر٩	١	٠٠ر١
٢	٨	١٠	٢	٨	٠٠ر٦٤
					٠٠ر٩٦

∴ مج $ق^2$ = ٩٦ ن = ١٠

$$\therefore \quad ر = ١ - \frac{٦ \text{ مج } ق^2}{ن(ن^2 - ١)} = ١ - \frac{٩٦ \times ٦}{٩٩ \times ١٠} = ١ - ٥٨ر$$

∴ ر = ٤٢ر٠

ويلاحظ أنه يوجد اختلاف فى قيمة معامل الارتباط بطريقة الرتب عنه بطريقة بيرسون حيث أن هذه القيمة عند حسابها بطريقة بيرسون تساوى ٢١ر٠

وتعبر هذا المقياس أقل جودة من مقياس بيرسون لأنه يهمل قيم المتغيرين وان كان يمتاز عليه بسهولة حسابه . ونلجأ الى استخدامه فى حالة عندما يكون القيم ليست ذات أهمية .

تمارين

(١) احسب معامل الارتباط للمتغيرين س ، ص اذا كان

س : ٢ ٩ ٤ ٧ ٥ ٩ ٨ ٦ ٤ ٦

ص : ٨ ٩ ٣ ٤ ٤ ٦ ٥ ٣ ٤ ٤

الجواب ٦١ر

(٢) احسب معامل الارتباط للمتغيرين س ، ص اذا كان

س : ٩٠ ٢٠ ٦٠ ٧٠ ٤٠ ٨٥ ٣٥ ٥٥ ٨٠ ٢٥

ص : ٨٥ ٢٥ ٧٠ ٥٠ ٤٠ ٦٥ ٢٠ ٤٠ ٨٠ ٥٠

الجواب ٨٢ر

(٣) من واقع البيانات التالية

ص \ س	٥ ـ ١٠	١٠ ـ ١٥	١٥ ـ ٢٠	المجموع
٣ ـ م٣	١٠	٥	٥	٢٠
م٣ ـ ٤	٥	٣٠	١٥	٥٠
٤ ـ م٤		٢٥	٥	٣٠
المجموع	١٥	٦٠	٢٥	١٠٠

اوجد معامل الارتباط بين س ، ص

(٤) اذا كان توزيع مائه موظف حسب فئات العمر والمرتب الشهرى بالجنيه ممثل بالجدول المزدوج التالى :

فئات المرتب الشهرى / فئات العمر	١٠_٣٠	٣٠_٥٠	٥٠_٧٠	٧٠_٩٠	٩٠_١١٠	المجموع
٢٥_٣٠ سنة	٢٨	١٢	٥	_	_	٤٥
٣٠_٤٠	٧	١١	٦	_	_	٢٧
٤٠_٥٠	٢	٦	٦	١	١	١٨
٥٠_٦٠	_	_	٣	٢	٢	١٠
	٣٧	٢٩	٢٠	١١	٣	١٠٠

احسب معامل الارتباط بين العمر والمرتب الشهرى ٠

(٥) احسب معامل ارتباط سبيرمان للمتغيرين

س :	٨٥	٢٥	٧٠	٥٠	٤٠	٦٥	٢٠	٤٠	٨٠	٥٠
ص :	٩٠	٢٠	٦٠	٧٠	٤٠	٦٥	٣٥	٥٥	٨٠	٢٥

الجواب = ٨١٢٢ر٠

(٦) احسب معامل ارتباط سبيرمان للمتغيرين

س :	٩٥	٨٠	٦٠	٨٧	٣٠	٣٠	٨٠	٣٠	٥٠	٩٠
ص :	٧٧	٨٥	٥٠	٦٥	٧٠	٦٢	٨٥	٤٠	٣٠	٦٧

الجواب = ٥٠٢

خطـــوط الانحـــدار

عند دراسة الظواهر الاقتصادية والطبيعية فاننا نلجأ الى البحث عن العلاقة من هـــذه الظواهر وعناصرها أى ايجاد القوانين التي تربطهما ببعض فمثلا الاستهلاك والدخل نلاحظ أن أى تغير فى الدخل يتبعه تغير فى الاستهلاك أو أن أى تغير من عنصر الانتاج من عماله ورأس المال يتبعه تغير فى الانتاج . أو أى تغير فى عدد الأسر يتبعه تغير فى الاستهلاك الكلى وهكذا ...

ومهمة علم الاحصاء تعيين الخواص العامة والقوانين التى تتبعها هذه الظواهر وتسمى بخطوط الانحدار والهدف منها هو التنبؤ بالظاهرة فى المستقبل فمثلا من العلاقة بين الانتـــاج وعناصره يمكن ايجاد قيمة الانتاج لقيم معطاه من عناصر يمكن التنبؤ بالاستهلاك عند معرفة الدخـــل كما أنه يوجد علاقة بين عدد السكان والزمن ومن هذه العلاقة يمكن التنبؤ بعدد السكان فمثلا فـــى أى سنة .

وتأخذ هذه العلاقات صور رياضية مختلفة وسنقتصر على ذكر الصورة الخطية فقط وهى :

اذا كانت ص مثلا الاستهلاك الكلى ، س عدد الأسر فان العلاقة الخطية يليهما هى :

$$ص = أ + أ_{١} س \quad \cdots\cdots \quad (١)$$

وتسمى بخط انحدار ص على س وهى العلاقة التى يمكن منها التنبؤ بقيمة ص اذا أعطيت قيمة س ويكون المطلوب هو الوصول الى أحسن الصور للمعادلة (١) التى تمثل البيانات المعطـــاه أى ايجاد أحسن قيم للثوابت أ ، $أ_{١}$

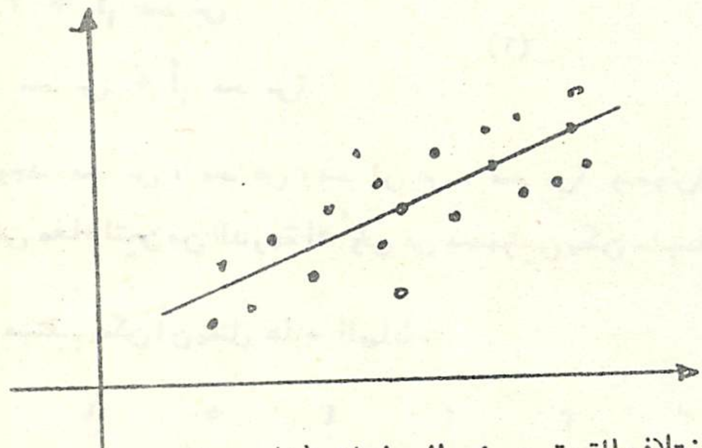
نفرض أن البيانات المعطاه للمتغير ص هى

$$ص_{١} ، ص_{٢} ، \cdots\cdots ، ص_{ن}$$

للمتغير س هى

$$س_{١} ، س_{٢} ، \cdots\cdots ، س_{ن}$$

ويمكن تمثيل هذه البيانات بيانيا فاننا نحصل على الشكل الانتشارى التالى



من الواضح أن اختلاف القيمة ص فى المعادلة (١) عن القيم ص$_1$ ، ص$_2$ ، ... ، ص$_ن$ يجب أن يكون أقل ما يمكن ويلاحظ أن هذا الاختلاف يكون سالبا احيانا وموجبا أحيانا ولذا فانه قد يكون المجموع يساوى صفرا وعلى ذلك فاننا نختار قيم أ ، أ$_1$ التى يكون فيها مجموع مربعات هذه القيم أقل ما يمكن أى مربعات تشتتات اقل ما يمكن .

م = مج (ص − صَ^)^2 = مج (صَ^ − ص)^2 أقل ما يمكن

بالتعويض عن قيمة صَ^ نحصل على

م = مج (أ + أ$_1$ سَ^ − ص)^2

ولكى يكون م أقل ما يمكن (نهاية صفرى) تفاضل قيمة م جزئيا بالنسبة الى أ$_1$ ، أ ونساويها بالصفر أى أن

$\frac{\partial م}{\partial أ}$ = صفر ، $\frac{\partial م}{\partial أ_1}$ = صفر

∴ − ٢ مج (أ + أ$_1$ سَ^ − ص) = صفر

− ٢ مج س (أ + أ$_1$ سَ^ − ص) = صفر

ومنها

$$\text{مج ص} = \text{ن أ} + \text{أ}_1 \ \text{مج س}$$

(٢)

$$\text{مج س ص} = \text{أ مج س} + \text{أ}_1 \ \text{مج س}^2$$

من البيانات المعطاه نوجد مج س ، مج ص ، مج س ص ، مج س٢ ونعوض فى المعادلات (٢) من هذه القيم نحصل على معادلتين من الدرجة الأولى فى مجهولين يمكن حلهما بالطرق المعروفة .

<u>مثال</u> : وفق أحسن مستقيم يمكن أن يمثل هذه البيانات

س :	٧	٦	٦	٥	٤	٤	٣	٣	١	١
ص :	١٠	٩	٨	٦	٤	٣	٣	٢	٣	٢

نجد أن

مج س = ٤٠ مج ص = ٥٠

مج س٢ = ١٩٨ مج ص س = ٢٥٠

بالتعويض عن هذه القيم فى (٢) نحصل على

$$٢٥٠ = ٤٠ \ \text{أ} + ١٩٨ \ \text{أ}_1$$

$$٤٠ = ١٠ \ \text{أ} + ٥٠ \ \text{أ}_1$$

وحل هاتين المعادلتين نحصل على

أ_1 = ـ ٢٤ر ، أ = ١ر٣١

∴ معادلة خط انحدار ص على س هى

ص = ١ر٣١ ـ ٢٤ر س

<u>مثال ٢</u> : البيانات المعطاه عن الدخل والاستهلاك هى

الدخل س	:	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦
الاستهلاك ص	:	٠ر٤	١ر٢	٢	٢ر٨	٣ر٦	٤ر٤	٥ر٢

وفق انحدار الاستهلاك على الدخل

نجد أن مجـ س = ٢١ مجـ ص = ١٩ر٦

مجـ س^2 = ٩١ ، مجـ س ص = ٨١ر٢

بالتعويض عن هذه القيم من المعادلات (٢) نحصل على

١٩ر٦ = ٧ أ + ٢١ أ$_1$

٨١ر٢ = ٢١ أ + ٩١ أ$_1$

من المعادلتين نحصل على

٢٢ر٤ = ٢٨ أ$_1$

$\therefore$ أ$_1$ = ٨ر

بالتعويض فى احدى المعادلتين نحصل على

$\therefore$ أ = ٤ر

معادلة خط انحدار الاستهلاك على الدخل هى

ص = ٤ر + ٨ر س

ويطلق على القيمة أ$_1$ = ٨ر الميل الحدى للاستهلاك

كما يمكن التنبوء بالاستهلاك لأى قيمة للدخل ..

مثال ٣ : البيانات المعطاه من الدخل والادخار (من المثال السابق)

الادخار س	:	ـ ر٤	ـ ر٢	صفر	ر٢	ر٤	ر٦	ر٨
الدخل ص	:	ر٤	١ر٢	صفر	٢ر٨	٣ر٦	٤ر٤	٥ر٢

وفق خط انحدار الاستهلاك على الادخار

نجد أن مجـ س = ١ر٤ ، مجـ ص = ١٧ر٦

مجـ س ص = ٨ر٤ ، مجـ س^{٢} = ١ر٤

بالتعويض فى هذه القيم من المعادلات (٢) نحصل على

١٧ر٦ = ٧ أ + ١ر٤ أ$_{١}$

٨ر٤ = ١ر٤ أ + ١ر٤ أ$_{١}$

من المعادلتين نحصل على

٤ر٨٨ = ١ر١٢ أ$_{١}$

$\therefore$ أ$_{١}$ = ٤ر٣٥

أ = ١ر٦٧

معادلة خط انحدار الدخل على الادخار هى

$\therefore$ ص = ١ر٦٧ + ٤ر٣٥ س

ومن هذه العلاقة يمكن التنبوء بالدخل اذا أعطيت قيمة للادخار بأقل خطأ ممكن

خط انحدار س على ص :

وهى العلاقة التى يمكن منها التنبوء بقيمة س اذا أعطيت قيمة ص وتكتب

س = أ + أ$_{١}$ ص .... (٣)

ويكون المطلوب الوصول الى أحسن صورة للمعادلة (٣) التى تجمل البيانات المعطاه أى ايجـــــاد الثوابت أ ، $أ_1$

من الواجب أحيانا أ قيم الثوابت $أ_1$ ، أ التى يكون فيها مربعات تشتتان القيم المعطاه $س_1$ ، $س_2$ ، ... ، سن عن س أقـل ما يمكن

أى م = مج ($\hat{س}$ ـ س)^2 أقل ما يمكن

= مج (أ + $أ_1$ $\hat{ص}$ ـ س)^2 أقل ما يمكن

ولكى تكون م أقل ما يمكن (نهاية صفرى) تفاضل قيمة م جزئيا بالنسبة الى $أ_1$ ، أ ونساويها بالصفر أى أن

$$\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{أ}} = \text{صفر} \quad ، \quad \frac{\partial \text{م}}{\partial \text{أ}_1} = \text{صفر}$$

∴ ـ٢ مج (أ + $أ_1$ص ـ ص) = صفر

ـ٢ مج ص (أ + $أ_1$ص ـ س) = صفر

ومنها

مج س = ن أ + $أ_1$ مج ص

مج س ص = أ مج ص + أ مج $ص^2$ (٤)

فى مثال (٢) نرى أن

مج س = ٢١ ، مج ص = ١٩ر٦

مج س ص = ٨١ر٢ ، مج $ص^2$ = ٧٢ر٨

بالتعويض عن هذه القيم فى المعادلات (٤) نحصل على

٢١ = ٧ أ + ١٩٫٦ أ$_{١}$

٨١٫٢ = ١٩٫٦ أ + ٧٢٫٨ أ

بضرب المعادلة الأولى فى ٢٫٨ نحصل على

٥٨٫٨ = ١٩٫٦ أ + ٥٤٫٨٨ أ$_{١}$

٨١٫٢ = ١٩٫٦ أ + ٧٢٫٨ أ

من هاتين المعادلتين نحصل على

∴ ١٧٫٩٢ أ$_{١}$ = ٢٢٫٤

∴ أ$_{١}$ = ١٫٢٥

ومنها فان أ = ـ ٫٥

∴ س = ـ ٫٥ + ١٫٢٥ ص

تمارين

أوجد خطوط الانحدار المستقيم ص على س ، س على ص للبيانات التالية :

(١) ص : ١٠ ٩ ٨ ٦ ٤ ٣ ٣ ٢ ٣ ٢

س : ٧ ٦ ٦ ٥ ٤ ٤ ٣ ٣ ١ ١

الجواب : ص = ١ر٣١ س ـ ٢٤ر

س = ٩٥ + ٠ر٦١ ص

(٢) س : ١٣ ١٢ ١٠ ١٠ ٨ ٦ ٦ ٥ ٣ ٢

ص : ١١ ١٤ ١١ ٧ ٩ ١١ ٣ ٧ ٦ ١

الجواب ص = ١ر٨٦ + ٠ر٨٢ س

س = ١ر٨٤ + ٠ر٧١ ص

الأرقـــام القياسيـــة

هى الاداه التى يمكن بها قياس التغير فى الظواهر بالنسبة الى الزمان أو المكان أى أنها المؤشـر التى يصف تغير الظواهر الاقتصادية المعقدة بالنسبة الى الزمن أو المكان . فمثلا الرقم القياسـى للأسعار يعكس التغير فى أسعار مختلف السلع الجدول التالى يبين مبيعات ثلاث سلع أسعارهـا وكمياتها خلال ثلاث شهور .

الشهور / السلع	١ السعر	١ الكمية	٢ السعر	٢ الكمية	٣ السعر	٣ الكمية
١	٣٠	٢	٢٠	٥	٢٠	٦
٢	٥٠	١	٤٠	٢	٣٠	٣
٣	٢٠	٤	٣٠	٢	٣٠	٢

وهنا نتساءل

(أ) كيف تغيرت المبيعات ؟

(ب) كيف تغير مستوى الأسعار ؟

(جـ) كيف تغيرت الكميات المباعة ؟

وللاجابة على هذه الأسئلة :

(أ) نوجد قيمة المبيعات فى كل شهر بجمع حاصل ضرب كمية كل سلعة فى سعرها أى أن مجمـوع (السعر × كمية السلعة) للشهر الأول

مجموع (السعر × كمية السلعة) للشهر الثانى

مجموع (السعر × كمية السلعة) للشهر الثالث

ويحدد الرقم القياسى للمبيعات كنسبة هذه المجاميع فنحصل على الرقم القياسى [illegible]
فمثلا الرقم القياسى للشهر الثانى بالنسبة الى الشهر الأول هو

$$\frac{\text{قيمة المبيعات فى الشهر الثانى}}{\text{قيمة المبيعات فى الشهر الاول}} = \frac{\text{مح (السعر × كمية السلعة) للشهر الثانى}}{\text{مح (السعر × كمية السلعة) للشهر الاول}}$$

$$= \frac{٢ \times ٣٠ + ٢ \times ٤٠ + ٥ \times ٢٠}{٤ \times ٢٠ + ١ \times ٥٠ + ٢ \times ٣٠} = \frac{٢٤٠}{١٩٠} = ١ر٢٦$$

وهذا الرقم يدل على أن قيمة المبيعات قد زادت فى الشهر الثانى عنها فى الشهر الاول أما بالنسبة الى الشهر الثالث

$$\frac{\text{قيمة المبيعات فى الشهر الثالث}}{\text{قيمة المبيعات فى الشهر الثانى}} = \frac{\text{مح (السعر × كمية السلعة) للشهر الثالث}}{\text{مح (السعر × كمية السلعة) للشهر الثانى}}$$

$$= \frac{٢٧٠}{٢٤٠} = ١ر١٢٥$$

أى أن الرقم يدل على أن قيمة المبيعات فى الشهر الثالث قد زادت عنها فى الشهر الثانى بمقدار ١٢ر٥ ٪

وتنسب قيمة المبيعات فى الشهر الثالث الى قيمتها فى الشهر الأول نحصل على

$$\frac{\text{قيمة المبيعات فى الشهر الثالث}}{\text{قيمة المبيعات فى الشهر الاول}} = \frac{٢٧٠}{١٩٠} = ١ر٤٢$$

ونلاحظ أنه عند مقارنة المبيعات فى أوقات مختلفة أما أن نقارن كل فترة بفترة الأساس أو أن نقارن كل فترة بالفترة السابقة لها ·

وتسمى الحالة الأولى بالرقم القياسى للأساس والحالة الثانية بالرقم المتسلسل ومن السهل التأكد من الصورة التالية :

$$\frac{\text{قيمة المبيعات فى الشهر الثانى}}{\text{قيمة المبيعات فى الشهر الاول}} \times \frac{\text{قيمة المبيعات فى الشهر الثالث}}{\text{قيمة المبيعات فى الشهر الثانى}} = ١ر٤٢ \%$$

أى أن ١ر٢٦ × ١ر٢٥ = ١ر٤٢

نجد أن قيمة المبيعات قد زادت فى الشهر الثالث عنها فى الشهر الاول بمقدار ٤٢ ٪

وأخيرا فى الاجابة على السؤال الاول نجد أن قيمة المبيعات زادت فى الشهر الثانى عنها فى الشهر الاول بمقدار ٢٦ ٪ وزادت فى الشهر الثالث عنها فى الشهر الثانى بمقدار ١٢ر٥ ٪ كما أنها زادت فى الشهر الثالث عنها فى الشهر الاول بمقدار ٤٢ ٪

والتعبير عن الرقم القياسى للمبيعات جبريا

نفرض أن $س_{١}^{(١)}$ ، $س_{٢}^{(١)}$ ، ... ، $س_{ن}^{(١)}$ أسعار السلع فى فترة المقارنة

$ك_{١}^{(١)}$ ، $ك_{٢}^{(١)}$ ، ... ، $ك_{ن}^{(١)}$ كمياتها فى فترة المقارنة

وأن $س_{١}^{(٠)}$ ، $س_{٢}^{(٠)}$ ، ... ، $س_{ن}^{(٠)}$ أسعار السلع فى فترة الأساس

$ك_{١}^{(٠)}$ ، $ك_{٢}^{(٠)}$ ، ... ، $ك_{ن}^{(٠)}$ كمياتها فى فترة الأساس

∴ الرقم القياسى لقيمة المبيعات هو

$$ق_{١} = \frac{\text{مجـ}\ س^{(١)}\ ك^{(١)}}{\text{مجـ}\ س^{(٠)}\ ك^{(٠)}} \quad ..... \quad (١)$$

وللاجابة على السؤال الخاص بتغير الأسعار نرى أن قيمة المبيعات فى الشهر الثانى زادت عنها فى الشهر الأول بمقدار ٢٦ ٪ وهذا راجع الى عاملين

(١) زيادة الكمية المباعة

(٢) تغير الأسعار .

فلو أزلنا تأثير تغير الكمية المباعة لتغيرت قيمة المبيعات نتيجة تغير الأسعار فقط فنسأل أنفسنا السؤال التالى :

كم قيمة المبيعات فى الشهر الثانى لو كانت الأسعار هى أسعار الشهر الأول وتساوى

مجـ (سعر الشهر الأول × كمية الشهر الثانى) = ٣٠ × ٥ + ٥٠ × ٢ + ٢٠ × ٢ = ٢٩٠

وقيمة المبيعات فى الشهر الثانى لو كانت الأسعار هى أسعار الشهر الثانى تساوى

مجـ (سعر الشهر الثانى × كمية الشهر الثانى) = ٢٠ × ٥ + ٤٠ × ٢ + ٣٠ × ٢ = ٢٤٠

ونلاحظ أن قيمة المبيعات أكبر منها للشهر الثانى والسبب فى ذلك أن المستهلك قد اشترى نفس كمية الشهر الثانى بأقل سعر وواضح أن

$$\frac{\text{مجـ (سعر الشهر الثانى × كمية الشهر الثانى}}{\text{مجـ (سعر الشهر الأول × كمية الشهر الثانى}} = \frac{٢٤٠}{٢٩٠} = ٨٣ر$$

وهذا يبين مقدار الانخفاض الكلى للأسعار ونلاحظ أنها انخفضت بمقدار ١٧٪ وجبريا يمكن كتابة الرقم القياسى

$$ق_٢ = \frac{\text{مجـ } س^{(١)} ك^{(٠)}}{\text{مجـ } س^{(٠)} ك^{(٠)}} \quad ..... \quad (٢)$$

وتسمى هذا الرقم بالرقم القياسى المرجح بالنسبة الى كميات فترة الأساس وقد تكون المقارنة بالنسبة الى كميات المقارنة تحصل على

$$ق_٣ = \frac{\text{مجـ } س^{(١)} ك^{(١)}}{\text{مجـ } س^{(٠)} ك^{(١)}} \quad ..... \quad (٣)$$

وتسمى الرقم القياسى المرجح بالنسبة الى كميات فترة المقارنة ويمكن الوصول الى رقم قياسى من (٢) ، (٣)

$$\text{ق}_{٤} = \sqrt{\frac{\text{مح س}^{(١)}\ \text{ك}^{(٠)}}{\text{مح س}^{(٠)}\ \text{ك}^{(٠)}} \times \frac{\text{مح س}^{(١)}\ \text{ك}^{(٠)}}{\text{مح س}^{(٠)}\ \text{ك}^{(١)}}} \qquad (٤)$$

وهذا يسمى <u>الرقم الأمثل لفيشر</u>

<u>وللاجابة على السؤال الثالث وهو ايجاد التغير فى الكميات</u>

كما أن قيمة المبيعات تحدد نتيجة لعاملين هما الكمية الاسعار وبالتخلص من تأثير الأسعار نحصل على طريقة تغير الكميات ٠

نحسب قيمة المبيعات فى الشهر الثانى لو ظلت أسعار الشهر الأول بدون تغير

$$\frac{\text{مح (سعر الشهر الأول × كمية الشهر الثانى)}}{\text{مح (سعر الشهر الأول × كمية الشهر الأول)}} = \frac{٢٩٠}{١١٩} = \text{١ر٥٣}$$

أى أن الكمية قد زادت بمقدار ٥٣٪ عنها فى الشهر الأول

وجبريا فان

الرقم القياسى المرجح بأسعار فترة الأساس هو

$$\text{ق}_{٥} = \frac{\text{مح س}^{(٠)}\ \text{ك}^{(١)}}{\text{مح س}^{(٠)}\ \text{ك}^{(٠)}} \quad \ldots\ldots \qquad (٥)$$

والرقم القياسى المرجح بأسعار فترة المقارنة هو

$$\text{ق}_{٦} = \frac{\text{مح س}^{(١)}\ \text{ك}^{(١)}}{\text{مح س}^{(١)}\ \text{ك}^{(٠)}} \quad \ldots\ldots \qquad (٦)$$

والرقم القياسى الأمثل هو

$$ق_{٧} = \sqrt{ق_{٤}\ ق_{٥}} = \sqrt{\frac{مجـ\ س^{(٠)}\ ك^{(١)}}{مجـ\ س^{(٠)}\ ك^{(٠)}} \times \frac{مجـ\ س^{(١)}\ ك^{(١)}}{مجـ\ س^{(١)}\ ك}} \quad ... \quad (٧)$$

ويجب ملاحظة :

(١) عند مقارنة الكميات فاننا قد حولنا الكميات الى قيم وذلك لأنه لا يمكن مقارنة كميات فـــترة المقارنة للسلع المختلفة بكميات فترة الأساس وذلك لأن القيم معطاه بوحدات مختلفة .

(٢) $\frac{س^{(١)}}{س^{(٠)}}$ يحدد مقدار الزيادة فى السعر

(٣) $\frac{مجـ\ س^{(١)}}{مجـ\ (س)}$ ـ المتوسط الأسعار لفترة الاساس بالنسبة الى فترة المقارنة ويسمى بالرقـــــــم التجميعى البسيط .

ونلاحظ انه نحدد الزيادة او النقص فى السعر ولكن لا تتخذ كمقياس وذلك لأنه يعطى بعض السلع التى ليس لها أهمية وزن يساوى السلعة التى لها أهمية كبيرة كوحدة الملح مثلا أو الفحم وسط سلع مثل القمح والأرز كما يعيبه أيضا اختلاف الوحدات القياسية .

(٤) يوجد فى الموضوعات الاقتصادية الأرقام القياسية التالية

(١) الرقم القياسى للأسعار الجملة .

(٢) الرقم القياسى لنفقة المعيشة .

(٣) الرقم القياسى للانتاج الصناعى .

(٤) الرقم القياسى للانتاج الزراعى .

(٥) عند تكوين أى رقم قياسى لابد أن نتفق على فترة الأساس التى سنتخذها لتركيب الرقم القياســـى فمثلا تتخذ سنة معينة طابعها الاستقرار الاقتصادى

مثال : فى مصنع ما يوجد الجدول التالى للمواد الخام لثلاث أنواع داخلة فى تكوين سلعة ما كمياتها وأسعارها بالنسبة الى فترة الأساس والمقارنة .

المواد الخام	سنة الأساس		سنة المقارنة	
	الكمية	السعر	الكمية	السعر
١	٣٠٠٠	٥٠	٤٠٠٠	٤٥
٢	٤٥٠٠	١٢	٤٥٠٠	١١
٣	٨٠٠٠	٣٠	٧٠٠٠	٢٨

السؤال (١) كيف تغيرت قيمة المشتريات ؟

(٢) كيف تغيرت الأسعار ؟

(٣) كيف تغيرت الكميات ؟

للاجابة على السؤال الأول يستخدم الصورة (١)

$$\text{ق}_{1} = \frac{\text{مح س}^{(1)}\ \text{ك}^{(1)}}{\text{مح س}^{(0)}\ \text{ك}^{(0)}} = \frac{\text{١٩٦٠٠٠} + \text{٤٩٥٠٠} + \text{١٨٠٠٠٠}}{\text{٢٤٠٠٠٠} + \text{٥٤٠٠٠} + \text{١٥٠٠٠٠}}$$

$$= \frac{\text{٣٢٥٥}}{\text{٤٤٤٠}} = \text{٧٣ر}$$

أى أن قيمة المشتريات قلت بمقدار ٢٧٪ عنها فى سنة الأساس

وللاجابة على السؤال الثانى يستخدم الصورة (٢) الترجيح بكميات الأساس أو الصورة (٣) الترجيح بكميات المقارنة .

$$\text{ق}_{2} = \frac{\text{مح س}^{(1)}\ \text{ك}^{(0)}}{\text{مح س}^{(0)}\ \text{ك}^{(0)}} = \frac{\ldots \times \text{٨٠٠٠} + \text{١١} \times \text{٤٥٠٠} + \text{٤٥} \times \text{٣٠٠٠}}{\text{٣٠} \times \text{٨٠٠٠} + \text{١٢} \times \text{٤٥٠٠} + \text{٥٠} \times \text{٣٠٠٠}}$$

$$= \frac{\text{٤٠٨٥}}{\text{٤٤٤٠}} = \text{٩٢ر٠}$$

أى أن أسعار السلع قلت فى فترة المقارنة عنها فى فترة الأساس بمقدار ٨٪
واستخدام الصورة (٣)

$$\frac{\text{محـ س}^{(1)}\ \text{ك}^{(1)}}{\text{محـ س}^{(0)}\ \text{ك}^{(0)}} = \frac{28 \times 7000 + 11 \times 4500 + 45 \times 4000}{30 \times 7000 + 12 \times 4500 + 50 \times 400} = \frac{4255}{4640} = 0.917$$

أى أن الاسعار قلت فى فترة الأساس عنها فى فترة المقارنة بمقدار ٨ ٪ تقريبا

ونرى أن الرقم القياسى الأمثل للتغير فى الأسعار هو

$$\sqrt{0.92 \times 0.917} = 92$$

وللاجابة على السؤال الثالث يستخدم الصورة (٥) الترجيح بأسعار فترة الأساس أو (٦) الترجيح بأسعار فترة المقارنة .

$$\text{ق}_{5} = \frac{\text{محـ س}^{(0)}\ \text{ك}^{(1)}}{\text{محـ س}^{(0)}\ \text{ك}^{(0)}} = \frac{30 \times 7000 + 12 \times 4500 + 50 \times 4000}{30 \times 8000 + 12 \times 4500 + 50 \times 3000}$$

$$= \frac{4640}{4440} = 1.045$$

أى أن الكميات قد زادت فى فترة المقارنة عنها فى فترة الأساس بمقدار ٥ر٤٪ واستخدام الصورة (٦)

$$\text{ق}_{6} = \frac{\text{محـ س}^{(1)}\ \text{ك}^{(1)}}{\text{محـ س}^{(1)}\ \text{ك}^{(0)}} = \frac{4255}{4085} = 1.043$$

أى أن الكميات قد زادت فى فترة المقارنة عنها فى فترة الأساس بمقدار ٣ر٤٪

ونرى أن الرقم القياسى الأمثل للتغير فى الكميات هو

$$\sqrt{١٫٠٤٢ \times ١٫٠٤٥} = ١٫٠٤٤$$

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

تمارين

(١) الجدول التالى يبين انتاج مصنع لثلاث سلع كمياتها وأسعارها فى سنتين متتاليين

السلع	السنة الاولى		السنة الثانية	
	الكميات	الاسعار	الكميات	الاسعار
١	١٥٠٠٠	٢٥	١٠٠٠٠	٣٠
٢	٣٠٠٠٠	٢٠	٥٠٠٠٠	١٥
٣	١٥٠٠	٢٣٠	٣٠٠٠	٢١٠

السؤال : (١) كيف تغيرت قيمة الانتاج ؟

(٢) كيف تغيرت الأسعار ؟

(٣) كيف تغيرت الكميات ؟

(٢) الجدول التالى يبين العمال وانتاج كل عامل داخل وحدتين انتاجية خلال فترتين متتاليين

الوحدة الانتاجية	الفترة الاولى		الفترة الثانية	
	عدد العمال	انتاج كل عامل	عدد العمال	انتاج كل عامل
١	٣٠٠	١٠	١٥٠	١١
٢	١٠٠	٢٠	٣٠٠	٢٤

السؤال :

(١) كيف تغير الانتاج الكلى داخل الوحدتين ؟

(٢) كيف تغيرت العمالة

(٣) كيف تغير انتاج العامل ؟

المعـدل المتوسط للنمــو

لنفرض أن الدخل زاد فى خمسة سنوات بمقدار ٧٠٪ أو بمعنى آخر أنه أصبح بعد خمــس سنوات ٧ر١ مرة وهنا نتسائل

ما مقدار الزيادة المتوسطة فى الدخل سنويا ؟

والاجابة على هذا السؤال هو ايجاد الجذر الخامس للمقدار ٧ر١ وهو ١١٢ر١ مرة فى السنــة أى أن الزيادة هى ١١٢ر٠

وشال آخر : نفرض أن عدد السكان زاد خلال ١٠ سنوات بمدار ١٠٠٪ فما مقدار الزيادة السنوية في المتوسط ؟

معنى الزيادة فى ١٠ سنوات ١٠٠٪ أى أن ما كان أولا واحد اصبح بعد عشر سنوات ٢ ولو قسمنا ١٠٠٪ على عشر سنوات لحصلنا على الزيادة فى السنة ١٠٪ أى ١ر٠

من السهل التأكد أن اضافة ١ر٠ الى كل سنة الى مدة العشر سنوات فان

أى أن ١ + ١ر١ + (١ر١)^{٢} + ... فان المجموع لا يساوى ٢ انما أكثر من ذلك

ولحساب الزيادة السنوية الصحيحة نوجد الجذر العاشر للمقدار ٢ ــ ١ وهو يساوى ٠٧ر وعلــى ذلك فان الزيادة المتوسطة السنوية هى ٧٪ أى أن الزيادة فى السكان فى السنة الثانية عنها فـى السنة الأولى قد زادت بمقدار ٠٧ر ، والزيادة فى السنة الثالثة عنها فى السنة الثانية تساوى عـدد السكان فى السنة الثانية × ٠٧ر٠

أى ٠٧ر١ × ٠٧ر = ٠٧٥ر وهكذا

وجبريا فاذا كانت $ص_{ن}$ تمثل عدد السكان بعد ن من السنين $ص_{٠}$ عدد السكان فى سنــة الأساس ، هـ معدل الزيادة المتوسطة سنويا٠

نجد أن $ص_{١}$ = $ص_{٠}$ + $ص_{٠}$ هـ = $ص_{٠}$ (١ + هـ)

$$ص_٢ = ص_١ + ص_١ هـ = ص_٠ (١ + هـ)^٢$$

$$ص_٣ = ص_٢ + ص_٢ هـ = ص_٠ (١ + هـ)^٣$$

وهكذا

$$\therefore \quad ص_ن = ص_٠ (١ + هـ)^ن \quad \ldots\ldots \quad (١)$$

<u>مثال</u> : اذا كان معدل نمو الدخل سنويا هو ٢ر١١٪ وكان قيمة الدخل حاليا هو ص٠ فان قيمة الدخل بعد خمس سنوات هو

$$ص_٥ = (١ + ١١٢ر)^٥ ص_٠ = ٧ر١ ص_٠$$

من المعادلة (١) $\therefore$ اذا كانت $ص_ن = ٢ ص_٠$ أى مضاعفة الدخل القومى مثلا فان

$$٢ ص_٠ = ص_٠ (١ + هـ)^ن$$

$$\therefore \quad ١ + هـ = \sqrt[ن]{٢}$$

ومنها فان $هـ = \sqrt[ن]{٢} - ١$

وهذا هو معدل النمو الذى يمكن به مضاعفة الدخل القومى خلال ن من السنين

مثال : الجدول التالى يبين عدد السكان ودخل الفرد فى ج٠ع٠م٠

الزمن	عدد السكان بالالف	دخل الفرد بالدولار
١٩٥٢	٢١٤٨٣	٩٩٫٦
١٩٥٣	٢٢٠٠٣	١١١٫٦
١٩٥٤	٢٢٥٥٣	١١٠٫٣
١٩٥٥	٢٢٩٩٠	١١٤٫٣
١٩٥٦	٢٣٥٣٢	١١٤٫٣
١٩٥٧	٢٤٠٨٧	١٢٨
١٩٥٨	٢٤٦٥٥	١٣٦٫٧
١٩٥٩	٢٥٢٣٧	١٥٤٫٧
١٩٦٠	٢٥٨٣٢	١٦٠٫٤
١٩٦١	٢٦٥٥٧	١٦١٫٨
١٩٦٢	٢٧٢٤٤	١٤٢٫٣
١٩٦٣	٢٧٩٦٨	١٤٠٫٠
١٩٦٤	٢٨٦٩٩	١٦٤٫٤
١٩٦٥	٢٩٦٠٠	١٦١٫٠

أوجد معدل الزيادة المتوسطة فى

(١) السكان

(٢) الدخل

الحل : نفرض أن سنة الاساس هى ١٩٥٢

قيمة دخل الفرد فى هذه السنة هو $ص_{.}$ = ٩٩٫٦

، $ص_{ن}$ = $ص_{١٤}$ = ١٦١

∴ بالتعويض فى المعادلة (١) نحصل على

$$١٦١ = ٩٩٫٦ \; (١ + هـ_{١})^{١٤}$$

$\therefore$ هـ $=$ $\sqrt[١٤]{١ر٢}$ $-$ ١ $=$ ١ر٠٣٩ $-$ ١ $=$ ر٠٣٩

ومنها فان هـ$_١$ $=$ ٣ر٩ ٪

أى أن معدل الزيادة فى الدخل سنويا هو ٣ر٩٪

بالنسبة الى معدل الزيادة المتوسطة فى السكان

فان ص. $=$ ٢١٤٨٣

ص$_{١٤}$ $=$ ٢٩٦٠٠

بالتعويض فى (١) نحصل على

٢٩٦٠٠ $=$ ٢١٤٨٣ $($ ١ $+$ هـ$_٢$ $)^{١٤}$

$\therefore$ هـ$_٢$ $=$ $\sqrt[١٤]{١ر٢٢}$ $-$ ١ $=$ ١ر٠٣٨ $-$ ١ $=$ ر٠٣٨

أى أن معدل الزيادة فى السكان سنويا هو ٣ر٨ ٪