الجمهورية العربية المتحدة

معهد التخطيط القومى

مذكرة رقم ٨٨٨

الرقابة الاحصائية لجودة الانتاج

اعداد

الدكتورة نادية مكارى

مايو ١٩٦٩

القاهرة

٣ شارع محمد مظهر - بالزمالك

الآراء التى وردت فى هذه المذكـــــــــــــــــــــرة

تمثل رأى الكاتب ولاتمثل رأى المعهد ذاتـــــــــــــــه

أولا : لوحـات ضبط جودة الانتـــاج

Quality Control Charts

ان السبب الاساسى فى استخدام المبادئ والأسس الاحصائية لمراقبة جودة الانتاج يرجع الى أن جودة المنتجات تتوقف على عوامل عشوائية بالاضافة الى العوامل السببية . فالعوامل السببية Assignable Causes مثل نوع الآلة أو مهارة العامل أو نوع الخامات ... ـ يمكن دراستها والتحكم فيها . أما العوامل العشوائية أو العرضية فهى تلك التى تؤدى الى اختلاف جودة الوحدات المنتجة بالرغم من تشابه "جميع" ظروف الانتاج . وفى ظل هذه العوامل العشوائية فان الاختلافات فى الجودة تتبع توزيعا احتماليا . والتعرف على هذا التوزيع الاحتمالى وخصائصه هو الأساس الذى تبنى عليه المراقبة والضبط الاحصائى لجودة الانتاج .

فمثلا اذا كانت جودة احدى المنتجات تقاس بوزن الوحدة المنتجة واذا كانت الادارة الصناعية تقوم بفحص عينات دورية (حجم كل منها ن وحدة) من الانتاج الكلى لهذه السلعة وذلك لحساب متوسط وزن الوحدة المنتجة بكل عينة والذى سنرمز له بالرمز $\bar{س}$ ، فان قيمة $\bar{س}$ ستختلف من عينة الى أخرى نتيجة كل من العوامل السببية والعوامل العشوائية . فاذا افترضنا غياب العوامل السببية (أى اذا افترضنا أن العينات مسحوبة من نفس المجتمع الاحصائى) فان المتغير $\bar{س}$ يكون متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع المعتاد * . فاذا كانت $\bar{س}'$ ، $\frac{ع'}{\sqrt{ن}}$ هما الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لهذا التوزيع فان قيمة المتغير $\bar{س}$ ستقع فى فترة الثقة $(\bar{س}' \pm م_{\alpha} \frac{ع'}{\sqrt{ن}})$ وذلك

---

* اذا كان المجتمع الأصلى يتبع التوزيع المعتاد فان المتغير $\bar{س}$ يكون له توزيعا معتادا . أما اذا كان المجتمع الأصلى لا يتبع التوزيع المعتاد فان التوزيع الاحتمالى للمتغير $\bar{س}$ سيؤول الى التوزيع المعتاد مع زيادة حجم العينة وذلك بافتراض أن المجتمع الأصلى لا نهائى .

باحتمال قدرة (١ — α) حيث تعرف $م_{\alpha}$ بالمعادلة

$$\int_{م_{\alpha}}^{\infty} \frac{١}{\sqrt{٢ط}} \; هـ^{-\frac{ت^{٢}}{٢}} \; ك ت = \frac{\alpha}{٢}$$

فاذا سحبت عينة ووجد أن متوسط وزن الوحدة المنتجة بها وهو $\bar{س}$ يقع بين حدى الثقة $\bar{س}' \pm م_{\alpha} \frac{ع'}{\sqrt{ن}}$ فان الادارة الصناعية تستطيع أن تقرر أن الاختلاف بين $\bar{س}'$ ، $\bar{س}$ يرجع الى عوامل عشوائية فقط ، وبالتالى فليس هناك ما يدعو الى وقف الانتاج لفحص العملية الانتاجية واكتشاف الأسباب التى أدت الى اختلاف القيمة $\bar{س}$ عن القيمة المتوقعة $\bar{س}'$ · واحتمال أن يكون هذا القرار صحيحا هو (١ — α) ·

أما اذا وقعت $\bar{س}$ خارج حدى الثقة المذكورين فان هذا يدل على أن الاختلاف بين $\bar{س}$ ، $\bar{س}'$ قد يعزى الى عوامل سببية [وذلك باحتمال قدره (١ — α)] وبالتالى فان على الادارة أن تحاول فحص العملية الانتاجية لمعرفة هذه العوامل السببية — ان وجدت — واكتشاف ما اذا كانت تؤدى الى تحسين الجودة وبالتالى يجب تعزيزها لرفع مستوى جودة المنتجات ، أو تؤدى الى انخفاض مستوى الجودة فيجب ازالتها أو تجنبها ·

من هذا يتضح أن الضبط الاحصائى لجودة الانتاج ما هو الا تطبيق مباشر لاختبارات الفروض الاحصائية · ففى المثال السابق كان لدينا اختبارا احصائيا فرضه العدمى (Null hypothesis) هو : $\mu = \bar{س}'$ وفرضه البديل (Alternative hypothesis) هو : $\mu \neq \bar{س}'$ حيث μ هى القيمة المتوقعة للمتغير العشوائى $\tilde{س}$ · ووقوع القيمة المشاهدة $\bar{س}$ داخل حدى الثقة معناه عدم وجود دليل كافى لرفض الفرض العدمى · بينما وقوع $\bar{س}$ خارج حدى الثقة معناه رفض الفرض العدمى (عند درجة الثقة المعطاه) ·

ويلاحظ أن القرار الذى تتخذه الادارة بناء على نتيجة الاختبار الاحصائى يتعرض لنوعين

من الخطأ :

النـــوع الأول : رفض الفرض العدمى بالرغم من أنه صحيح :

فاذا وقعت القيمة $\bar{س}$ خارج حدى الثقة فان الادارة ستقرر وقف العملية الانتاجية لفحصها ولمعرفة العوامل السببية المؤدية الى ذلك . ولكن من المحتمل ألا تكون هناك أى عوامل سببيـــة وأن يكون وقوع المشاهدة خارج حدى الثقة راجعا الى عوامل عشوائية فقط . واحتمال أن يحدث هـــذا الخطأ هو ما يسمى عادة " بمستوى المعنوية " وسنرمز له بالرمز α .

النـــوع الثانى : قبول الفرض العدمى بالرغم من أنه خاطىء :

فاذا وقعت القيمة $\bar{س}$ داخل حدى الثقة فان الادارة ستقرر استمرار العملية الانتاجية مفترضة عدم وجود أى عوامل سببية . ولكن من المحتمل أن يكون هناك فى الواقع عوامل سببية مؤثرة علـــى العملية الانتاجية الا أن الاختبار الاحصائى لم يظهرها . ومن الممكن معرفة قيمة احتمال الوقـــوع فى هذا النوع من الخطأ اذا كان الفرض البديل بسيطا وبافتراض أن قيمة α معلومة .

فاذا كانت β (ص) ترمز الى احتمال الوقوع فى النوع الثانى من الخطأ عندما يكون الفـــرض البديل هو μ = ص مثلا فانه يمكن حساب قيمة β (ص) من المعادلة :

$$\beta(ص) = \int_{ك_1}^{ك_2} \frac{1}{\sqrt{2ط}}\, هـ^{-\frac{ت^2}{2}}\, ءت$$

حيث

$$ك_1 = \frac{\bar{س}' - ص}{ع'/\sqrt{ن}} - م_\alpha$$

$$ك_2 = \frac{\bar{س}' - ص}{ع'/\sqrt{ن}} + م_\alpha$$

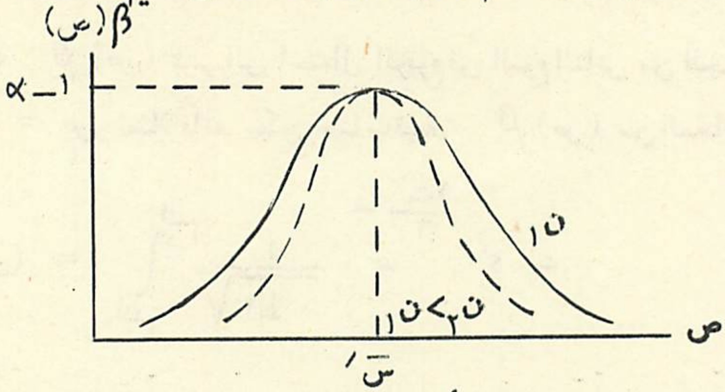
وذلك لأنه فى ظل الفرض البديل البسيط يكون المتغير $\bar{\text{س}}$ هو متغير عشوائى له توزيع معتاد وسطه الحسابى μ = ص وخطأه المعيارى $\frac{\text{ع}'}{\sqrt{\text{ن}}}$. ولكن احتمال قبول الفرض العدمى هو احتمال وقوع المتغير $\bar{\text{س}}$ بين حدى الثقة $\bar{\text{س}}' \pm \text{م}_{\alpha} \frac{\text{ع}'}{\sqrt{\text{ن}}}$ أى أنه يساوى احتمال وقوع المتغير $\frac{\bar{\text{س}} - \text{ص}}{\text{ع}'/\sqrt{\text{ن}}}$ (وهو متغير معتاد قياسى فى ظل الفرض البديل) بين القيمتين :

$$\frac{\bar{\text{س}}' - \text{ص}}{\text{ع}'/\sqrt{\text{ن}}} \pm \text{م}_{\alpha}$$

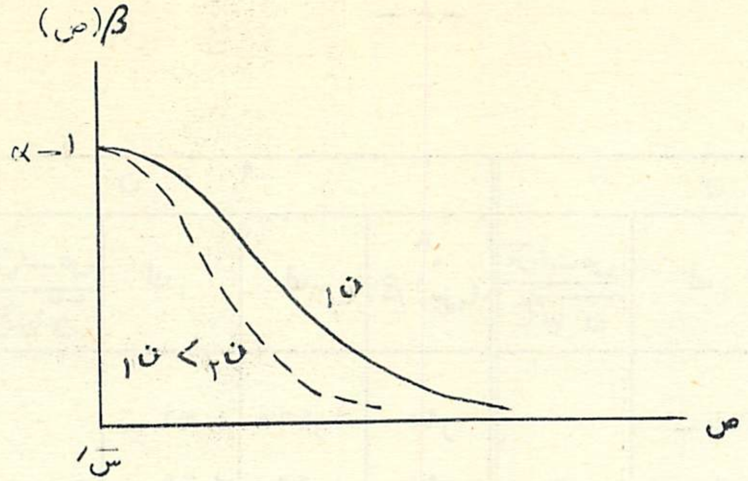
(وذلك لكل قيمة من قيم α) .

من هذا يتضح أن احتمال حدوث خطأ من النوع الثانى يتوقف على قيمة كل من ص ، ن (وذلك لكل قيمة من قيم α) . ويلاحظ أن β (ص) = ١ − α اذا كانت $\bar{\text{ص}} = \bar{\text{س}}'$ وأن قيمتها تتناقص (وتؤول الى الصفر) كلما ابتعدت قيمة ص عن قيمة $\bar{\text{س}}'$ — فى أى من الاتجاهين — كما يلاحظ أن قيمة β (ص) تتناقص مع زيادة حجم العينة (لكل قيمة ثابتة ص) .

وعلى ذلك فانه يمكن تمثيل β (ص) بيانيا كدالة فى القيم المختلفة للمقدار ص :



والمنحنى هنا متماثل نتيجة افتراض أن التوزيع الاحتمالى المستخدم هو التوزيع المعتاد بالاضافة الى استخدام اختبار ذو ذيلين (الذيلين متساويان وكل منهما يساوى $\frac{\alpha}{٢}$ فى ظل الفرض العدمى) . ونتيجة هذا التماثل فانه يمكن الاكتفاء برسم أحد طرفى المنحنى . أى أنه يمكن توضيح العلاقة بين β (ص) ، ص بالشكل التالى :



ملاحظات :

١ - الدالة [١ - β (ص)] تسمى دالة قوة الاختبار Power function

٢ - اذا كان الاختبار المستخدم ذو ذيل واحد فان المنحنى الذى يمثل العلاقة بين β (ص) ، ص سيأخذ الشكل المبين بالرسم البيانى الأخير .

٣ - اذا كان الفرض البديل البسيط هو μ = ص فانه يمكن تحديد حجم العينة ن التى تجعل β (ص) مساوية لقيم معلومة .

مثال ١ :

ارسم المنحنى β (ص) للاختبار الاحصائى للوسط الحسابى اذا علمت أن :

الفرض العدمى μ = ١٢

الفرض البديل μ = ١٢٫١٥ ، ١٢٫٣٠ ، ١٢٫٤٥ ، ....

الانحراف المعيارى هو ١٫٥

مستوى المعنوية α = ٠٫٠٥

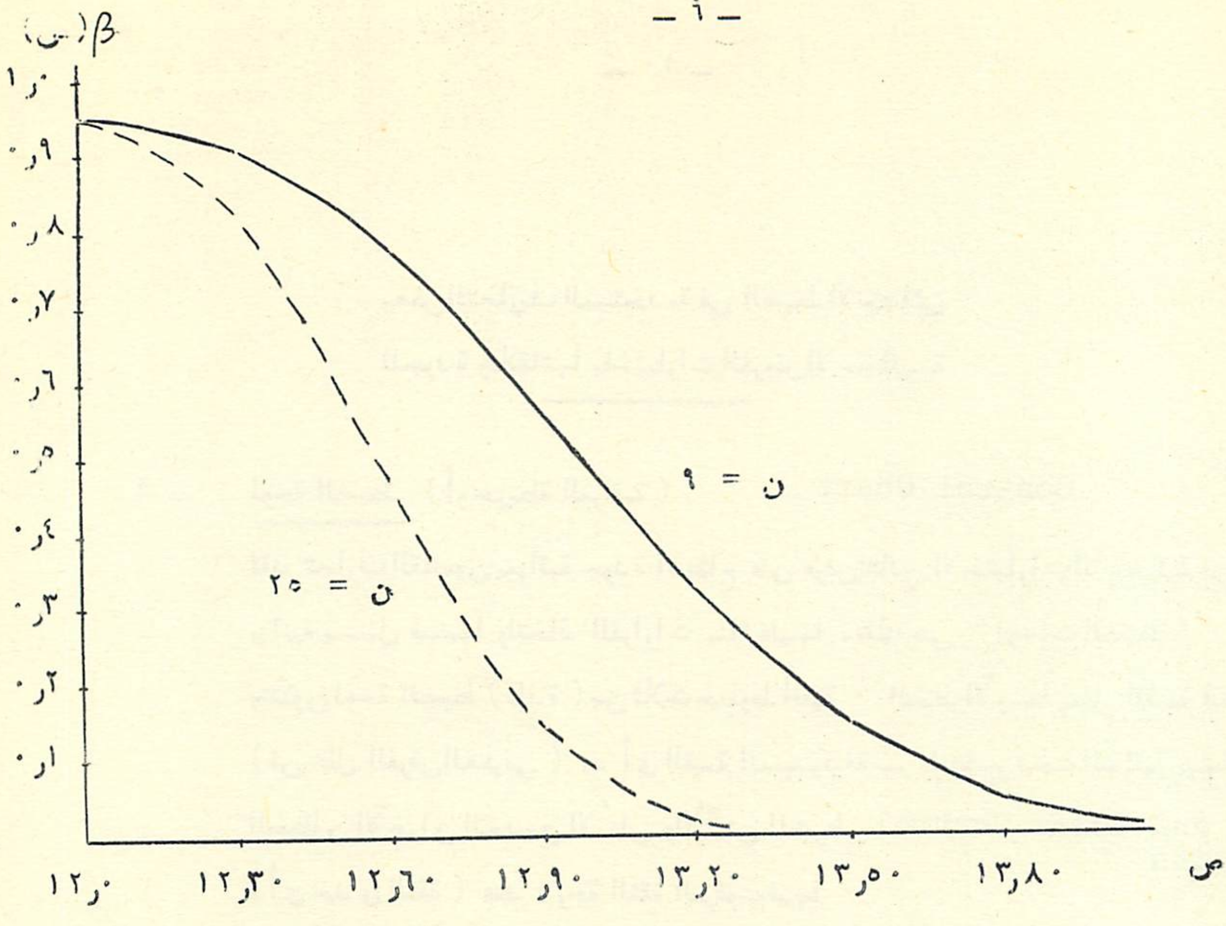
وذلك لاحجام العينات ٩ ، ٢٥

الحل : طالما أن α = ٠٫٠٥ فان $م_α$ = ١٫٩٦

ونحصل على قيم β (ص) من الجدول التالى :

ص	ن = ٩				ن = ٢٥			
	$\frac{\bar{\text{س}} - \text{ص}}{\text{ع}/\sqrt{\text{ن}}}$	ك١	ك٢	% β(ص)	$\frac{\bar{\text{س}} - \text{ص}}{\text{ع}/\sqrt{\text{ن}}}$	ك١	ك٢	% β(ص)
١٢ر٠	٠	-١ر٩٦	+١ر٩٦	٠ر٩٥	٠	-١ر٩٦	+١ر٩٦	٠ر٩٥
١٢ر١٥	-٠ر٣	-٢ر٢٦	١ر٦٦	٠ر٩٤	-٠ر٥	-٢ر٤٦	١ر٤٦	٠ر٩٢
١٢ر٣٠	-٠ر٦	-٢ر٥٦	١ر٣٦	٠ر٩١	-١ر٠	-٢ر٩٦	٠ر٩٦	٠ر٨٣
١٢ر٤٥	-٠ر٩	-٢ر٨٦	١ر٠٦	٠ر٨٥	-١ر٥	-٣ر٤٦	٠ر٤٦	٠ر٦٨
١٢ر٦٠	-١ر٢	-٣ر١٦	٠ر٧٦	٠ر٧٨	-٢ر٠	-٣ر٩٦	-٠ر٠٤	٠ر٤٨
١٢ر٧٥	-١ر٥	-٣ر٤٦	٠ر٤٦	٠ر٦٨	-٢ر٥	-٤ر٤٦	-٠ر٥٤	٠ر٢٩
١٢ر٩٠	-١ر٨	-٣ر٧٦	٠ر١٦	٠ر٥٦	-٣ر٠	-٤ر٩٦	-١ر٠٤	٠ر١٥
١٣ر٠٥	-٢ر١	-٤ر٠٦	-٠ر١٤	٠ر٤٤	-٣ر٥	-٥ر٤٦	-١ر٥٤	٠ر٠٦
١٣ر٢٠	-٢ر٤	-٤ر٣٦	-٠ر٤٤	٠ر٣٣	-٤ر٠	-٥ر٩٦	-٢ر٠٤	٠ر٠٢
١٣ر٣٥	-٢ر٧	-٤ر٦٦	-٠ر٧٤	٠ر٢٣	-٤ر٥	-٦ر٤٦	-٢ر٥٤	٠
١٣ر٥٠	-٣ر٠	-٤ر٩٦	-١ر٠٤	٠ر١٥	-٥ر٠	-٦ر٩٦	-٣ر٠٤	٠
١٣ر٦٥	-٣ر٣	-٥ر٢٦	-١ر٣٤	٠ر٠٩	-٥ر٥	٠	٠	٠
١٣ر٨٠	-٣ر٦	-٥ر٥٦	-١ر٦٤	٠ر٠٥	-٦ر٠	٠	٠	٠
١٣ر٩٥	-٣ر٩	-٥ر٨٦	-١ر٩٤	٠ر٠٣	-٦ر٥	٠	٠	٠
١٤ر١٠	-٤ر٢	-٦ر١٦	-٢ر٢٤	٠ر٠١	-٧ر٠	٠	٠	٠
١٤ر٢٥	-٤ر٥	-٦ر٤٦	-٢ر٥٤	٠ر٠٠	-٧ر٥	٠	٠	٠

أى أن المنحنى β (ص) هو :


β(ص)
١٫٠
٠٫٩
٠٫٨
٠٫٧
٠٫٦
٠٫٥
٠٫٤
٠٫٣
٠٫٢
٠٫١
ن = ٩
ن = ٢٥
١٢٫٠
١٢٫٣٠
١٢٫٦٠
١٢٫٩٠
١٣٫٢٠
١٣٫٥٠
١٣٫٨٠
ص

بعض التعاريف المستخدمة فى الضبط الاحصائى
للجودة وعلاقاتها باختبارات الفروض الاحصائيــة

١ ــ لوحة الضبط (أو خريطة المراقبة) Control Chart

لقد تعارف القائمون بمراقبة جودة الانتاج على عرض نتائج الاختبارات الاحصائية فى صــورة بيانية يسهل فهمها واتخاذ القرارات بناء عليها ، تلك هى " لوحات الضبط " ٠

وتتكون لوحة الضبط (عادة) من ثلاث خطوط أفقية ٠ الخط الأوسط يمثل القيمة المتوقعــة (فى ظل الفرض العدمى) ــ أى القيمة المستهدفة ــ للمتغير تحت المراقبة بينما يمثــل الخطان الآخران الحدين الأعلى والأدنى للضبط Upper and Lower Control Limits (أى حدى الثقة) عند درجة الثقة المرغوب فيها ٠

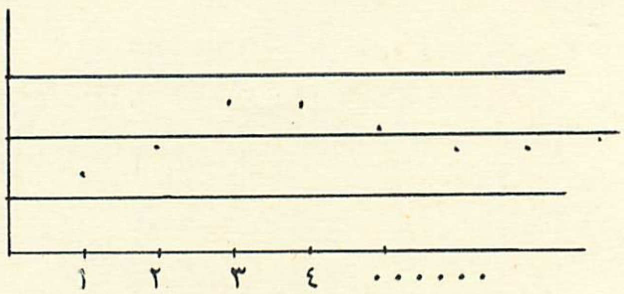
ففى المثال السابق تكون لوحة الضبط لمتوسط وزن الوحدة المنتجة عند درجــــة الثقة ٩٩٫٧ ٪* هى :

$\bar{س}$

(UCL) $\bar{س}' + ٣ \frac{ع'}{\sqrt{ن}}$

$\bar{س}'$

(LCL) $\bar{س}' - ٣ \frac{ع'}{\sqrt{ن}}$



رقم العينة

ويتم ضبط العملية الانتاجية عن طريق هذه اللوحات وذلك بأخذ عينات دوريـــة وحساب قيمة المتغير المستخدم كمقياس للجودة (فى كل عينة) وتوقيع النقط المناظرة علــى لوحة الضبط ٠ وطالما كانت النقط واقعة داخل حدود الضبط فان الانتاج يستمر ويقــال

---

* بناء على الخبرة المستمدة من مجالات صناعية مختلفة فان حدود الضبط المبنية على ثـــلاث امثال الخطأ المعيارى تعتبر محققة لنوع من التعادل بين نوعى الخطأ ولذلك فهى تستخـــدم عـــادة ٠

أن العملية تحت الضبط الاحصائى Under Control أما اذا وقعت احدى النقط خارج حدود الضبط فان الانتاج يوقف حتى يتم فحص العملية الانتاجية ويقال أن العملية الانتاجية خارجة عن الضبط الاحصائى Out-of. Control

فأهمية هذه اللوحات تظهر فى قدرتها على التفرقة (بدرجة ثقة معلومة) بين العوامل السببية والعوامل العشوائية المؤثرة على جودة المنتجات . وكثيرا ما يؤدى هذا الى اكتشاف أسباب المشاكل الانتاجية وبالتالى الى رفع مستوى جودة الانتاج . بالاضافة الى ذلك فان استخدام هذه اللوحات معناه التسليم بامكانية وجود عوامل عشوائية ومعرفة مدى تأثيرها على العملية الانتاجية وبالتالى فانه يؤدى الى تخفيض نفقات فحص العملية الانتاجية التى قد تتم بدون مبرر اذا لم تستخدم لوحات الضبط للتفرقة بين الحالات التى تكون فيها اختلافات الجودة راجعة الى عوامل عشوائية والحالات التى تكون فيها هذه الاختلافات راجعة على عوامل سببية .

يضاف الى هذه المزايا أن لوحات الضبط تساعد الفنيين على تعيين المواصفات الفنية بطريقة واقعية وعلى المقارنة بين الطرق المختلفة للانتاج . وهذا ما سنوضحه عند تعريف " حدود التسامح " .

٢ — حدود التسامح : Tolerance Limits

عند القيام بانتاج معين يكون هناك دائما مواصفات فنية يحاول المنتج تحقيقها ونظرا لأن هناك الكثير من العوامل الفنية التى تؤثر على الوحدة المنتجة فان المختصين يضعون دائما " حدودا للتسامح " لهذه المواصفات ، بمعنى أنهم يعتبرون الوحدة المنتجة محققة للمواصفات الفنية المطلوبة اذا وقعت قيمة المقياس المستخدم كدليل على المواصفة بين حدى التسامح .

والآن ما هو الفرق بين حدى التسامح وحدى الضبط ؟

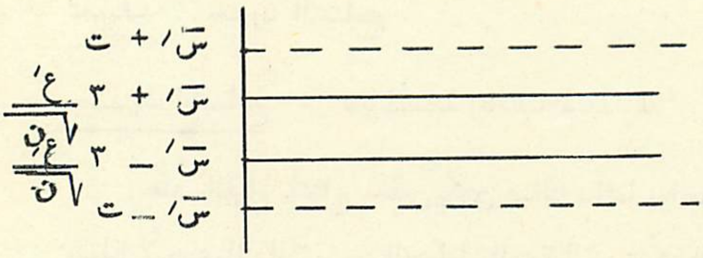
أن حدى التسامح يعرفا بناء على اعتبارات فنية بينما يعرف حدى الضبط بناء على

اعتبارات احصائية . فاذا افترضنا فى المثال السابق أن متوسط الوزن المطلوب تحقيقه فنيا هو أيضا س̄′ ، وأنه من المسموح به فنيا أن يقع متوسط وزن الوحدة المنتجة بين س̄′ ± ت فان حدى التسامح يكونا س̄′ ± ت بينما حدى الضبط هما س̄′ ± ٣ ع′/√ن (بثقة ٩٩,٧٪) .

واذا رسمنا كل من حدى الضبط وحدى التسامح على لوحة واحدة فاننا نحصل على احدى الحالتين الآتيتين :

<u>أولا</u> : حدود الضبط داخلة ضمن حدود التسامح :

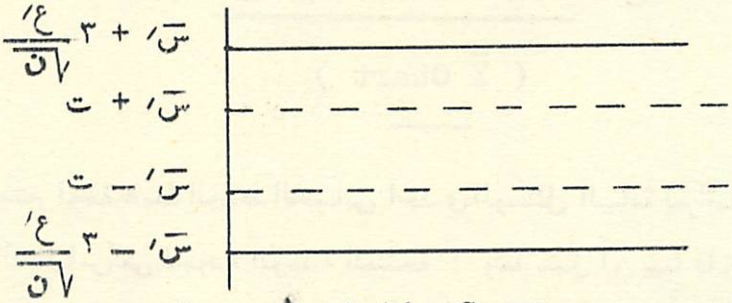
فى هذه الحالة نجد أن النقط التى تقع خارج حدود الضبط مازال مسموح بها فنيا ، وبالتالى فقد لا يكون هناك ما يدعو الى فحص العملية الانتاجية . ومن الواضح أن هذا قد يدل على عدم فاعلية لوحة الضبط . الا أنه قد يدل أيضا على " ضعف " حدود التسامح بمعنى أنه من الممكن مراجعة المواصفات الفنية ووضع حدودا أضيق للتسامح تكون أكثر فاعلية مما يؤدى الى رفع مستوى جودة المنتجات .



<u>ثانيا</u> : حدود التسامح داخلة ضمن حدود الضبط :

فى هذه الحالة قد نجد أن العملية الانتاجية تحت الضبط الاحصائى وبالرغم من ذلك توجد بعض الوحدات المنتجة الغير مسموح بها فنيا . ومعنى ذلك أن العملية الانتاجية لن تستطيع تحقيق المواصفات المطلوبة . وقد يرجع ذلك الى وضع مواصفات فنية " متعسفة " (أو غير واقعية) كما أنه قد يرجع الى أن التشتت بين الوحدات المنتجة كبيرا (مما يؤدى الى اتساع المسافة بين حدى الضبط) أو الى صغر حجم

العينات المستخدمة ... وبالتالى فان على الادارة الصناعية اما أن تحاول استخدام طريقة انتاجية جديدة حتى تتحقق المواصفات المطلوبة أو أنها ستطالب الفنيين باعادة النظر فى المواصفات الموضوعة .



٣ – منحنى مميز الفاعلية : Operating characteristic Curve

لكل لوحة ضبط يمكن حساب " منحنى مميز الفاعلية " الذى يبين الى أى مدى تكون عملية الرقابة أو الضبط فعالة فهو يعطى احتمال الاستمرار فى الانتاج (نتيجة وقوع النقطة المشاهدة داخل حدى الضبط) بالرغم من وجود عوامل سببية مؤثرة على العملية الانتاجية . ومنحنى مميز الفاعلية يبين هذه المخاطرة كدالة فى القيم المختلفة التى يمكن أن يأخذها مقياس الجودة . وعلى ذلك فهو نفس المنحنى الذى رمزنا اليه من قبل بالرمز β (ص) .

مما سبق يتضح أن استخدام لوحات الضبط يؤدى الى معرفة المستوى الفعلى لجودة المنتجات وكذلك الى مراقبة وتحسين هذا المستوى . وفيما يلى سندرس الأنواع المختلفة من لوحات الضبط وطرق تقدير حدى الضبط فى كل نوع .

---

١ ـ لوحة ضبط الوسـط الحسابـى
($\bar{X}$ Chart)

تُعتبر لوحة ضبط الوسط الحسابى احدى الوسائل الهامة لمراقبة وضبط العملية الانتاجية اذا كان هناك مقياس كمى لجودة الوحدة المنتجة . وكما سبق أن بينا فان تكوين هذه اللوحة يفترض أن القيمة المستهدفة لمتوسط هذا المقياس ($\bar{س}'$) وكذلك الانحراف المعيارى له ($ع' / \sqrt{ن}$) معلومتان وبالتالى فان حدى الضبط للوسط الحسابى هما :

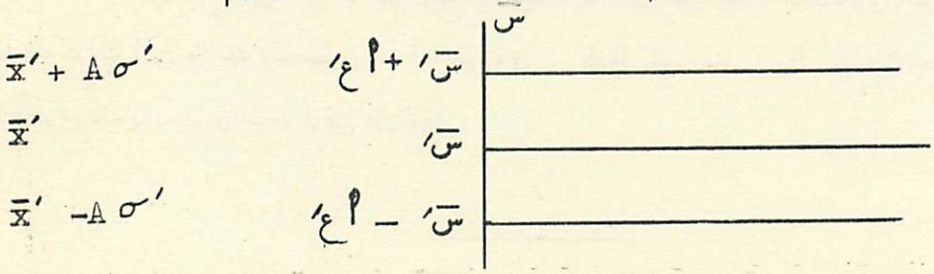
$$\bar{س}' \pm ٣ \frac{ع'}{\sqrt{ن}}$$

(ن هو حجم كل من العينات التى يتم سحبها دوريا من الانتاج الكلى)

فاذا وضعنا $أ = \frac{٣}{\sqrt{ن}}$ فان حدى الضبط يصبحا :

$$\bar{س}' \pm أ ع'$$

حيث تعتمد قيمة أ على حجم العينة ن وتظهر فى الجدول رقم (١)



وتتم مراقبة وضبط العملية الانتاجية بتوقيع قيمة المتوسط لكل عينة ($\bar{س}$) على لوحة الضبط ويستمر الانتاج طالما أن النقط تقع داخل حدى الضبط . فاذا ما وقعت احدى النقط خارج حدى الضبط يوقف الانتاج وتفحص العملية الانتاجية .

أما اذا كانت $\bar{\text{س}}'$ ، $\text{ع}'$ مجهولتان فاننا نبدأ بمحاولة تقدير هذه المعالم وذلك باستخدام البيانات المتوفرة من عينات سابقة . ولنفرض أن لدينا م من العينات المستقلة التى لم يتعرض الانتاج بكل منها الى أى عوامل سببية* (أى أنها سحبت من نفس المجتمع الاحصائى الذى سنفترض أنه يتبع التوزيع المعتاد) .

فى هذه الحالة فانه يمكن استخدام المتوسط العام $\bar{\bar{\text{س}}} = \dfrac{\sum_{1}^{\text{م}} \bar{\text{س}}}{\text{م}}$ كتقدير للمعلمه $\bar{\text{س}}'$ حيث أنه تقدير غير متحيز لها

أما المعلمه $\text{ع}'$ فانه يمكن تقديرها باستخدام متوسط الانحراف المعيارى أو متوسط المدى للعينات .

١ ـ تقدير $\text{ع}'$ باستخدام متوسط الانحرافات المعيارية

نظرية* :

اذا كانت $$\text{ع}^2 = \frac{\sum_{1}^{\text{ن}} (\text{س}_\text{هـ} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}}$$

فان ع يكون متغيرا عشوائيا توقعه هو $\text{ح}_2 \; \text{ع}'$ وانحرافه المعيارى هو

$$\text{ع}' \sqrt{\frac{\text{ن}-1}{\text{ن}} - \text{ح}_2^2} \quad \left(\text{حيث } \text{ح}_2 = \sqrt{\frac{2}{\text{ن}}} \; \frac{\Gamma(\frac{\text{ن}}{2})}{\Gamma(\frac{\text{ن}-1}{2})} \right)$$

وبناء على هذه النظرية فان $\dfrac{\bar{\text{ع}}}{\text{ح}_2}$ هو تقدير غير متحيز للمعلمة $\text{ع}'$

---

* اذا لم يتحقق هذا الفرض فاننا نكون لوحة ضبط مبدئية نستدل منها على العينات التى تكون متوسطاتها خارج حدى الضبط المبدئية فنستبعد هذه العينات ثم نعيد حساب خط الوسط وحدى الضبط ونكرر ذلك حتى نحصل على مجموعة من العينات تمثل عملية انتاجية تحت الضبط الاحصائى .

* لن يذكر اثبات هذه النظرية هنا . انظر مرجع رقم (٤)

(حيث $\bar{ع} = \frac{\text{مجـ}_{1}^{م}\ ع}{م}$)

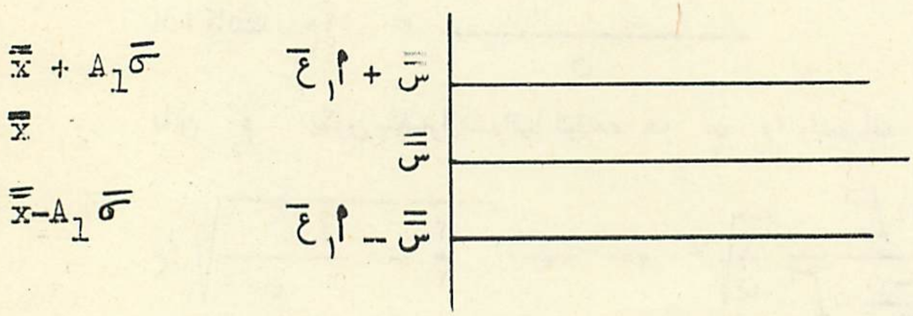
وعلى ذلك فان حدى الضبط للوسط الحسابى يكونا :

$$\bar{\bar{س}} \pm ٣ \frac{\bar{ع}}{ح_{٢}\sqrt{ن}}$$

وبوضع $\frac{٣}{ح_{٢}\sqrt{ن}} = أ_{١}$ فان حدى الضبط يكونا

$$\bar{\bar{س}} \pm أ_{١}\, \bar{ع}$$

حيث تظهر قيمة $أ_{١}$ فى الجدول رقم (١) كدالة فى ن



٢ — <u>تقدير ع/ باستخدام متوسط المدى :</u>

بالرغم من دقة الطريقة السابق ذكرها لتقدير ع/ فانها من الناحية التطبيقة لا يكثر استخدامها نظرا لتعدد الحسابات اللازمة لايجاد الانحراف المعيارى لكل عينة · ولذلك — اذا كان حجم العينة صغيرا — فانه يمكن استخدام المدى (أى الفرق بين أكبر وأصغر قراءة فى العينة) بدلا من الانحراف المعيارى · وذلك لأن المدى هو أيضا متغير عشوائى يمكن ايجاد دالة كثافة الاحتمال له الا أنها عادة تظهر بصورة معقدة لا يسهل اجراء التكامل لها رياضيا ·

فاذا رمزنا للمدى بالرمز ى فان ى $= \tilde{س}_{(ن)} - \tilde{س}_{(١)}$

حيث $\tilde{س}_{(ن)}$ ترمز الى أكبر قراءة ، $\tilde{س}_{(١)}$ ترمز الى أصغر قراءة فى العينة . واذا كان المتغير $\tilde{س}$ يتبع توزيعا معتادا متوسطه $\bar{س}'$ وانحرافه المعيارى $ع'$ فان هناك جداول منشورة تعطى قيم التوزيع الاحتمالى للمتغير و حيث

$$و = \frac{(\tilde{س}_{(ن)} - \bar{س}') - (\tilde{س}_{(١)} - \bar{س}')}{ع'}$$

(أى أن و هى المدى لمتغيرات تتبع التوزيع المعتاد القياسى)

$$\therefore \quad و = \frac{ى}{ع'}$$

ويلاحظ أن المتغير و يتوقف على حجم العينة ن . أى أن التوزيع الاحتمالى للمتغير و يعتمد على حجم العينة ن . ولذلك فان الجداول المذكورة تعطى قيم التوزيع الاحتمالى للمتغير و عند القيم المختلفة لحجم العينة ن .

وباستخدام هذه الجداول فانه يمكن ايجاد القيمة المتوقعة للمتغير و وسنرمز لها بالرمز $ك_٢$ وكذلك الانحراف المعيارى له وسنرمز له بالرمز $ك_٣$ ($ك_٢$ ، $ك_٣$ تظهر فى الجدول رقم (٢) بدلالة ن) . وعلى ذلك فان القيمة المتوقعة للمتغير ى هى $ك_٢ \; ع'$

كما أن الانحراف المعيارى للمتغير ى هو $ك_٣ \; ع'$

وبالتالى فان $\frac{\bar{ى}}{ك_٢}$ هو تقدير غير متحيز للمعلمة $ع'$ (حيث $\bar{ى} = \frac{\sum_{١}^{م} ى}{م}$)

أى أن حدى الضبط يمكن كتابتهما على الصورة :

$$\bar{\bar{س}} \pm ٣ \; \frac{\bar{ى}}{ك_٢ \sqrt{ن}}$$

وبوضع $أ_٢ = \frac{٣}{ك_٢ \sqrt{ن}}$ فان حدى الضبط يكونا :

$$\bar{\bar{س}} \pm أ_٢ \; \bar{ى}$$

حيث تظهر قيمة أ٢ فى الجدول رقم (١) بدلالة ن

س̿ + أ٢ ى̄ — $\bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R}$

س̿ — $\bar{\bar{x}}$

س̿ - أ٢ ى̄ — $\bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R}$

مثـال ٢ :

لدينا ١٠ عينات بكل منها ٥ قراءات كالتالى :

رقم العينة	القـــراءات (١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)
١	٢٫٥٤٦	٤٫٧٧٨	٥٫٠٨٩	٥٫٣٦١	٥٫٩٣١
٢	٢٫١٨٤	٤٫٤٦٠	٥٫٤١٨	٥٫٧٩٤	٦٫٣٤٥
٣	٤٫٢٩٩	٤٫٥٧٩	٥٫١٢٠	٥٫٥٨٠	٨٫١٦٤
٤	٣٫٩٣٢	٤٫٦٥٣	٥٫٠١٩	٧٫٤٤٨	١٠٫٥١١
٥	٢٫٥٩٦	٤٫٧٢١	٥٫٧٦٧	٦٫٠١٠	٧٫٧٨٥
٦	٤٫٠١٣	٥٫٤٣٩	٥٫٩٨٠	٦٫٢٠٩	٦٫٩١٦
٧	١٫٥٨٨	١٫٨٣٤	٤٫٨٤٢	٦٫٠٠٣	٧٫٢٣٤
٨	٣٫٢٠٤	٤٫١٠٨	٤٫٢٢٧	٤٫٤٢٢	٨٫٢٢٤
٩	٣٫١٠٧	٣٫٢٢٢	٤٫١٨٢	٥٫٥٢٠	٨٫٧٥٠
١٠	٣٫٥٨٩	٤٫٢١٧	٤٫٥٢٧	٥٫٨٥٤	٦٫٢٨٥

والمطلوب : لوحة ضبط الوسط الحسابى :

أولا : اذا علمت أن القيمة المستهدفة لمتوسط القراءات (س̄/) هى ٥ وأن الانحـــراف المعيارى ع/ هو ٢ .

ثانيا : اذا كانت س̄/ ، ع/ غير معلومة واستخدم متوسط الانحرافات المعيارية كتقدير للمعلمه ع/

ثالثا : اذا كانت س̄/ ، ع/ غير معلومة واستخدم متوسط المدى كتقدير للمعلمة ع/

الحل :

أولا : اذا كانت س̄/ = ٥ ، ع/ = ٢ فان

خط الوسط = ٥

حدى الضبط هما :

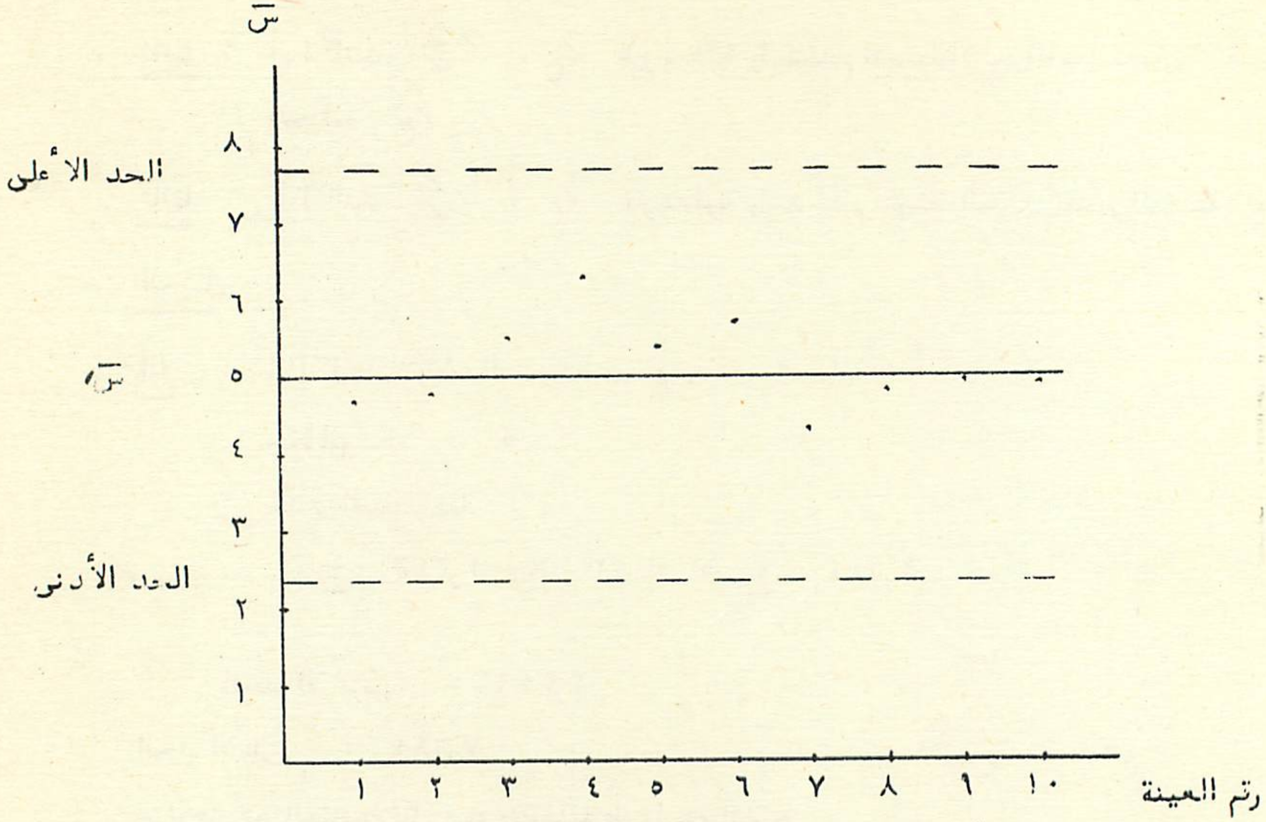
٥ ± ١ر٣٤٢ × ٢ = ٥ ± ٢ر٦٨٤

∴ الحد الأدنى = ٢ر٣١٦

الحد الأعلى = ٧ر٦٨٤

ثم نوجد قيم المتوسط لكل عينة ونوقعها على لوحة الضبط

رقم العينة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	المجموع
المتوسط	٤ر٧٤١٠	٤ر٨٤٠٢	٥ر٥٤٨٤	٦ر٣١٢٦	٥ر٣٧٥٨	٥ر٧١١٤	٤ر٣٠٠٢	٤ر٨١٩٠	٤ر٩٥٦٣	٤ر٨٩٤٤	٥١ر٤٩٩٢



ويتضح من اللوحة أن العملية الانتاجية تحت الضبط الاحصائى .

ثانيا : $\bar{\bar{س}} = \frac{مح\ \bar{س}}{١٠} = ٥ر١٤٩٩٢$

ولحساب متوسط الانحرافات المعيارية نوجد أولا الانحراف المعيارى لكل عينة :

رقم العينة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	المجموع
الانحراف المعيارى	١ر١٦١	١ر٤٦٣	١ر٣٨٠	٢ر٤٠٨	١ر٧٠٣	٠ر٩٧٣	٢ر٢٤٧	١ر٧٥٢	٢ر٠٨٥	١ر٠١٥	١٦ر١٨٧

الانحراف المعيارى = $ع = \sqrt{\frac{مح\ (س - \bar{س})^{٢}}{ن}}$)

$\therefore\ \bar{ع} = ١ر٦١٨٧$

∴ خط الوسط هو ٥ر١٤٩٩٢

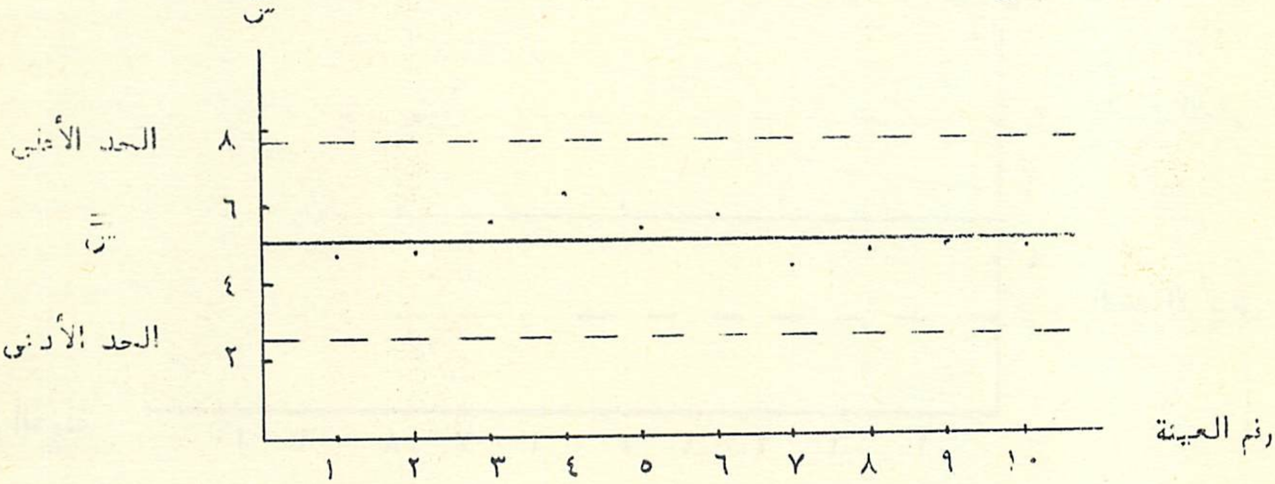
، حدى الضبط هما :

$$٥ر١٤٩٩٢ \pm أ_١ \bar{ع} = ٥ر١٤٩٩٢ \pm ١ر٥٩٦ \times ١ر٦١٨٧$$

∴ الحد الأدنى = ٢ر٥٧

الحد الأعلى = ٧ر٧٣

ثم نوقع المتوسطات على لوحة الضبط :



<u>ثالثا</u> : لحساب متوسط المدى نوجد أولا المدى لكل عينة :

رقم العينة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	المجموع
المدى ى	٣ر٣٨٥	٤ر١٦١	٣ر٨٦٥	٦ر٥٧٩	٥ر١٨٩	٢ر٩٠٣	٥ر٦٤٦	٥ر٠٢٠	٥ر٦٤٣	٢ر٦٩٦	٤٥ر٠٨٧

(حيث ى = أكبر قراءة ـ أصغر قراءة فى العينة)

∴ $\bar{ى}$ = ٤ر٥٠٨٧

خط الوسط هو ٥ر١٤٩٩٢

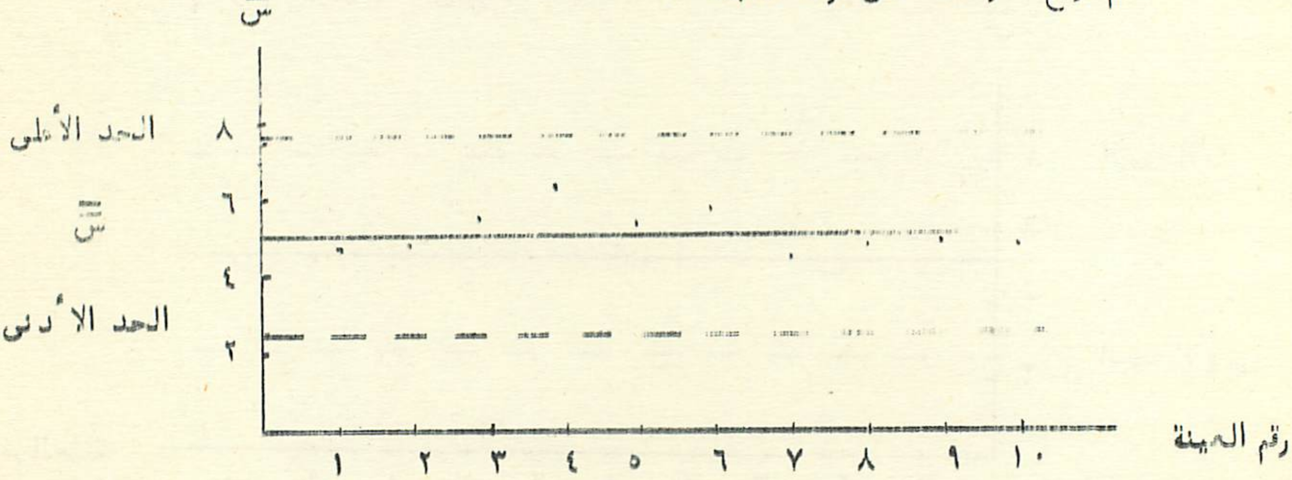
، حدى الضبط هما :

١٤٩٩٢ر٥ ± أ٢ ى‾ = ١٤٩٩٢ر٥ ± ٥٧٧ر٠ × ٤٫٠٨٧

∴ الحد الأدنى = ٢٫٥٥

الحد الأعلى = ٧٫٧٥

ثم نوقع المتوسطات على لوحة الضبط :



منحنى مميز الفاعلية للوحة ضبط الوسط الحسابي :

بعد الحصول على لوحة الضبط يجب حساب مميز الفاعلية لها حتى يمكن معرفة احتمال أن تقع النقطة س‾ التي تمثل متوسط محسوب من احدى العينات داخل حدى الضبط س‾/ ± أ ع/ بالرغم من أن متوسط المجتمع الذى سحبت منه هذه العينة (ص) لا يساوى المتوسط المستخدم فى لوحة الضبط (س‾/) .

ولذلك فاننا نحسب قيمة الدالة β (ص) عند القيم المختلفة التى قد يأخذها المتغير ص حيث β (ص) تعرف بالمعادلة :

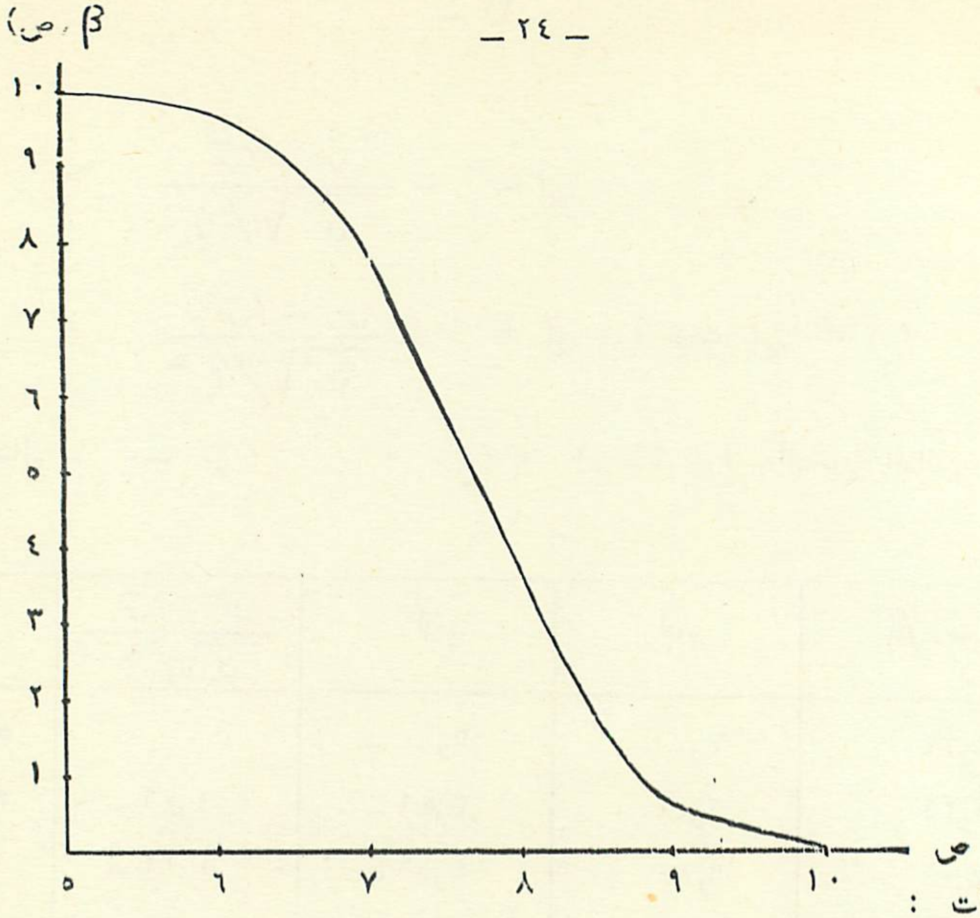
$$\beta(\text{ص}) = \int_{\text{ك}_1}^{\text{ك}_2} \frac{1}{\sqrt{2\text{ط}}} \, \text{هـ}^{-\frac{\text{ت}^2}{2}} \, \text{ك ت}$$

$$ك_1 = \frac{\bar{س} - ص}{ع / \sqrt{ن}} - أ_\alpha$$

$$ك_2 = \frac{\bar{س} - ص}{ع / \sqrt{ن}} + أ_\alpha \quad (\text{حيث } أ_\alpha = ٣)$$

وفى مثال ٢ حيث $\bar{س}$ = ٥ ، ع = ٢ يمكن حساب الجدول التالى :

ص	$\frac{\bar{س} - ص}{ع / \sqrt{ن}}$	ك١	ك٢	β (ص) ٪
٥ر٠	٠	—٣ر٠٠	٣ر٠٠	٩٩ر٧٤
٥ر٥	—٠ر٥٦	—٣ر٥٦	٢ر٤٤	٩٩ر٢٥
٦ر٠	—١ر١٢	—٤ر١٢	١ر٨٨	٩٧ر٠٠
٦ر٥	—١ر٦٨	—٤ر٦٨	١ر٣٢	٩٠ر٦٦
٧ر٠	—٢ر٢٤	—٥ر٢٤	٠ر٧٦	٧٧ر٦٤
٧ر٥	—٢ر٨٠	—٥ر٨٠	٠ر٢٠	٥٧ر٩٣
٨ر٠	—٣ر٣٦	—٦ر٣٦	—٠ر٣٦	٣٥ر٩٤
٨ر٥	—٣ر٩٢	—٦ر٩٢	—٠ر٩٢	١٧ر٨٨
٩ر٠	—٤ر٤٨	—٧ر٤٨	—١ر٤٨	٦ر٩٤
٩ر٥	—٥ر٠٤	—٨ر٠٤	—٢ر٠٤	٢ر٠٧
١٠ر٠	—٥ر٦٠	—٨ر٦٠	—٢ر٠٦	٠ر٤٧



ملاحظات :

١ ـ الطريقة التى ذكرت هنا لايجاد منحنى مميز الفاعلية للوحة ضبط الوسط الحسابى تفترض أن الانحراف المعيارى للمجتمعات التى تسحب منها العينات يظل ثابتا سواء كان الوسط الحسابى المفترض لهذه المجتمعات هو سَ̄ أو ص (أى أن الانحراف المعيارى يظل عَ فى ظل كل من الفرض العدمى والفرض البديل) أما اذا كانت عَ معرضة للتغير فان منحنى مميز الفاعلية يكون دالة فى المتغيرين ص ، عِ حيث عِ تمثل الانحراف المعيارى فى ظل الفرض البديل . ولذلك فان المنحنى يجب رسمه فى شكل ذى ثلاث أبعاد . ولن ندخل هنا فى تفاصيل هذه الحالة .

٢ ـ اذا كانت (سَ̄ ، عَ) غير معلومة وبالتالى استخدمنا التقديرات (س̿ ، ع̄) أو (س̿ ، ى̄) لرسم لوحة ضبط الوسط الحسابى فاننا سنستخدم نفس التقديرات عند ايجاد منحنى مميز الفاعلية .

٣ ـ من الممكن استخدام منحنى مميز الفاعلية لتحديد حجم العينة الذى يجعل احتمال الخطأ من النوع الثانى مساويا قيمة معلومة (حيث α = ٠٫٣ ٪) .

٢ ـ لوحة ضبط المـــــدى
(R Chart)

ان مراقبة وضبط الوسط الحسابى لمقياس الجودة لا تكفى للتحقق من أن العملية الانتاجية تـتم وفقا للصورة المرغوب فيها . ذلك لأن بعض العوامل السببية قد تؤثر على العملية الانتاجية عن طريق التأثير على تباين جودة الوحدات المنتجة (أى التأثير على ع/) دون أن تؤثر على متوسط مقيــاس الجودة . ولذلك فانه يجب تكوين لوحات لضبط " التشتت " .

ويتم ذلك عادة باستخدام لوحات ضبط المدى أو لوحات ضبط الانحراف المعيارى .

ونظرا لسهولة حساب المدى وبالتالى لكثرة استخدامه فى التطبيقات العملية كمقياس للتشتـت فاننا سنبدأ بدراسة لوحة ضبط المدى .

<u>أولا</u> : <u>اذا كانت ع/ معلومة</u> :

سبق أن ذكرنا أن المتغير العشوائى و = ى / ع/ يتبع توزيعا احتماليا تظهر القيم الخاصة به فى جداول منشورة (بافتراض أن المجتمع الأصلى يتبع التوزيع المعتاد) .كما ذكرنا أن القيمـة المتوقعة للمتغير ى هى ك٢ ع/ وأن الانحراف المعيارى له هو ك٣ ع/ .

وعلى ذلك فان خط الوسط فى لوحة ضبط المدى يجب أن يكون ك٢ ع/

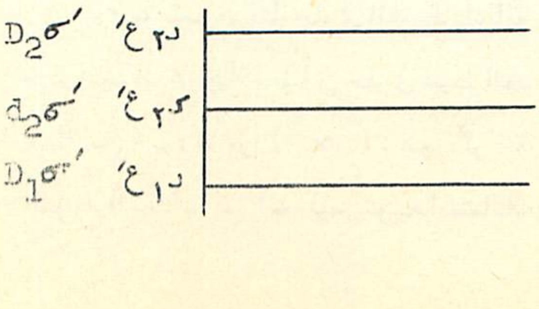
أما حدى الضبط (باستخدام ثلاث امثال الانحراف المعيارى) فهما :

د٢ ع/ ± ٣ ك٣ ع/ = ع/ (ك٢ ± ٣ ك٣)

وبوضع د١ = ك٢ ـ ٣ ك٣

د٢ = ك٢ + ٣ ك٣

فانه يمكن كتابة حدى الضبط فى الصورة :



الحد الأدنى = $د_{١} ع'$

الحد الأعلى = $د_{٢} ع'$

حيث تظهر قيم $د_{١}$ ، $د_{٢}$ (بدلالة ن) فى الجدول رقم (٢)

ثانيا : اذا كانت ع' غير معلومة :

طالما أننا نحاول رسم لوحة ضبط للمدى فاننا سنستخدم $\frac{\bar{ى}}{ك_{٢}}$ كتقدير غير متحيز للمعلمة ع'

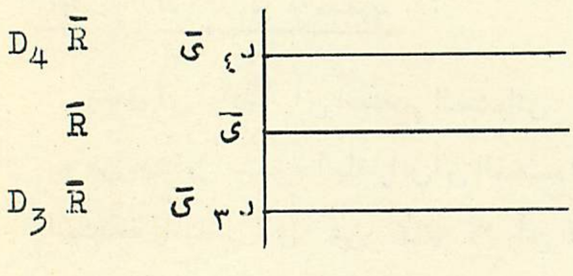
وبالتالى فان خط الوسط يصبح $\left(\frac{\bar{ى}}{ك_{٢}}\right) ك_{٢}$ أى $\bar{ى}$

ويكون حدى الضبط (باستخدام ثلاث أمثال الانحراف المعيارى) هما :

$$\bar{ى} \pm ٣ ك_{٣} \frac{\bar{ى}}{ك_{٢}} = \bar{ى} \left(١ \pm ٣ \frac{ك_{٣}}{ك_{٢}} \right)$$

وبوضع $د_{٣} = ١ - ٣ \frac{ك_{٣}}{ك_{٢}}$

$$د_{٤} = ١ + ٣ \frac{ك_{٣}}{ك_{٢}}$$



فانه يمكن كتابة حدى الضبط فى الصورة

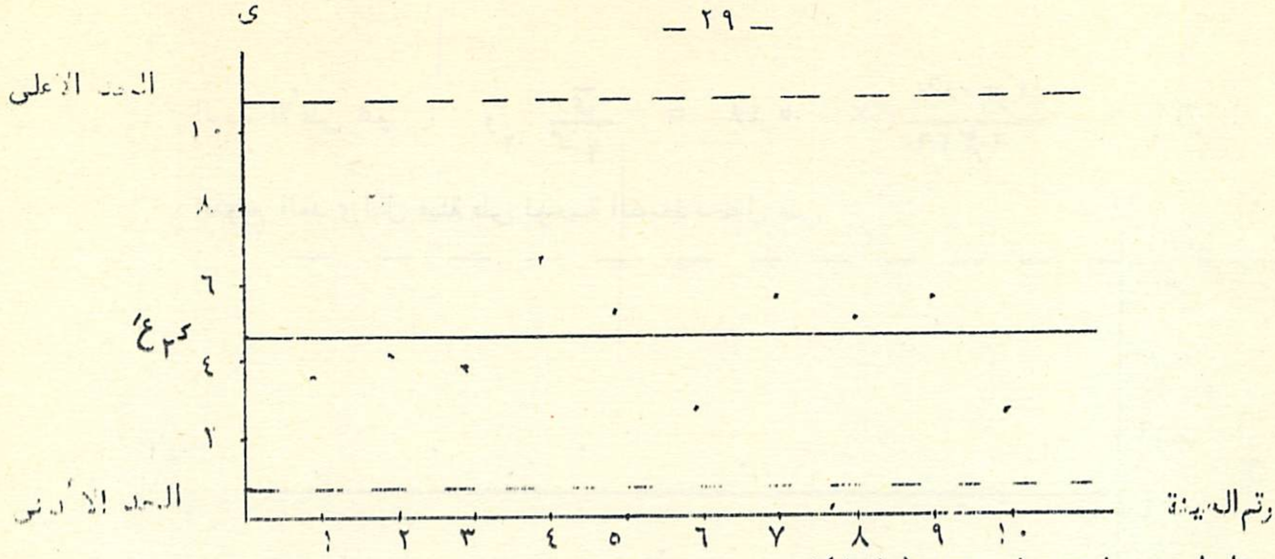
الحد الأدنى = $د_{٣} \bar{ى}$

الحد الأعلى = $د_{٤} \bar{ى}$

حيث تظهر قيم $د_{٣}$ ، $د_{٤}$ (بدلالة ن) فى الجدول رقم (٢)

ملاحظة :

فيما سبق عرفنا حدى الضبط باضافة وطرح ثلاث امثال الانحراف المعيارى من القيمة التى تعرف خط الوسط . ويلاحظ أن حدى ضبط المدى المعرفة بهذه الطريقة لا تدل على أن احتمال حدوث خطأ من النوع الأول (α) هو ٠ر٣٪ . ذلك لأن التوزيع الاحتمالى للمتغير ى لم يعد هو التوزيع المعتاد كما أنه ليس توزيعا متماثلا . فاذا أردنا ايجاد حدى الضبط اللذين يجعلان



ثانيا : باستخدام ى̄ (اذا كانت ع' مجهولة)

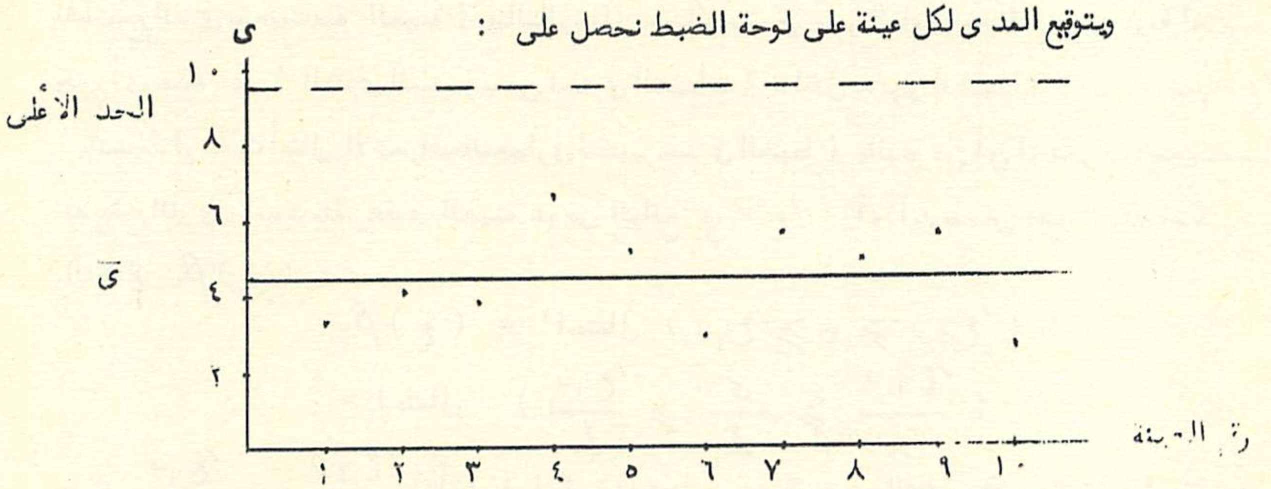
١ — باستخدام ثلاث أمثال الانحراف المعيارى .

خط الوسط هو : ى̄ = ٤ر٥٠٨٧

الحد الأدنى هو : د٣ ى̄ = صفر

الحد الأعلى هو : د٤ ى̄ = ٢ر١١٥ × ٤ر٥٠٨٧ = ٩ر٥٤

وبتوقيع المدى لكل عينة على لوحة الضبط نحصل على :



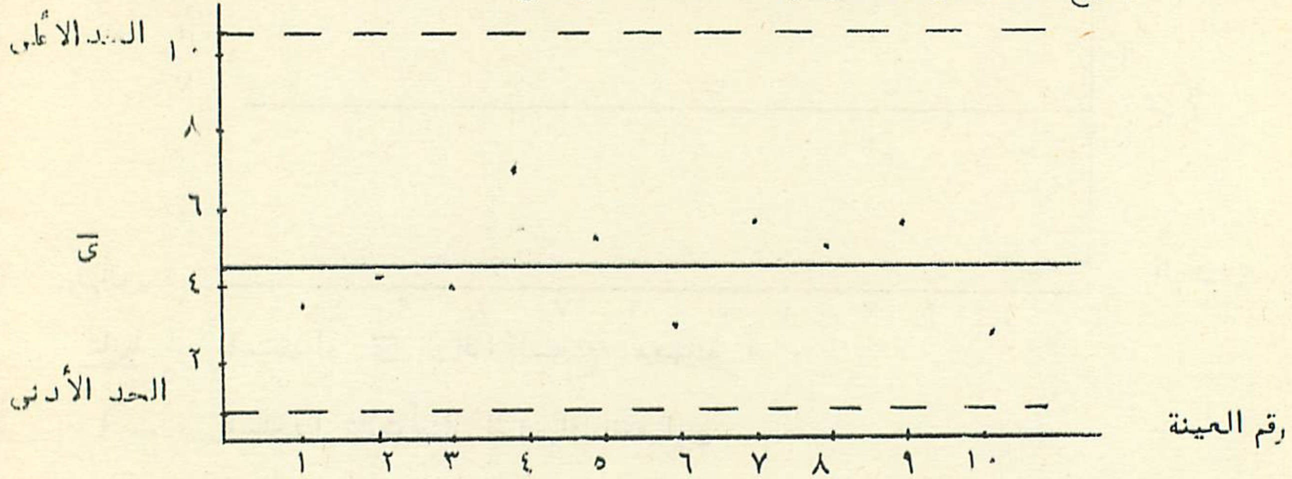
٢ — حدى الضبط اللذين يجعلان α = ٠ر٣ ٪

خط الوسط هو : ى̄ = ٤ر٥٠٨٧

الحد الأدنى هو : و١ ى̄ / د٢ = ٠ر٣٧ × ٤ر٥٠٨٧ / ٢ر٣٢٦ = ٠ر٧١

الحد الأعلى هو : $و_{٢} \frac{\bar{ى}}{ك_{٢}} = ٥٫٤٨ \times \frac{٤٫٠٨٧}{٢٫٣٢٦} = ١٠٫٦٢$

وبتوقيع المدى لكل عينة على لوحة الضبط نحصل على :



منحنى مميز الفاعلية للوحة ضبط المدى :

لايجاد منحنى مميز الفاعلية للوحة ضبط المدى نلاحظ أن هذه اللوحة تعتمد على أن الفرض العدمى هو : $\sigma = ع'$ بينما الفرض البديل هو : $\sigma = ع_{.}$ (حيث σ هى الانحراف المعيارى للمجتمع الذى سحبت منه العينة) وبالتالى فان حساب منحنى مميز الفاعلية معناه تقدير قيمة احتمال وقوع أى نقطة ى (المدى المحسوب من احدى العينات) داخل حدى الضبط $د_{١}ع'$ ، $د_{٢}ع'$ (باستخدام ثلاث أمثال الانحراف المعيارى لتقدير حدى الضبط) بالرغم من أن الانحراف المعيارى للمجتمع الذى سحبت منه هذه العينة هو فى الواقع $ع_{.} \neq ع'$. أى أن منحنى مميز الفاعلية يمكن تمثيله بالدالة $\beta(ع_{.})$:

$$\beta(ع_{.}) = \text{احتمال}\ (د_{١}ع' \leqslant ى \leqslant د_{٢}ع')$$

$$= \text{احتمال}\ \left(\frac{د_{١}ع'}{ع_{.}} \leqslant \frac{ى}{ع_{.}} \leqslant \frac{د_{٢}ع'}{ع_{.}}\right)$$

حيث $\frac{د_{١}ع'}{ع_{.}}$ ، $\frac{د_{٢}ع'}{ع_{.}}$ تأخذ قيما رقمية تعتمد على قيمة $ع_{.}$ وبالتالى فانه يمكن ايجاد قيمة الاحتمال المطلوب باستخدام جداول التوزيع الاحتمالى للمتغير و بمعلومة $ع_{.}$ ، ن

ملاحظات : ١ — اذا كانت $ع'$ مجهولة فاننا نستخدم $\frac{\bar{ى}}{ك_{٢}}$ بدلا منها

٢ — يمكن استخدام نفس الطريقة السابقة لايجاد منحنى مميز الفاعلية فى حالة تقدير حدى الضبط اللذين يعطيان قيمة معلومة للاحتمال α

٣ ـ لوحة ضبط الانحراف المعيـــــارى

(σ Chart)

لقد ذكرنا أن المدى يستخدم كقياس للتشتت نظرا لسهولته وكذلك كفائته فى حالة وجـــود عينات صغيرة . ولكن اذا كانت العينات كبيرة فان كفاءة المدى كتقدير للتشتت تقل وبالتالى فانـــه يفضل استخدام الانحراف المعيارى كمقياس للتشتت وسنبين الآن كيفية تكوين لوحة ضبط الانحراف المعيارى

أولا : اذا كانت $ع'$ معلومة :

من المعلوم أنه اذا كانت $س_1 \ldots س_ن$ متغيرات عشوائية مستقلة وكل منها يتبع توزيعا معتادا تباينه $ع'^2$ واذا كان الوسط الحسابى لهذه المتغيرات هو $\bar{س}$ وتباينها هو $ع^2 = \frac{\text{مج}(س - \bar{س})^2}{ن}$ فان :

$\frac{ن ع^2}{ع'^2}$ يتبع توزيع كا^2 بدرجات حرية $ن - 1$ وقد سبق أن ذكرنا أن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائى $ع$ هى $حـ_2 ع'$ وانحرافه المعيارى هو $ع' \sqrt{\frac{ن - 1}{ن} - حـ_2^2}$

$$\left(\text{حيث } حـ_2 = \sqrt{\frac{2}{ن}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{ن}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{ن - 1}{2}\right)} \right)$$

وعلى ذلك فان خط الوسط فى لوحة ضبط الانحراف المعيارى هو $حـ_2 ع'$ كما أن حدى الضبط (باستخدام ثلاث أمثال الانحراف المعيارى) هما :

$$حـ_2 ع' \pm 3 ع' \sqrt{\frac{ن - 1}{ن} - حـ_2^2}$$

$$= ع' \left(حـ_2 \pm 3 \sqrt{\frac{ن - 1}{ن} - حـ_2^2} \right)$$

$$\text{وبوضع}\quad \text{ب}_{١} = \text{ح}_{٢} - ٣\sqrt{\frac{\text{ن}-١}{\text{ن}} - \text{ح}_{٢}^{٢}}$$

$$\text{ب}_{٢} = \text{ح}_{٢} + ٣\sqrt{\frac{\text{ن}-١}{\text{ن}} - \text{ح}_{٢}^{٢}}$$

فانه يمكن كتابة حد ى الضبط فى الصورة :

الحد الا دنى = $\text{ب}_{١}\ \text{ع}'$

الحد الأعلى = $\text{ب}_{٢}\ \text{ع}'$

$\text{ب}_{٢}\ \text{ع}'$ ———— $B_2\sigma'$

$\text{ح}_{٢}\ \text{ع}'$ ———— $C_2\sigma'$

$\text{ب}_{١}\ \text{ع}'$ ———— $B_1\sigma'$

حيث تظهر قيم $\text{ب}_{١}$ ، $\text{ب}_{٢}$ (بدلالة ن) فى الجدول رقم (١) .

ثانيا : اذا كانت $\text{ع}'$ مجهولة :

فى هذه الحالة نستخدم $\frac{\bar{\text{ع}}}{\text{ح}_{٢}}$ كتقدير للمعلمه $\text{ع}'$. فيكون خط الوسط هو

$\left(\frac{\bar{\text{ع}}}{\text{ح}_{٢}}\right)\text{ح}_{٢}$ أى $\bar{\text{ع}}$.

أما حد ى الضبط (باستخدام ثلاث أمثال الانحراف المعيارى) فهما :

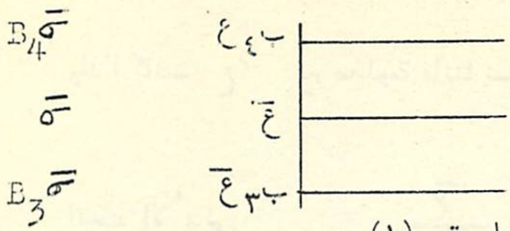
$$\bar{\text{ع}} \pm ٣\,\frac{\bar{\text{ع}}}{\text{ح}_{٢}}\sqrt{\frac{\text{ن}-١}{\text{ن}} - \text{ح}_{٢}^{٢}}$$

$$= \bar{\text{ع}}\left(١ \pm \frac{٣}{\text{ح}_{٢}}\sqrt{\frac{\text{ن}-١}{\text{ن}} - \text{ح}_{٢}^{٢}}\right)$$

$$\text{وبوضع}\quad \text{ب}_{٣} = ١ - \frac{٣}{\text{ح}_{٢}}\sqrt{\frac{\text{ن}-١}{\text{ن}} - \text{ح}_{٢}^{٢}}$$

$$\text{ب}_{٤} = ١ + \frac{٣}{\text{ح}_{٢}}\sqrt{\frac{\text{ن}-١}{\text{ن}} - \text{ح}_{٢}^{٢}}$$

فانه يمكن كتابة حد ى الضبط فى الصورة :



الحد الأدنى = ب٣ ع̄

الحد الأعلى = ب٤ ع̄

حيث تظهر قيم ب٣ ، ب٤ (بدلالة ن) فى الجدول رقم (١) .

<u>ملاحظـــة</u> :

ان التعريف السابق لحدى الضبط يعتمد على استخدام ثلاث أمثال الانحراف المعيـــــارى ونظرا لأن المتغير $\frac{\text{ن ع}^2}{\text{ع}/^2}$ يتبع توزيع كا٢ وهو توزيع غير متماثل فان حدود الضبط المعرفـــة بالطريقة السابقة لا تدل على أن احتمال حدود النوع الأول من الخطأ هو ٣ر٠٪ .

أما حدى الضبط اللذين يجعلان قيمة α هى ٣ر٠٪ فيمكن معرفتها باستخدام جداول كا$^2_{\text{ن}-1}$ كما يلى :

نوجد قيمة كا$^2_{(1)}$ ، كا$^2_{(2)}$ اللتين تحققان العلاقة :

$$\text{احتمال} \left(\frac{\text{ن ع}^2}{\text{ع}/^2} \leqslant \text{كا}^2_{(1)} \right) = \text{احتمال} \left(\frac{\text{ن ع}^2}{\text{ع}/^2} \geqslant \text{كا}^2_{(2)} \right) = \text{١٥ر٠٪}$$

وبالحصول على قيم كا$^2_{(1)}$ ، كا$^2_{(2)}$ من جداول كا$^2_{\text{ن}-1}$ فانه يكون لدينا :

$$\text{احتمال} \left(\frac{\text{كا}^2_{(2)}\,\text{ع}/^2}{\text{ن}} \geqslant \text{ع}^2 \geqslant \frac{\text{كا}^2_{(1)}\,\text{ع}/^2}{\text{ن}} \right) = \text{٧ر٩٩٪}$$

أى أن حدى الضبط هما :

الحد الأدنى : $\text{ع}/ \sqrt{\frac{\text{كا}^2_{(1)}}{\text{ن}}}$

الحد الأعلى : $\text{ع}/ \sqrt{\frac{\text{كا}^2_{(2)}}{\text{ن}}}$

واذا كانت $ع'$ غير معلومة فاننا نستخدم $\frac{\bar{ع}}{حـ_٢}$ ويصبح حدى الضبط هما :

الحد الأدنى $= \frac{\bar{ع}}{حـ_٢} \sqrt{\frac{كا^٢_{(١)}}{ن}}$

الحد الأعلى $= \frac{\bar{ع}}{حـ_٢} \sqrt{\frac{كا^٢_{(٢)}}{ن}}$

مثال : باستخدام بيانات المثال ٢ ، ارسم لوحة ضبط الانحراف المعيارى

١ — باستخدام ثلاث أمثال الانحراف المعيارى

٢ — بشرط أن يكون احتمال الخطأ من النوع الأول هو ٣ر٠٪

الحل :

أولا : اذا كانت $ع' = ٢$:

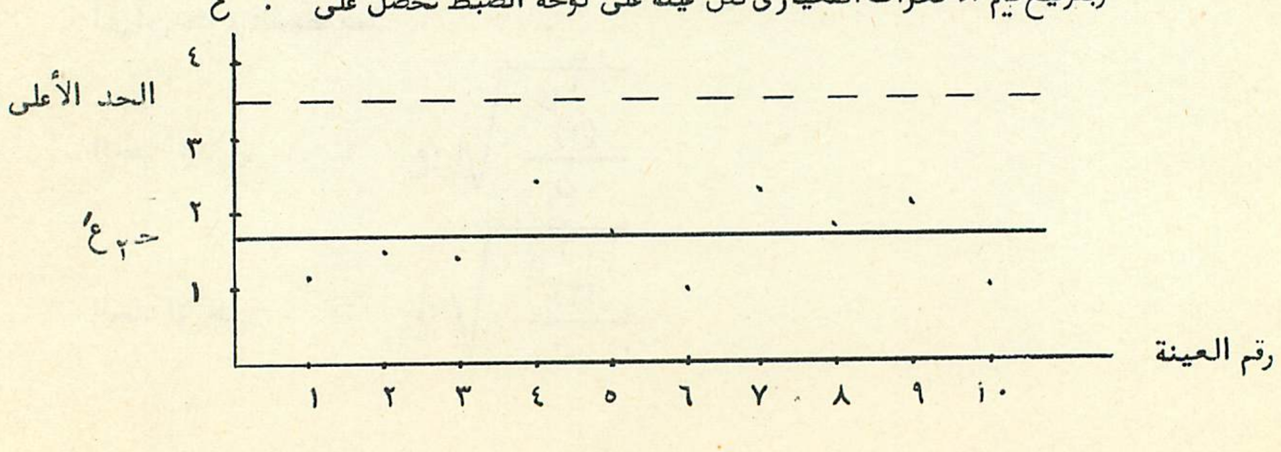
١ — باستخدام ثلاث أمثال الانحراف المعيارى :

خط الوسط هو $حـ_٢ ع' = ١٦٨١٤ر١$

الحد الأدنى هو $ب_١ ع' =$ صفر

الحد الأعلى هو $ب_٢ ع' = ٣٥١٢ر٣$

وبتوقيع قيم الانحراف المعيارى لكل عينة على لوحة الضبط نحصل على :



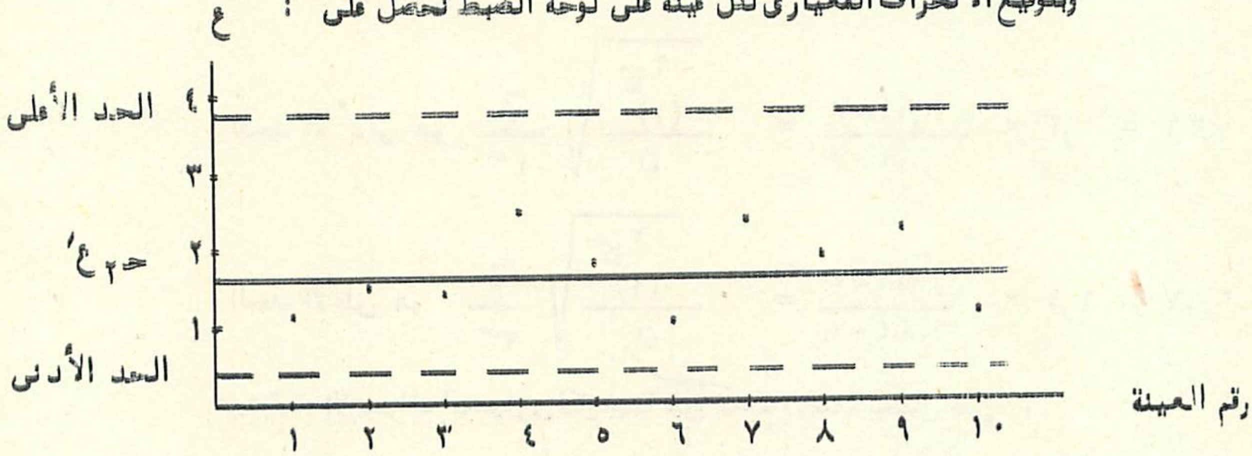
٢ — حدى الضبط اللذين يجعلان α = ٣ر ٪

خط الوسط هو $ح_{٢}\ ع'$ = ١٦٨١٤ر١

الحد الأدنى هو $ع' \sqrt{\frac{كا^{٢}_{(١)}}{ن}}$ = ٢ × ٢ر = ٤ر

الحد الأعلى هو $ع' \sqrt{\frac{كا^{٢}_{(٢)}}{ن}}$ = ٢ × ٩ر٤ = ٨ر٣

وبتوقيع الانحراف المعيارى لكل عينة على لوحة الضبط نحصل على :



ثانيا : باستخدام $\bar{ع}$ (اذا كانت ع' مجهولة)

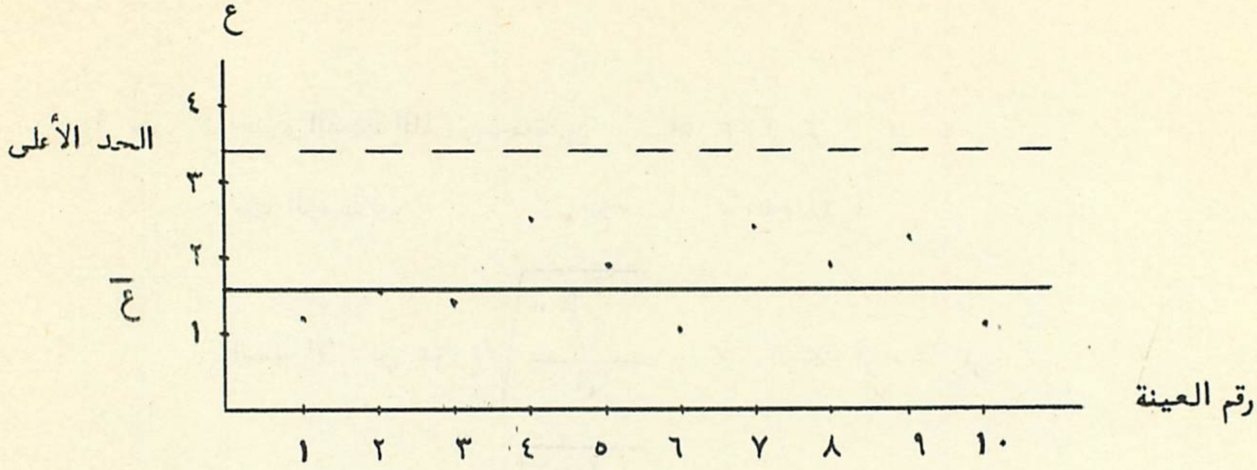
١ — باستخدام ثلاث أمثال الانحراف المعيارى

خط الوسط هو $\bar{ع}$ = ٦١٨٧ر١

الحد الأدنى هو $ب_{٣}\ \bar{ع}$ = صفر

الحد الأعلى هو $ب_{٤}\ \bar{ع}$ = ٠٨٩ر٢ × ٦١٨٧ر١ = ٣٨ر٣

وبتوقيع الانحراف المعيارى لكل عينة على لوحة الضبط نحصل على :



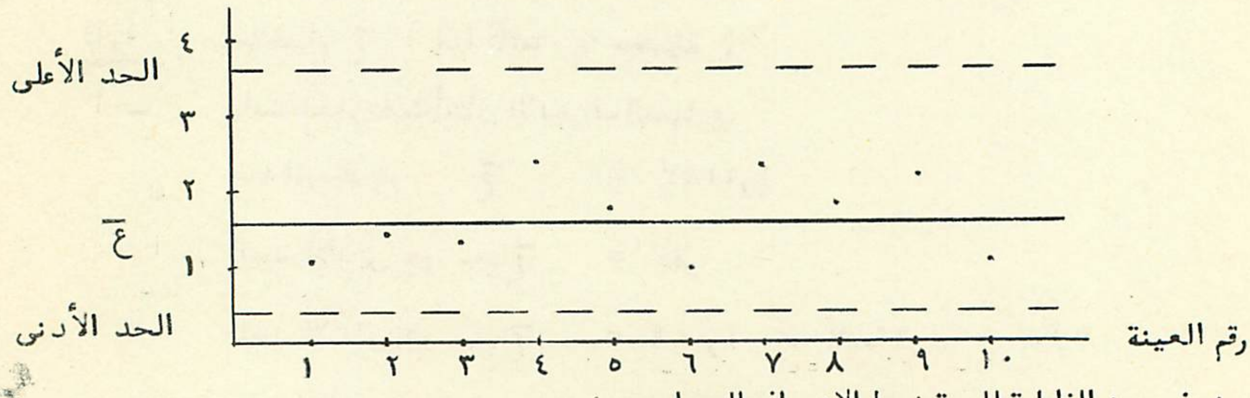
٢ ـ حدى الضبط اللذين يجعلان α = ٣ر٠٪

خط الوسط هو ع̄ = ١ر٦١٨٧

الحد الأدنى هو $\frac{\bar{ع}}{ح_2}\sqrt{\frac{كا^2_{(1)}}{ن}} = \frac{١ر٦١٨٧}{٠ر٨٤٠٧} \times ٢ر = ٣٩ر٠$

الحد الأعلى هو $\frac{\bar{ع}}{ح_2}\sqrt{\frac{كا^2_{(2)}}{ن}} = \frac{١ر٦١٨٧}{٠ر٨٤٠٧} \times ٩ر١ = ٦٧ر٣$

وبتوقيع الانحراف المعيارى لكل عينة على لوحة الضبط نحصل على :



<u>منحنى مميز الفاعلية للوحة ضبط الانحراف المعيارى :</u>

ان لوحة ضبط الانحراف المعيارى تعتمد على أن الفرض العدمى هو : σ = ع́ بينمـــا أن

الفرض البديل هو σ = ع. وبالتالى فان حساب منحنى مميز الفاعلية هو تقدير لقيمة احتمال وقوع أى نقطة ع (الانحراف المعيارى المحسوب من احدى العينات) داخل حدى الضبط ب١ ع/ ، ب٢ ع/ (باستخدام ثلاث امثال الانحراف المعيارى) بالرغم من أن الانحراف المعيارى للمجتمع الذى سحبت منه العينة هو فى الواقع ع. ≠ ع/ .

أى أن منحنى مميز الفاعلية يمكن تمثيله بالدالة β (ع.) :

$$\beta \text{ (ع.) = احتمال (ب١ ع/ } \leqslant \text{ ع } \leqslant \text{ ب٢ ع/) .}$$

$$= \text{ احتمال } \left(\frac{\text{ن ب}_1^2 \text{ ع/}^2}{\text{ع.}^2} \leqslant \frac{\text{ن ع}^2}{\text{ع.}^2} \leqslant \frac{\text{ن ب}_2^2 \text{ ع/}^2}{\text{ع.}^2} \right)$$

وبمعرفة ع. ، ن يمكن حساب كل من $\frac{\text{ن ب}_1^2 \text{ ع/}^2}{\text{ع.}^2}$ ، $\frac{\text{ن ب}_2^2 \text{ ع/}^2}{\text{ع.}^2}$

ونظرا لأن $\frac{\text{ن ع}^2}{\text{ع.}^2}$ يتبع توزيع $\text{كا}^2_{\text{ن} - 1}$ فانه يمكن استخدام جداول هذا التوزيع لايجاد الاحتمال المطلوب .

ملاحظات :

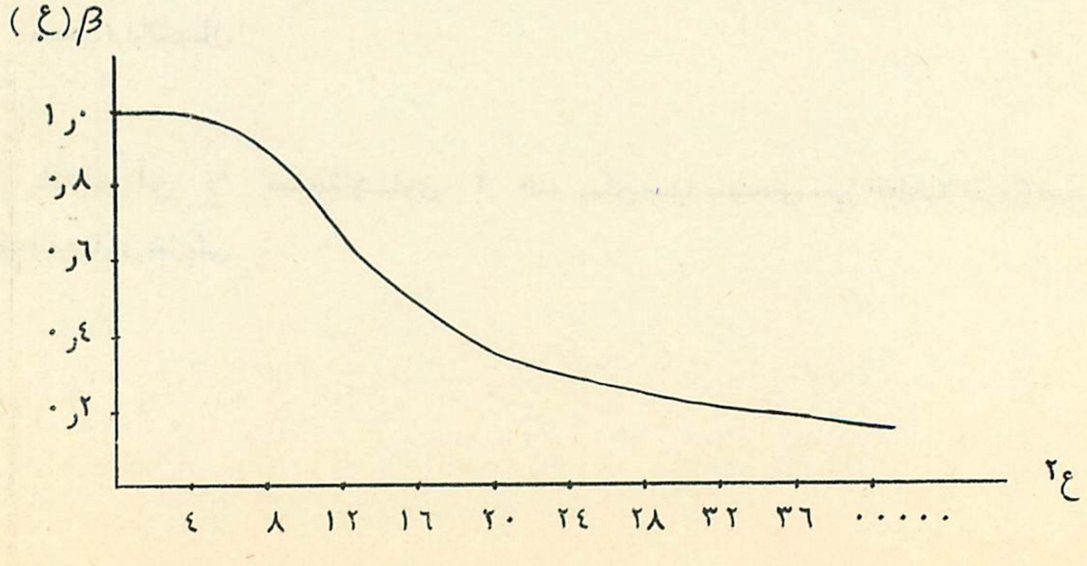
١ ـ اذا كانت ع/ مجهولة فاننا نستخدم $\frac{\bar{\text{ع}}}{\text{حـ}_2}$

٢ ـ يمكن استخدام نفس الطريقة لايجاد منحنى مميز الفاعلية اذا كان حدى الضبط يعطيا قيمة محددة للاحتمال

مثال :

بافتراض أن ع/ معلومة وتساوى ٢ فانه يمكن حساب منحنى مميز الفاعلية للوحة ضبط الانحراف المعيارى كما يلى :

$ع^2$	$\frac{ن\,ع_0^2}{ع^2}$	$ب_1^2\,ن\,\frac{ع_0^2}{ع^2}$	$ب_2^2\,ن\,\frac{ع_0^2}{ع^2}$	β ($ع_0$) %
٤	٥	صفر	١٥٫٤٠	٩٩٫٧
٦	$\frac{٢٠}{٦}$	صفر	١٠٫٢٧	٩٦٫٥
٨	$\frac{٢٠}{٨}$	٠	٧٫٧٠	٩٠٫٠
١٠	٢	٠	٦٫١٦	٨٠٫٠
١٢	$\frac{٢٠}{١٢}$	٠	٥٫١٣	٦٨٫٠
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
٢٥	$\frac{٢٠}{٢٥}$		٢٫٤٧	٢٩٫٠
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
٣٦	$\frac{٢٠}{٣٦}$		١٫٧١	٢٠٫٠
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮



٤ ـ لوحة ضبط نسبة الوحدات المعيبة

(P Chart)

لقد كانت جميع لوحات الضبط السابق شرحها معتمدة على وجود مقياس كمى لجودة الوحدة المنتجة ٠ وبالتالى فقد كان من الممكن ايجاد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى (أو المدى) له ٠ ولكن فى كثير من الأحيان تتحدد جودة الوحدة المنتجة كيفيا ـ بمعنى أن الوحدة المنتجة اما أن تكون مطابقة للمواصفات أو غير مطابقة للمواصفات (أى معيبة) ٠ وفى أحيان أخرى نجد أنه قد يكون هناك أكثر من مقياس كمى لجودة الوحدة المنتجة ٠ وبالتالى فان استخدام لوحات ضبط الوسط الحسابى والانحراف المعيارى (أو المدى) تكون مرتفعة النفقات لأننا سنحتاج الى لوحات منفصلة لكل من المقاييس ٠

ولذلك فاننا سندرس هنا طريقة تكوين لوحات ضبط نسبة الوحدات المعيبة التى تعتمد فقط على امكانية تصنيف الوحدات المنتجة الى وحدات صالحة وأخرى معيبة ٠

فاذا رمزنا الى نسبة الوحدات المعيبة فى الانتاج الكلى بالرمز ح فان عدد الوحدات المعيبة فى عينة حجمها ن يكون له توزيع ذو حدين (بافتراض أن المجتمع لا نهائى)* ٠
ويكون احتمال الحصول على وحدات معيبة عددها ر أو أكثر من عينة حجمها ن هو :

$$\sum_{\text{ر}=\text{ر}.}^{\text{ن}} \binom{\text{ن}}{\text{ر}} \text{ح}^{\text{ر}} (1-\text{ح})^{\text{ن}-\text{ر}}$$

وعلى ذلك يمكن ايجاد حدى الضبط باستخدام جداول التوزيع ثنائى الحدين ٠
أما اذا كانت ن كبيرة فان التوزيع ثنائى الحدين يؤول الى التوزيع المعتاد وبالتالى فان نسبة

---

* اذا كان المجتمع محدود فان عدد الوحدات المعيبة يكون له توزيع هايبر جومترى ٠

الوحدات المعيبة بالعينة تكون متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع المعتاد وتكون قيمته المتوقعة هى ح بينما خطأه المعيارى هو $\sqrt{\frac{ح\,(1 - ح)}{ن}}$

وعلى ذلك فان حدى الضبط هما :

$$ح \pm 3 \sqrt{\frac{ح\,(1 - ح)}{ن}}$$

وتكون دالة منحنى مميز الفاعلية هى :

$$\beta\,(ح_{.}) = \int_{ل_1}^{ل_2} \frac{1}{\sqrt{2\,ط}}\, هـ^{-\frac{ت^2}{2}}\, ء\,ت$$

حيث

$$ل_1 = \frac{\text{الحد الادنى للضبط} - ح_{.}}{\sqrt{\frac{ح_{.}\,(1 - ح_{.})}{ن}}}$$

$$ل_2 = \frac{\text{الحد الأعلى للضبط} - ح_{.}}{\sqrt{\frac{ح_{.}\,(1 - ح_{.})}{ن}}}$$

أما اذا كانت ح غير معلومة فان $\bar{ح}$ (= $\frac{\text{عدد الوحدات المعيبة فى جميع العينات}}{\text{الحجم الكلى للعينات}}$)

تكون تقدير غير متحيز للمعلمة ح . وبالتالى فان خط الوسط للوحة الضبط يكون $\overline{ح}$ بينما حدى

الضبط يكونا $\overline{ح} \pm ٣ \sqrt{\frac{\overline{ح}\,(١ - \overline{ح})}{ن}}$

ملاحظـــة :

من الممكن أيضا تكوين لوحة ضبط لعدد الوحدات المعيبة يكون خط الوسط بهـــا هـــــو

ن ح (أو ن $\overline{ح}$) ويكون حدى الضبط لها هما : ن ح $\pm$ ٣ $\sqrt{ن\,ح\,(١ - ح)}$

(أو ن $\overline{ح}$ $\pm$ ٣ $\sqrt{ن\,\overline{ح}\,(١ - \overline{ح})}$)

مثـال :

استخدم البيانات التالية (من ٢٨ عينة) فى اعداد لوحة ضبط نسبة الوحدات المعيبة علمـــا بأن حجم كل عينة هو ٢٠٠ وحدة . ثم أوجد منحنى مميز الفاعلية لهذه اللوحة .

رقم العينة	عدد الوحدات المعيبة	رقم ...	عدد ...	رقم ...	عدد ...	رقم ...	عدد ...
١	٤	٨	٣	١٥	٤	٢٢	٦
٢	١	٩	١	١٦	٤	٢٣	٦
٣	١٥	١٠	٧	١٧	١٤	٢٤	٦
٤	٤	١١	٤	١٨	٦	٢٥	٨
٥	٠	١٢	٢	١٩	٠	٢٦	٣
٦	٤	١٣	٨	٢٠	٠	٢٧	١
٧	١	١٤	١	٢١	٥	٢٨	٠

الحـل :

اجمالى عدد الوحدات المعيبة = ١١٣

$\therefore \overline{ح} = \frac{١١٣}{٢٨ \times ٢٠٠} = ٠٫٠٢٠١٧٩$

∴ حدى الضبط هما : ٠٫٢٠١٧٩ $\pm$ $\frac{٣}{١٠}$ $\sqrt{٠٫٠٠٩٨٨٥٩}$

= ٠٫٢٠١٧٩ $\pm$ ٠٫٢٩٩٧٩

∴ الحد الأدنى = صفر

الحد الأعلى = ٠٫٥٠١٥

(الحد الأدنى اعتبر مساويا للصفر لأن قيمته العددية سالبة بينما نسبة المعيب لا يمكن أن تأخذ قيما سالبة) .

وبتوقيع نسب المعيب فى كل عينة على لوحة الضبط نجد أن نسب المعيب فى العينتين رقم ٣ ، ١٧ تقع خارج حدى الضبط ولذلك يجب استبعادهما واعادة حساب القيم التى تكون اللوحة . فنحصل على :

$\overline{ح}$ = $\frac{٨٤}{٢٦ \times ٢٠٠}$ = ٠٫٠١٦١٥٤

∴ حدى الضبط هما : ٠٫٠١٦١٥٤ $\pm$ $\frac{٣}{١٠}$ $\sqrt{٠٫٠٠٧٩٤٦}$

= ٠٫٠١٦١٥٤ $\pm$ ٠٫٠٢٥٧٤٢

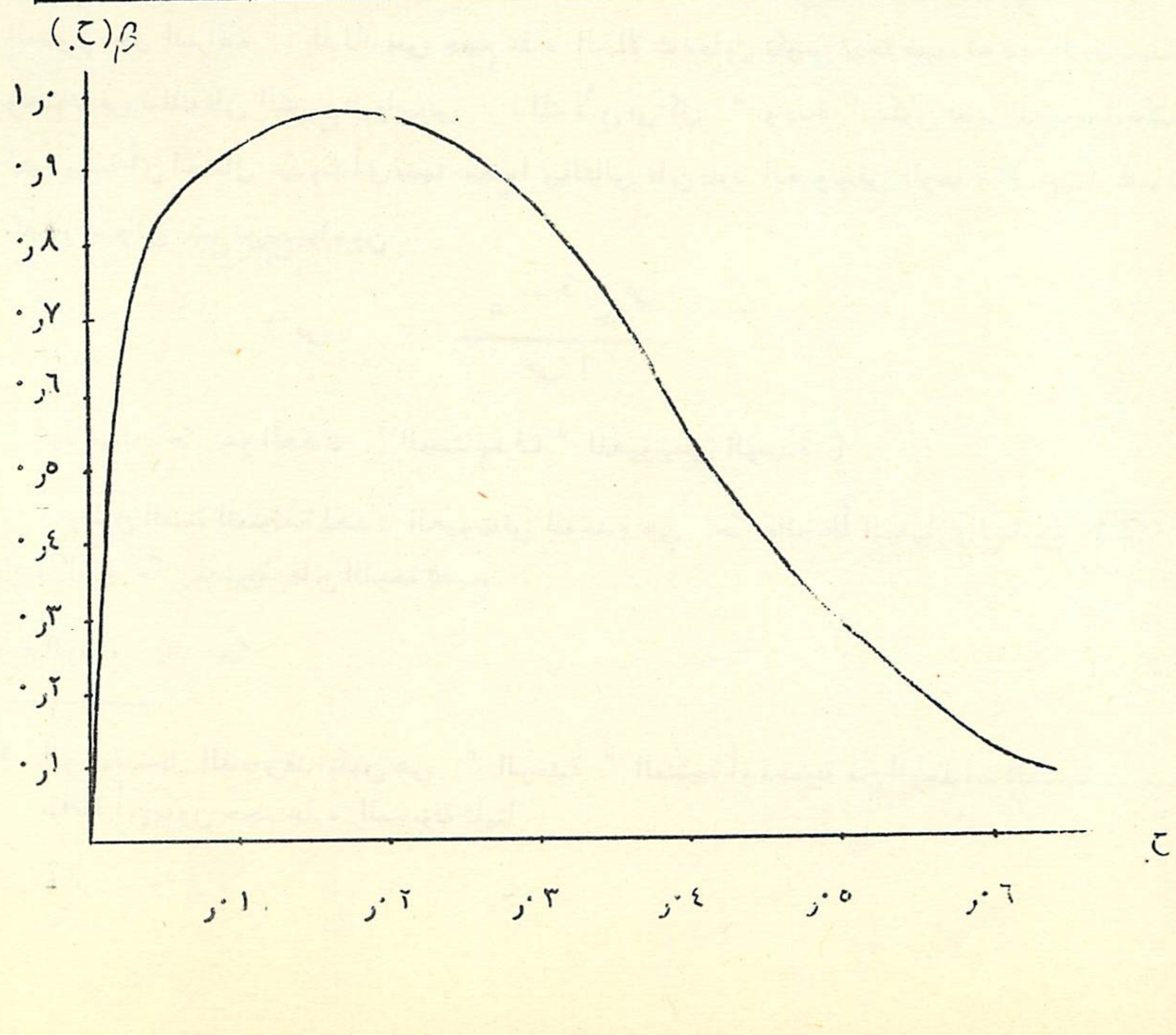
∴ الحد الأدنى = صفر

الحد الأعلى = ٠٫٠٤٢٢٨٤

وفى هذه الحالة نجد أن نسب المعيب فى جميع العينات تقع داخل حدى الضبط أى أن اللوحة الأخيرة تبين عملية انتاجية تحت الضبط الاحصائى .

ولرسم منحنى مميز الفاعلية نكون الجدول التالى ومنه يمكن رسم المنحنى :

ج.	$\sqrt{\frac{ج.(١-ج.)}{ن}}$	ل١	ل٢	β(ج.)
٠ر٠٥	٠ر٠٠٥	-١ر٠٠	٧ر٤٠	٠ر٨٤
٠ر١٠	٠ر٠٠٧	-١ر٤٣	٤ر٥٧	٠ر٩٢
٠ر٢٠	٠ر٠١٠	-٢ر٠٠	٢ر٢٠	٠ر٩٧
٠ر٣٠	٠ر٠١٢	-٢ر٥٠	١ر٠٠	٠ر٨٤
٠ر٤٠	٠ر٠١٤	-٢ر٨٩	٠ر١٤	٠ر٥٥
٠ر٥٠	٠ر٠١٥	-٣ر٣٣	-٠ر٥٣	٠ر٣٠
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.



٥ - لوحة ضبط عدد العيوب

(C Chart)

فى بعض العمليات الانتاجية يكون عدد العيوب فى " الوحدة محل الفحص* " هو المتغير الذى نريد مراقبته . مثال ذلك عدد الاخطاء المطبعية فى الصفحة أو عدد العيوب فى قطعة القماش المنتجة (ذات المساحة الثابتة) أو عدد العيوب فى السيارة عند نهاية عملية التجميع .

ويجب مراعاة التفرقة بين " عدد العيوب " و " عدد الوحدات المعيبة " .

فالوحدة المنتجة قد تكون صالحة أو معيبة فاذا كانت معيبة فمعنى ذلك أن بها " عيب واحد " أو أكثر . وفى الأمثلة السابقة يكون عدد العيوب فى الوحدة - وليس نسبة المعيب فى العينة - هو المتغير محل المراقبة . ولذلك ففى جميع هذه الحالات نحاول تكوين لوحة ضبط لعدد العيوب ونعتمد فى ذلك على التوزيع البواسونى . ذلك لأن فى كل " وحدة " يكون عدد العيوب الممكنة كبيرا بينما أن احتمال حدوث أى منها صغيرا وبالتالى فان عدد العيوب فى الوحدة (ص) هو متغير عشوائى يتبع توزيع بواسون :

$$ح \left(ص \right) = \frac{هـ^{-حَ} \, حَ^{ص}}{ص \, !}$$

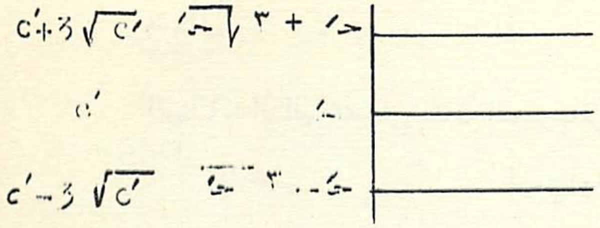
(حيث حَ هو العدد " المستهدف " للعيوب فى الوحدة)

وتكون القيمة المتوقعة لعدد العيوب فى الوحدة هى حَ والخطأ المعيارى لها هو $\sqrt{حَ}$ واذا كانت حَ معلومة فان اللوحة تصبح :

خط الوسط = حَ

---

* الوحدة محل الفحص قد تكون هى " الوحدة " المنتجة أو مجموعة من الوحدات المنتجة - مع مراعاة أن يكون حجم هذه المجموعة ثابتا .

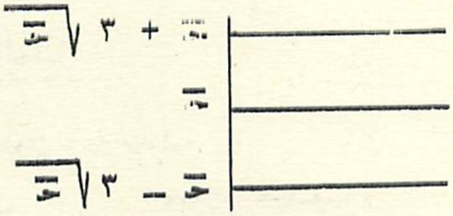


حدى الضبط = حَ ± ٣ $\sqrt{\text{حَ}}$

(الحد الأدنى للضبط يعتبر مساويا للصفر
اذا كانت قيمته العددية سالبة)

أما اذا كانت حَ غير معلومة فاننا نستخدم متوسط عدد العيوب كتقدير للمعلمه حَ أى نستخدم $\bar{\text{ح}}$ = $\frac{\text{مح ص}}{\text{م}}$ حيث م هى عدد الوحدات التى تم فحصها .

وتكون لوحة الضبط هى :



خط الوسط = $\bar{\text{ح}}$

حدى الضبط = $\bar{\text{ح}}$ ± ٣ $\sqrt{\bar{\text{ح}}}$

ونظرا لأن توزيع بواسون غير متماثل فان حدود الضبط السابق تعريفها والتى تستخدم ثلاث أمثال الانحراف المعيارى لا تحقق القيمة α = ٣ر٪ ٠ ولكن يمكن ايجاد حدود الضبط التى تحقق قيمة معينة لمستوى المعنوية α وذلك باستخدام جداول التوزيع البواسونى .

وكذلك فانه يمكن حساب منحنى مميز الفاعلية للوحة ضبط عدد العيوب باستخدام جداول التوزيع البواسونى :

$$\beta(\text{ح.}) = \sum_{\text{ص} = \text{ل}_1}^{\text{ل}_2} \frac{\text{هـ}^{-\text{ح.}}\ \text{ح.}^{\text{ص}}}{\text{ص}!}$$

حيث ح. هى عدد العيوب فى ظل الفرض البديل

ل١ = $\bar{\text{ح}}$ − ٣ $\sqrt{\bar{\text{ح}}}$ (الحد الأدنى للضبط)

ل٢ = $\bar{\text{ح}}$ + ٣ $\sqrt{\bar{\text{ح}}}$ (الحد الأعلى للضبط)

مثـــال :

البيانات التالية تعطى عدد العيوب فى انتاج الاسلاك المغطاه بالمطاط وذلك لكل عينة طولهـــــا ١٠٠٠ قدم . ارسم لوحة ضبط عدد العيوب وكذلك منحنى مميز الفاعلية لها :

١ _ ١ _ ٣ _ ٧ _ ٨ _ ١ _ ٢ _ ٦ _ ٣ _ ١

١٠ _ ٥ _ ٠ _ ١٩ _ ١٦ _ ٢٠ _ ١ _ ٦ _ ١٠ _ ٤

٥ _ ١ _ ٨ _ ٧ _ ٩ _ ٢ _ ٣ _ ١٤ _ ٦ _ ٨

الحـــل :

نكون لوحة مبدئية :

$$\bar{\text{ح}} = \frac{\text{مجموع العيوب}}{\text{عدد العينات}} = \frac{١٨٧}{٣٠} = ٦ر٢٣$$

$\therefore$ الحد الأدنى $= \bar{\text{ح}} - ٣\sqrt{\bar{\text{ح}}} =$ صفر

الحد الأعلى $= \bar{\text{ح}} + ٣\sqrt{\bar{\text{ح}}} = ١٣ر٧٣$

ولكن عدد العيوب بالعينات رقم ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ٢٨ أكبر من الحد الأعلى للضبط ولذلك نستبعد هذه القيم ونعيد حساب لوحة الضبط فنحصل على :

$$\bar{\text{ح}} = \frac{١١٨}{٢٦} = ٤ر٥٣$$

الحد الأدنى $= \bar{\text{ح}} - ٣\sqrt{\bar{\text{ح}}} =$ صفر

الحد الأعلى $= \bar{\text{ح}} + ٣\sqrt{\bar{\text{ح}}} = ١٠ر٨٩$

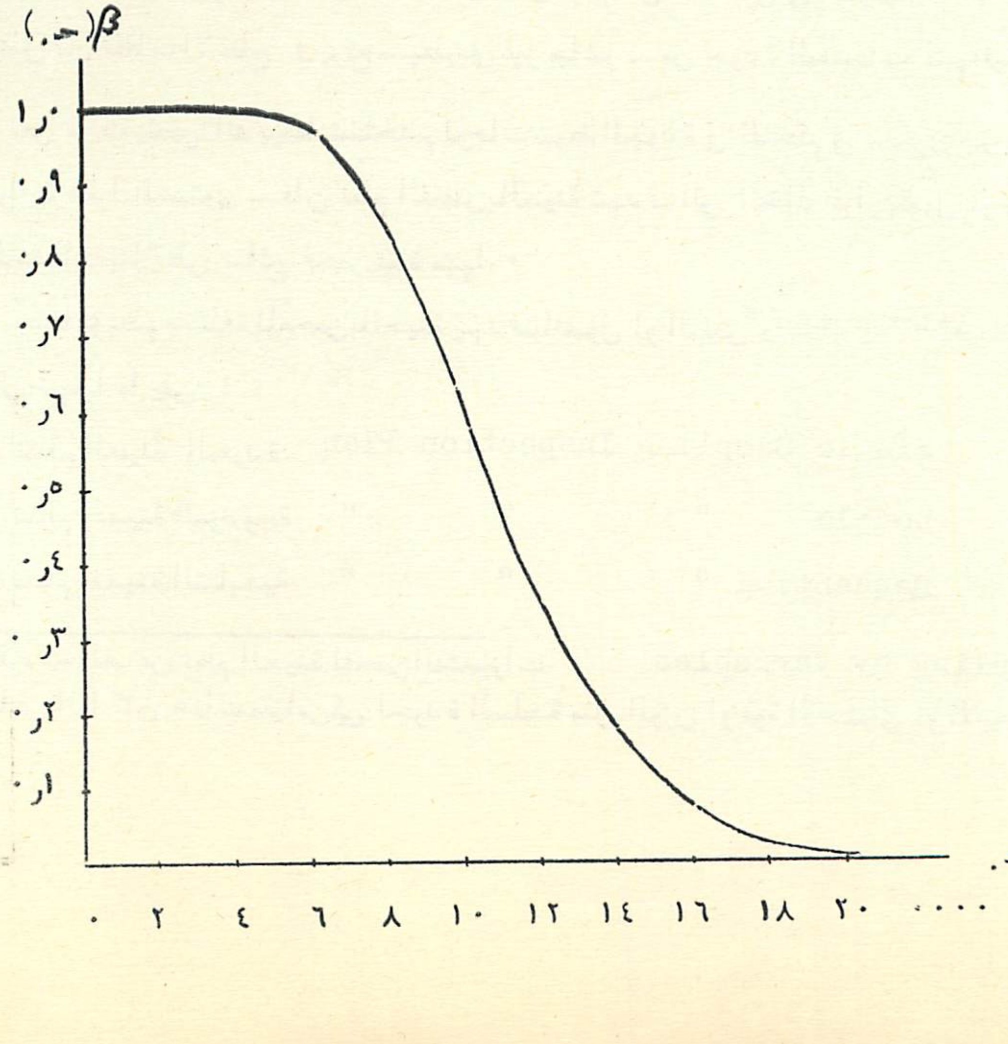
وعلى ذلك فان جميع النقط تقع داخل حدود الضبط .

ولايجاد منحنى مميز الفاعلية نستخدم جداول توزيع بواسون لحساب قيمة β(ح) لكل قيمة من قيم ح .

(سنفرض أن الحد الأعلى هو ١٠ عند استخدام الجداول) .

ح.	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
β(ح.)٪	١ر٠	١ر٠	١ر٠	١ر٠	٩٩ر٧	٩٨ر٦	٩٥ر٧	٩٠ر١	٨١ر٦	٧٠ر٦

ح.	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨
β(ح.) ٪	٥٨ر٣	٤٦ر٠	٣٤ر٧	٢٥ر٢	١٧ر٦	١١ر٨	٧ر٧	٤ر٩	٣ر٠



ثانيا : نظم الفحص بالعينــــة

Sampling Inspection Plans.

عند شراء (او بيع) كمية من احدى المنتجات يحاول المشترى (او المنتج) التأكد مـــن مطابقة الوحدات المشتراة (او المنتجة) للمواصفات المتفق عليها (او المستهدفة) • وقد يـــتم ذلك بفحص الوحدات المشتراه • الا ان هذا الفحص الشامل قد يكون مرهق وغير دقيق كما انـــه يتعرض لاخطاء التحيز والاهمال • يضاف الى ذلك انه فى بعض الحالات تكون نفقات فحص المفردة مرتفعة بينما تكون الخسارة الناجمة عن عدم اكتشاف بعض الوحدات المعيبة ليست مرتفعة • وفـى حالات اخرى قد يؤدى فحص المفردة الى اهلاكها — ولهذه الاسباب فان المشترى كثيرا ما يلجـأ الى استخدام احد نظم الفحص بالعينة للتأكد من مدى مطابقة مفردات العينة للمواصفات • وفـى ضوء نتيجة فحص العينة يقرر قبول الكمية او رفضها •

ولاسباب مشابهة فان نظم الفحص بالعينة تستخدم عند المراحل المتتالية من الانتـــاج للتأكد من صلاحية الوحدات المنتجة عند احدى المراحل للدخول فى المرحلة الانتاجية التاليـــة مما يقلل من نفقات الانتاج ويرفع — بطريق غير مباشر — من جودة المنتجات النهائية •

من ذلك يتضح انه بينما تستخدم لوحات ضبط الجودة فى التحكم فى مستوى جودة الانتـــاج وفى مراقبة هذا المستوى — فان نظم الفحص بالعينة تهدف الى اتخاذ قرار بقبول او رفض كميـــة من المنتجات بناء على نتائج فحص عينة منها •

وهناك نظم مختلفة للفحص بالعينة يهدف القبول او الرفض* Sampling by Attributes. سنذكر منها ما يلى :

١— نظام العينة المفردة Single Sampling Inspection Plan

٢— نظام العينة المزدوجة Double " " "

٣— نظام العينة التتابعية Sequential " " "

---

* هذه تختلف عن نظم العينة لفحص المتغيرات Sampling by Variables والـتى تطبق اذا كان هناك مقياس كمى لجودة السلعة مثل الوزن او قوة الاحتمال او الابعاد الهندسية

١ـ نظام العينة المفـردة

Single sampling Inspection Plan

اذا اراد شخص ما شراء كمية من احد المنتجات واذا كانت هذه الكمية مكونة من ن مفـردة فان نظام الفحص المعتمد على عينة واحدة يقتضى سحب عينة عشوائية مكونة من ں مفردة وفحص كل منها . فاذا كان عدد الوحدات المعيبة بالعينة اقل من أو يساوى رقم معين ح مفـردة ـ مثلا ـ (ح $\leqslant$ ں) فانه يقبل شراء الكمية كلها . اما اذا كان عدد الوحدات المعيبة بالعينة اكبر من ح فانه يرفض الكمية كلها .

وعلى ذلك فان احتمال قبول الكمية المنتجة يكون مساويا لاحتمال ان يكون عدد الوحدات المعيبة بالعينة اقل من أو يساوى ح . ونظرا لان عدد الوحدات المعيبة بالعينه ماهو الا متغير عشوائى يتبع التوزيع الهيبرجيومترى ـ وسنرمز له بالرمز ر ـ فان هذا الاحتمال يكون :

$$\text{احتمال قبول الكمية} = \text{احتمال}\,(ر \leqslant ح) = \sum_{ر=0}^{ح} \frac{\binom{م}{ر}\binom{ن-م}{ں-ر}}{\binom{ن}{ں}}$$

حيث م هى عدد الوحدات المعيبه بالكمية المنتجه (اى بالمجتمع الذى سحبت منـه العينه) . ويلاحظ ان هذا الاحتمال يعتمد على قيمة كل من ں ، ح وكذلك على قيمة م . وبالتالى فانه اذا كانت ں ، ح معلومتين فان هذا الاحتمال يكون دالة فى عدد الوحـدات المعيبه فى " المجتمع " .

ونظرا لصعوبة استخدام التوزيع الهيبرجيومترى فى الحسابات فانه يفضل استخدام احـد التوزيعات التقريبيه Approximate Dist. اذا كانت ں صغيرة بالنسبة الى ن . فـاذا رمزنا الى نسبة الوحدات المعيبه فى الكمية المنتجه بالرمز ح واذا كانت ں ح > ٥ فان التوزيع ثنائى الحدين يعتبر تقريبا مقبولا للتوزيع الهيبرجيومترى . اما اذا كانت ں ح $\leqslant$ ٥ فانـه يمكن استخدام التوزيع البواسونى .

وفى حالة استخدام توزيع ذات الحدين فان احتمال قبول الكميه المنتجه يكون :

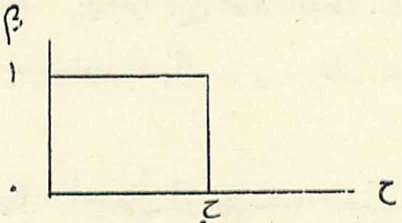
$$\text{احتمال}\,(ر \leqslant ح) \simeq \sum_{ر=0}^{ح} \binom{ں}{ر} ح^{ر} (1-ح)^{ں-ر}$$

اما اذا استخدم التوزيع البواسونى فان احتمال القبول يكون

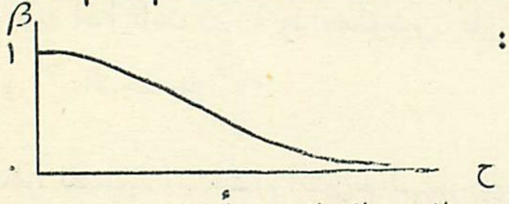
$$\text{احتمال}\ (\,ر \le حـ\,) \simeq \sum_{ر=0}^{حـ} \frac{هـ^{-ن\,ح}\,(ن\,ح)^{ر}}{ر\,!}$$

ويلاحظ ان هذا الاحتمال عباره عن دالة فى النسبه المجهولة ح وسنرمز لهذه الداله بالرمز β (ح) وهى تعطى احتمال قبول الكمية المنتجه بدلالة نسبة المعيب فى المجتمع • وبالتالى فهى تبين مدى كفاءة وفاعلية نظام العينه فى قبول الكميات " ذات الجودة المرتفعه " ورفض الكميات " ذات الجوده المنخفضه " ولذلك تسمى بدالة منحنى مميز الفاعلية.

فاذا كانت نسبة المعيب المطلوب تحقيقها فى المجتمع هى ح. فان الشكل المثالى لمنحنى مميز الفاعليـة يكون



لان هذا الشكل يعنى ان احتمال قبول الكميات المنتجة التى تكون بها نسبة المعيب اكبر من ح. هو الصفر بينما احتمال قبول الكميات التى تقل فيها نسبة المعيب عن ح. هو الواحد الصحيح • ولكن هذا الوضع لايتحقق الا باستخدام اسلوب الحصر الشامل • اما فى حالة استخدام نظام العينة المفرده فان منحنى مميز الفاعلية يأخذ الشكل التالى :



وكلما زاد حجم العينه كلما اقترب شكل المنحنى من الوضع المثالى • أما اذا كان حجم العينة ثابت فان شكل المنحنى يتأثر بقيمة حـ وذلك لان احتمال قبول الكمية المنتجة يزداد مع زيادة حـ وبالتالى فان المنحنى يرتفع كلما زادت قيمة حـ •

مثال : باستخدام توزيع بواسون ارسم منحنى مميز الفاعليه لنظام العينه المفرده التالى :

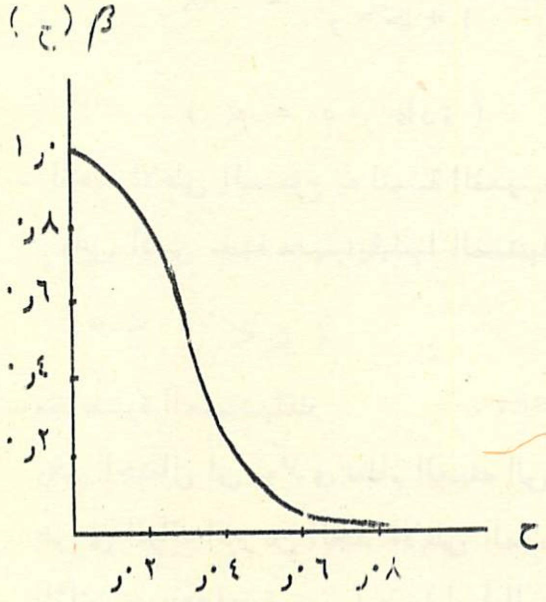
ن = ٣٠٠٠ ، ن = ١٥٠ ، حـ = ٤ •

$$\text{الحل :}\ \beta(ح) = \sum_{ر=0}^{4} \frac{هـ^{-150\,ح}\,(150\,ح)^{ر}}{ر\,!}$$

ويمكن حساب هذه القيمة من جداول توزيع بواسون -للقيم المختلفه للمعلمه ح -فنحصل على الجدول التالى :

(حيث ١٥٠ ح تمثل العدد المتوقع للوحدات المعيبه بالعينه اذا كانت نسبة المعيب فى المجتمع هى ح)

ح	١٥٠ ح	β (ح)
٠٠ر	٠	١٠٠ر١
٠١ر	١٫٥	٠٫٩٨١
٠٢ر	٣٫٠	٠٫٨١٥
٠٣ر	٤٫٥	٠٫٥٣٢
٠٤ر	٦٫٠	٠٫٢٨٥
٠٥ر	٧٫٥	٠٫١٣٢
٠٦ر	٩٫٠	٠٫٠٥٥
٠٧ر	١٠٫٥	٠٫٠٢١
٠٨ر	١٢٫٠	٠٫٠٠٨



ملاحظة : يلاحظ ان حجم العينه الذى يحقق مخاطره معينه لايعتمد على حجم المجتمع الذى سحبت منه العينه طالما ان توزيع بواسون - او ذات الحدين هو المستخدم • وهذا يبين خطأ الرأى الشائع القائل بأن حجم العينة يجب أن يمثل نسب معينة من حجم المجتمع •

والان كيف يتم تحديد كل من ن ، ح ؟

ان هذا يتوقف على اربع مقاييس اساسية :

١- النسبه المستهدفه للوحدات المعيبه Acceptance Quality Level وهى نسبة الوحدات المعيبه التى يرغب المنتج فى تحقيقها • وسنرمز لها بالرمز $ح_٠$ •

٢ـ مخاطرة المنتج Producer's Risk

وهى احتمال ان يؤدى نظام العينه الى رفض الكمية المنتجه بالرغم من ان نسبة المعيب بها هى فى الواقع اقل من او تساوى النسبه المستهدفه ح (اى انها احتمال حدوث خطأ من النوع الاول ـ ومعلومية ح.) . ويرمز لها بالرمز α . اى ان :

$$\alpha = \sum_{ر=ح+١}^{ن} \frac{هـ^{-ن ح.} (ن ح.)^{ر}}{ر!}$$

(α = ٠٥ر٠ عادة)

٣ـ الحد الاعلى المسموح به لنسبة المعيب Lot Tolerence per Cent Defective.

وهى اقصى نسبة معيب يقبلها المستهلك ـ او المشترى ـ وسنرمز لها بالرمز $ح_١$

(حيث $ح_١ > ح.$)

٤ـ مخاطرة المستهلك Consumer's Risk.

وهى احتمال ان يؤدى نظام العينه الى قبول الكمية المنتجه بالرغم من ان نسبة المعيب بها هى فى الواقع اكبر من الحد الاعلى المسموح به $ح_١$ (اى انها احتمال حدوث خطأ من النوع الثانى ـ ومعلومية $ح_١$) ويرمز لها بالرمز β اى ان :

$$\beta = \sum_{ر=٠}^{ح} \frac{هـ^{-ن ح_١} (ن ح_١)^{ر}}{ر!}$$

{ β = ١٠ر٠ عادة . وهذه تختلف عن الداله β (ح) وهى فى الواقع قيمة $\beta(ح_١)$ }

ملاحظة : يلاحظ ان هناك تعارض بين النوعين من المخاطره . فاذا كانت ن ثابته فان تخفيض α يقتضى زيادة ح ولكن زيادة ح تؤدى الى زيادة β .

وعلى ذلك فانه بمعرفه α ، β ، ح. ، $ح_١$ يمكن تحديد* قيم ن ، ح التى

* هذه احدى الطرق التى يمكن استخدامها لتقدير افضل قيم يمكن ان تأخذها ن، ح . ولكن من الممكن اختيار ن، ح التى تحقق قيمة معينه للمعلمتين $ح_١$ ، β وفى نفس الوقت تقلل نفقات الفحص بقدر الامكان وذلك عن طريق الاستعانه بما يسمى منحنى متوسط العدد الكلى للوحدات تحت الفحص Average Total Inspection Curve ولن نذكر تفاصيل هذه الطريقه هنا .

تحقق المعادلتين التاليتين ـ عن طريق التجربه والخطأ وباستخدام جداول توزيع بواســون :

$$\text{١ـ}\ \alpha = \sum_{\text{ر}=0}^{\text{حـ}} \frac{\text{هـ}^{-\text{ن ح}_0}\,(\text{ن ح}_0)^{\text{ر}}}{\text{ر}\,!}$$

$$\beta = \sum_{\text{ر}=0}^{\text{حـ}} \frac{\text{هـ}^{-\text{ن ح}_1}\,(\text{ن ح}_1)^{\text{ر}}}{\text{ر}\,!}$$

<u>مثال</u> : ماهو نظام المعاينه الذى يحقق القيم التاليـــة :

α = ٠٥ر٠ ، ح_0 = ٠١ر٠ ، β = ١٠ر٠ ، ح_1 = ٠٣ر٠

<u>الحل</u> : نفرض مثلا ان حـ = ٥ ونوجد من الجداول قيمة ن ح_1 التى تجعل β = ١٠ر٠ فنجد ان هذه القيمة هى : ن ح_1 = ٩ر٣ ، وحيث ان ح_1 = ٠٣ر٠

فـان ن = $\frac{٩ر٣}{٠٣ر٠}$ = ٣١٠ وبالتالى فان ن ح_0 = ١ر٣

وبالرجوع الى الجداول مرة اخرى نجد ان قيمة α اذا كانت ن ح_0 = ١ر٣ ، حـ = ٥ هى ٠٩٤ر٠ وهى اكبر كثيرا من القيمة المطلوب تحقيقها ، ولذلك نختار قيمة اخرى للمقدار حـ ونعيد المحاولة ، ويجب ان تكون القيمة الجديدة اكبر من القيمة السابق اختيارها (لكى تقلل من مخاطرة المنتج) ولتكن ٧ مثـلا ،

فنجد من الجداول ان ن ح_1 = ٨ر١١ (عندما تكون β = ١٠ر ، حـ = ٧) ،

أى ان ن = $\frac{٨ر١١}{٠٣ر}$ = ٣٩٣

اى ان ن ح_0 = ٩٣ر٣

ومن الجداول نجد ان α = ٠٤٧ر (عندما تكون ن ح_0 = ٩٣ر٣ ، حـ = ٧)
وهذه القيمة اقرب مايمكن من القيمة المطلوبه (٠٥ر) ،

اى ان نظام المعاينه الواجب اتباعه لتحقيق الخصائص المطلوبه هو :

اختيار عينه عشوائية حجمها ٣٩٢ وحده وفحص مفردات هذه العينه . فاذا كان عدد الوحدات المعيبه بها اقل من او يساوى ٧ تقبل الكمية المنتجه . اما اذا كان عدد الوحدات المعيبه بالعينة اكبر من ٧ فترفض الكمية المنتجة .

ومن الواضح الان انه اذا كان هناك نظام معاينه مستخدم وفيه قيم ن ، ح معطاه فانه يمكن تقدير قيم ح. ، ح١ اذا علمت قيم α ، β (والعكس : اذا تحددت قيم ح. ، ح١ فانه يمكن تقدير قيم α ، β) وبمعنى آخر فانه يمكن معرفة نسبة المعيب التى يعتبرها نظام العينه " مقبوله " وكذلك نسبة المعيب التى ترفض بناء على هذا النظام .

فمثلا : اذا كانت ن = ١٥٠ ، ح = ٤

واذا كانت β = ١٠ر ، α = ٠٥ر

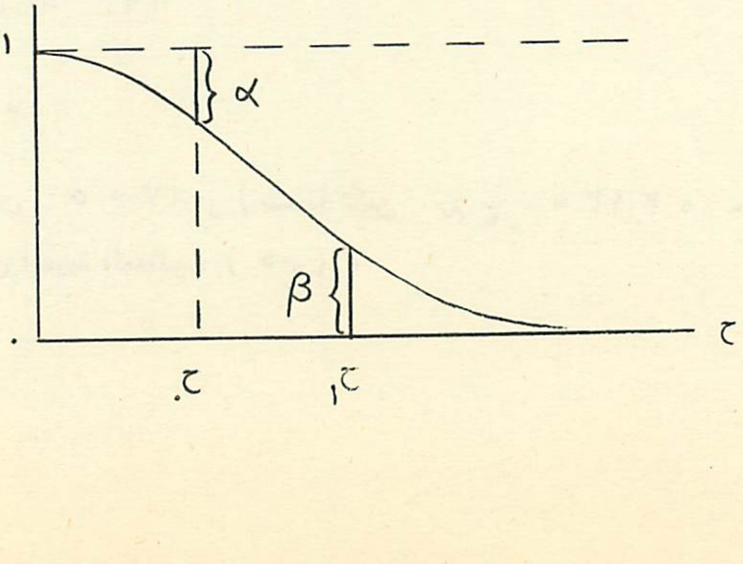
فانه باستخدام جداول توزيع بواسون نجد ان

ن ح١ = ٨ اى ان ح١ = $\frac{\text{٨ر٠}}{\text{١٥٠}}$ = ٠٥٣٣ر

كما ان : ن ح. = ١ر٩٧ اى ان ح. = $\frac{\text{١ر٩٧}}{\text{١٥٠}}$ = ٠١٣١ر

وهذا يعنى ان نظام العينه المتبع (ن = ١٥٠ ، ح = ٤) يعتبر ان نسبة الوحدات المعيبه التى يستهدفها المنتج هى ٠١٣١ر بينما اقصى نسبة معيب يقبلها المستهلك هى ٠٥٣٣ر .

والشكل البيانى التالى يبين العلاقة بين المقاييس الاربعه المذكورة ومنحنى مميز الفاعلية (اذا كانت ح ، ن معلومه) :



اثر عملية الفحص بالعينه المفرده على جودة المنتجات :

بعد استخدام نظام الفحص بالعينه ، وبعد فحص جميع الوحدات فى الكميات المرفوضه واستبعاد الوحدات المعيبه منها فان مترسط مستوى جودة الكميات المباعة لابد ان يكون اعلى من متوسط مستوى جودة الكميات قبل الفحص • ولكن ماهو متوسط نسبة المعيب فى الكميات التى يتم بيعها ؟

ان هذه النسبة تسمى : متوسط جودة الوحدات المباعه* Average Outgoing Quality

ولحساب هذه النسبه نلاحظ ان الكميات المباعة تتكون من :

١- كميات قبلت بناء على نتائج الفحص وبالتالى فان نسبة المعيب بها هى ح (مجهوله) • ونظرا لان احتمال قبول اى كمية هو β (ح) فان نسبة الكميات المقبوله الى اجمالى الكميات المباعة هى β (ح) •

٢- كميات رفضت بناء على نتائج العينه ولذلك تم فحص جميع الوحدات بها كما تم استبعاد جميع الوحدات المعيبه — ثم بيعت الوحدات الصالحة — وبالتالى فان نسبة المعيب بها هى الصفر • ونظرا لان احتمال رفض اى كمية هو (١ — β (ح)) فان نسبة هذه الكميات الى اجمالى الكميات المباعة هى (١ — β (ح)) •

وعلى ذلك فان متوسط نسبة المعيب فى الكميات المباعة يعتمد على نسبة المعيب ح — اى نسبة المعيب فى الكميات المنتجة — وسنرمز له بالرمز ρ (ح)

ومن التحليل السابق نجد ان**

$$\rho(ح) = ح \cdot \beta(ح) + صفر \times (1 - \beta(ح))$$

$$= ح \cdot \beta(ح)$$

* حساب هذه النسبة يعتمد على افتراض امكانية فحص جميع الوحدات فى الكميات المرفوضه — فاذا كان هذا غير ممكن نظرا لان الفحص يؤدى الى اهلاك المفرده فانه لن يمكن حساب هذه النسبة •

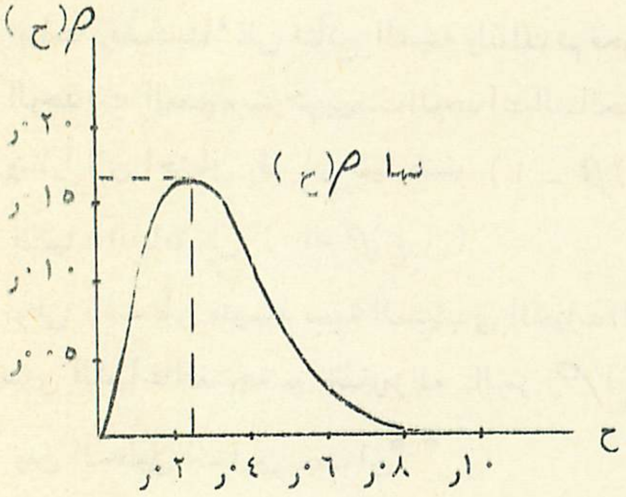
** اذا اتبعت طريقة اخرى فى معالجة الكميات المرفوضه — غير الطريقة التى ذكرت هنا — فان الداله ρ (ح) ستأخذ صيغا مختلفة •

ويلاحظ ان هذه النسبة تساوى الصفر عند ما تكون ح = ٠ ثم تتزايد مع تزايد ح حتى تصل الى نهايتها العظمى ثم تتناقص — مع زيادة ح — مرة ثانية حتى تصل الى الصفر وذلك لان زيادة نسبة المعيب فى الكميات المنتجة بدرجة كبيرة يؤدى الى زيادة الكميات المرفوضة وبالتالى تحسين مستوى جودة المنتجات المباعة (اى تخفيض قيمة ρ(ح)) .

وترجع اهمية النسبة ρ(ح) الى انها تعطى فكرة عن درجة جودة المنتجات التى تباع بناء على نتائج الفحص بالعينة وذلك بصرف النظر عن درجة الجودة قبل الفحص فقيمة النهاية العظمى لهذه الدالة — سنرمز لها بالرمز نها ρ(ح) — تمثل اسوأ نسبة معيب يمكن ان تحدث — فى المتوسط — فى الكمية المباعة فى ظل نظام العينة المتبع *.

مثال : اذا كانت : ن = ١٥٠ ، حـ = ٤ فانه يمكن حساب قيمة ρ(ح) ورسم المنحنى الذى يمثلها كما يلى :

ح	β(ح)	ρ(ح) = ح β_0(ح)
٠ر٠٠	١ر٠٠٠	٠ر٠٠٠
٠ر٠١	٠ر٩٨١	٠ر٠٠٩٨
٠ر٠٢	٠ر٨١٥	٠ر٠١٦٣
٠ر٠٣	٠ر٥٣٢	٠ر٠١٦٠
٠ر٠٤	٠ر٢٨٥	٠ر٠١١٤
٠ر٠٥	٠ر١٣٢	٠ر٠٠٦٦
٠ر٠٦	٠ر٠٥٥	٠ر٠٠٣٣
٠ر٠٧	٠ر٠٢١	٠ر٠٠١٥
٠ر٠٨	٠ر٠٠٨	٠ر٠٠٠٦



فى هذا المثال نجد ان نها ρ(ح) = ٠ر٠١٧ وتتحقق عندما تكون ح = ٠ر٠٢٤ وهذا يعنى ان أسوأ مستوى جودة يمكن ان يحدث — فى المتوسط — فى الكميات المباعة هو ان تكون نسبة المعيب ٠ر٠١٧ ويحدث هذا اذا كانت نسبة المعيب فى الكميات المنتجة — قبل الفحص — هى ٠ر٠٢٤ .

* ... ان هذا لا يستبعد امكانية بيع بعض الكميات تكون بها نسبة المعيب أكبر من النسبة نها ρ(ح)

وهذا المثال يبين اهمية المقياس ρ (ح) . فبالرغم من ان المنتج لا يعلم نسبة المعيب في الكميات المنتجة فعلا الا انه — بواسطة المنحنى ρ (ح) — يعلم ان نسبة المعيب في الكميات المباعة لن تزيد في المتوسط عن ١٧ . واذا اتبع نظام العينة المذكور (ن = ١٥٠ ، حـ = ٤) ومهما كانت نسبة المعيب بالكميات المنتجة .

---

٢ — نظام العينة المزدوجة

Double Sampling Inspection Plan.

ان نظام العينة المفردة يؤدى الى اتخاذ قرار بقبول او رفض الكمية المنتجة بناء على نتائج فحص مفردات عينة واحدة . ولكن اذا كان عدد الوحدات المعيبة بالعينة قريبا من الرقم الحرج حـ فان القرار المتخذ بناء على نتائج هذه العينة يكون "مشكوكا فيه" . ولذلك فقد يستخدم نظام العينة المزدوجة ليعطى للكميات المنتجة "المشكوك في مستوى جودتها "فرصة ثانية للفحص .

ويعتمد هذا النظام على سحب عينة عشوائية حجمها $ن_١$ وفحص مفرداتها فاذا كان عدد الوحدات المعيبة بها "صغيرا جدا" — اقل من او يساوى $حـ_١$ مثلا — تقبل الكمية المنتجة . اما اذا كان عدد الوحدات المعيبة "كبيرا جدا" — اكبر من $حـ_٢$ مثلا — فترفض الكمية المنتجة . ولكن اذا كان عدد الوحدات المعيبة "متوسط" — اى اكبر من $حـ_١$ واقل من او يساوى $حـ_٢$ — فاننا نسحب عينة عشوائية ثانية حجمها $ن_٢$ (من الوحدات التى لم تظهر فى العينة الاولى) . واذا كان العدد الكلى للوحدات المعيبة فى العينتين اقل من او يساوى $حـ_٣$ تقبل الكمية المنتجة، اما اذا كان اكبر من $حـ_٣$ فترفض الكمية المنتجة .

(لاحظ ان $حـ_١ < حـ_٢ \leqslant حـ_٣$. وفى كثير من التطبيقات العملية تؤخذ $حـ_٣ = حـ_٢$)

فاذا كانت $ر_١$ هى عدد الوحدات المعيبة فى العينة الاولى ، $ر_٢$ هى عدد الوحدات المعيبة فى العينة الثانية فان $ر_١$ ، $ر_٢$ تكون متغيرات عشوائية تتبع التوزيع الهيبرجيومترى . ويكون احتمال قبول الكمية المنتجة اذا استخدم نظام العينة المزدوجة هو :

احتمال القبول = احتمال ($ر_{١} \leq ج_{١}$ او $ر_{١} + ر_{٢} \leq ج_{٣}$)

= احتمال ($ر_{١} \leq ج_{١}$) + احتمال ($ر_{١} = ج_{١} + ١$) • احتمال ($ر_{٢} \leq ج_{٣} - ج_{١} - ١$)

+ احتمال ($ر_{١} = ج_{١} + ٢$) • احتمال ($ر_{٢} \leq ج_{٣} - ج_{١} - ٢$)

+

⋮

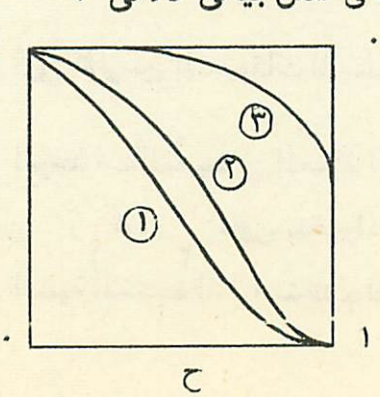
+ احتمال ($ر_{١} = ج_{٢}$) • احتمال ($ر_{٢} \leq ج_{٣} - ج_{٢}$)

وكما سبق ان بينا ــ فى حالة نظام العينة المفردة ــ فان قيمة هذا الاحتمال تعتمد على عدد الوحدات المعيبة فى الكمية الكلية المنتجة • اى انها تعتمد على النسبة ح ــ نسبة المعيب فى "المجتمع" ــ وتسمى بدالة منحنى مميز الفاعلية ويرمز لها بالرمز β(ح) •

وعادة تحسب قيمة هذا الاحتمال باستخدام جداول توزيع بواسون (او ذات الحدين) كتقريب للتوزيع الهيبرجيومترى الواجب استخدامه •

وهناك منحنيان اخران لهما اهميتها بالنسبة لنظام العينة المزدوجة • احدهما يمثل احتمال قبول الكمية المنتجة بناء على نتائج العينة الاولى فقط ويمكن ايجاده عن طريق حساب احتمال ($ر_{١} \leq ج_{١}$) عند القيم المختلفة للمعلمة ح • والثانى يبين احتمال رفض الكمية المنتجة بناء على نتائج العينة الاولى فقط اى انه يمكن ايجاده عن طريق حساب قيمة : احتمال ($ر_{١} > ج_{٢}$) عند القيم المختلفة للمعلمة ح •

ويمكن رسم المنحنيات الثلاث فى شكل بيانى كالآتى :



فالمنحنى (١) يمثل احتمال القبول بناء على نتيجة العينة الاولى فقط •

والمنحنى (٢) يمثل احتمال القبول بناء على نتيجة العينتين ـ اى انه يمثل منحنى مميز الفاعلية لنظام العينة المزدوجة •

والمنحنى (٣) يمثل احتمال الرفض بناء على نتيجة العينة الاولى فقط

ويلاحظ ان المسافة الرأسية بين المنحنيين (١) ، (٣) ـ عند اى قيمة محددة للمعلمة ح ـ تمثل احتمال سحب العينة الثانية •

<u>مثال</u> : ارسم المنحنيات الثلاث السابق ذكرها لنظام العينة المزدوجة التالى :

ن$_{١}$ = ١٠٠ ج$_{١}$ = ٢ ج$_{٢}$ = ٥

ن$_{٢}$ = ٢٠٠ ج$_{٣}$ = ج$_{٢}$ = ٥

<u>الحل</u> :

يلاحظ ان : احتمال قبول العينة الاولى = احتمال (ر$_{١}$ $\leq$ ٢)

احتمال رفض العينة الاولى = احتمال (ر$_{١}$ $>$ ٥)

= ١ ـ احتمال (ر$_{١}$ $\leq$ ٥)

β(ح) = احتمال (ر$_{١}$ $\leq$ ٢) + احتمال (ر$_{١}$ = ٣) • احتمال (ر$_{٢}$ $\leq$ ٢)

+ احتمال (ر$_{١}$ = ٤) • احتمال (ر$_{٢}$ $\leq$ ١)

+ احتمال (ر$_{١}$ = ٥) • احتمال (ر$_{٢}$ $\leq$ ٠)

أولا : المنحنيات المرتبطة بالعينة الاولى فقط

ح	ح ن ١	احتمال القبول من العينة الاولى	احتمال (ر ١ ⩾ ٥)	احتمال الرفض من العينة الاولى
ر٠٠	٠	١ر٠٠٠	١ر٠٠٠	٠
ر٠١	١	٠ر٩٢٠	٠ر٩٩٩	٠ر٠٠١
ر٠٢	٢	٠ر٦٧٧	٠ر٩٨٣	ر٠١٧
ر٠٣	٣	٠ر٤٢٣	٠ر٩١٦	ر٠٨٤
ر٠٤	٤	٠ر٢٣٨	٠ر٧٨٥	٠ر٢١٥
ر٠٥	٥	٠ر١٢٥	٠ر٦١٦	٠ر٣٨٤
ر٠٦	٦	ر٠٦٢	٠ر٤٤٦	٠ر٥٥٤
ر٠٧	٧	ر٠٣٠	٠ر٣٠١	ر٦٩٩
ر٠٨	٨	ر٠١٤	٠ر١٩١	ر٨٠٩
ر٠٩	٩	ر٠٠٦	٠ر١١٦	ر٨٨٤

ثانيا : منحنى مميز الفاعلية (للعينة المزدوجة)

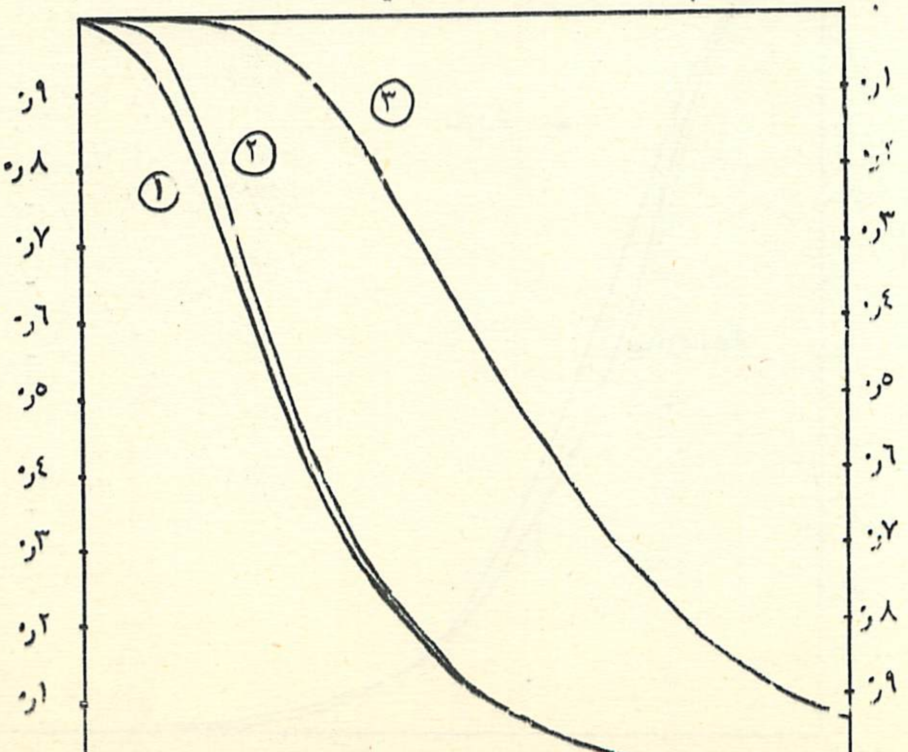
ح	ح ن ١	احتمال (ر ١ ⩾ ٢)	احتمال (ر ١ = ٣)	احتمال (ر ١ = ٤)	احتمال (ر ١ = ٥)
ر٠٠	٠	١ر٠٠٠	٠	٠	٠
ر٠١	١	٠ر٩٢٠	ر٠٦١	ر٠١٥	ر٠٠٣
ر٠٢	٢	٠ر٦٧٧	ر١٨٠	ر٠٩٠	ر٠٣٦
ر٠٣	٣	٠ر٤٢٣	٠ر٢٢٤	ر١٦٨	ر١٠١
ر٠٤	٤	٠ر٢٣٨	٠ر١٩٥	ر١٩٦	ر١٥٦
ر٠٥	٥	٠ر١٢٥	٠ر١٤٠	ر١٧٥	ر١٧٦
ر٠٦	٦	ر٠٦٢	٠ر١٨٩	ر١٣٤	ر١٦١
ر٠٧	٧	ر٠٣٠	ر٠٥٢	ر٠٩١	ر١٢٨
ر٠٨	٨	ر٠١٤	ر٠٢٨	ر٠٥٨	ر٠٩١
ر٠٦	٩	ر٠٠٦	ر٠١٥	ر٠٣٤	ر٠٦١

ح ن٢	احتمال (ر٢ ≥ ٢)	احتمال (ر٢ ≥ ١)	احتمال (ر٢ ≥ ٠)	β(ح)
٠	١ر٠٠٠	١ر٠	١ر٠	١ر٠٠
٢	٠ر٦٧٧	٠ر٤٠٦	ر١٣٥	٠ر٩٦٧
٤	٠ر٢٣٨	ر٠٩٢	ر٠١٨	٠ر٧٢٨
٦	ر٠٦٢	ر٠١٧	ر٠٠٢	٠ر٤٤٠
٨	ر٠١٤	ر٠٠٣	٠	٠ر٢٤١
١٠	ر٠٠٣	٠	٠	٠ر١٢٥
١٢	ر٠٠١	٠	٠	ر٠٦٢
١٤	٠	٠	٠	ر٠٣٠
١٦	٠	٠	٠	ر٠١٤
١٨	٠	٠	٠	ر٠٠٦

(فمثلا : اذا كانت ح = ٠ر١ فان

β (٠ر١) = ٠ر٩٢٠ + ٠ر٠٦١ × ٠ر٦٧٧ + ٠ر٠١٥ × ٠ر٤٠٦ + ٠ر٠٠٣ × ٠ر١٣٥ = ٠ر٩٦٧)

ومن هذه الجداول يمكن رسم المنحنيات الثلاث التالية :

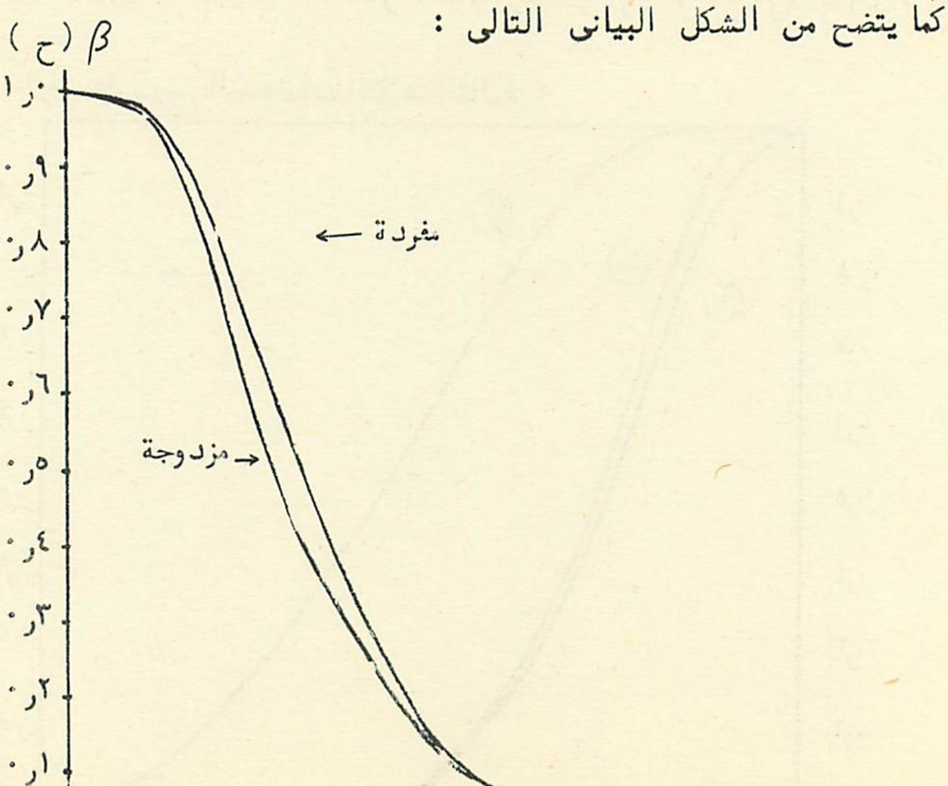


ملاحظات :

١ ـ الحسابات السابقة تعتمد على افتراض ان نسبة الوحدات المعيبة فى المجتمع الذى سحبت منه العينة الثانية لا تختلف عن نسبة الوحدات المعيبة فى المجتمع الذى سحبت منه العينة الاولى وهذا الفرض غير دقيق ولكنه يستخدم ـ مثل توزيع بواسون ـ لتبسيط الحسابات طالما ان حجم المجتمع كبيرا ٠

٢ ـ يلاحظ ان β(٠٥٣ر٠) = ١٠ر٠ اى ان نظام العينة المزدوجة المعطاه فى هذا المثال يجعل مخاطرة المستهلك تساوى ١٠ر٠ عندما تكون ح١ = ٠٥٣ر٠ وهذه هى نفس مخاطرة المستهلك التى يحققها نظام العينة الواحدة اذا كانت ن١ = ١٥٠ ، جـ = ٤ ٠

وبمقارنة منحنى مميز الفاعلية فى النظامين نجد ان منحنى مميز الفاعلية لنظام العينة المفردة يكون اقرب الى "الشكل المثالى" للمنحنى ٠ مما يعنى ان نظام العينة المفردة يزيد من احتمال قبول الكميات "الجيدة" ويقلل من احتمال قبول الكميات "الرديئة" (عندما تأخذ β، ح١ قيما محدودة) كما يتضح من الشكل البيانى التالى :



ويمكن التعبير عن النتيجة السابقة بالطريقة الاتية :

للحصول على نفس مخاطرة المستهلك ، يحتاج نظام العينة المزدوجة فى المتوسط – الى فحص عدد وحدات اقل من حجم العينة المفردة .

وهذا يقودنا الى محاولة ايجاد متوسط حجم العينة لنظام العينة المزدوجة ومقارنته بحجم العينة فى نظام العينة المفردة .

متوسط حجم العينة : Average Sample Size

فى ظل نظام العينة المزدوجة نجد ان عدد الوحدات التى يتم فحصها قبل اتخاذ قرارا برفض او قبول الكمية المنتجة ليس ثابتا (كما فى حالة العينة المفردة) لانه فى بعض الاحيان يكون $ن_١$ وفى احيان اخرى يكون $ن_١ + ن_٢$. وهذا يعتمد على جودة الكميات المنتجة – اى نسبة المعيب بها.

فاذا كانت نسبة المعيب بالكمية المنتجة مرتفعة جدا او منخفضة جدا فغالبا ما نتوصل الى قرار – بالقبول او الرفض – بناء على العينة الاولى فقط . اى بفحص $ن_١$ مفردة .

اما اذا كانت نسبة المعيب بالكمية المنتجة متوسطة فغالبا ما نحتاج الى العينة الثانية – اى يتم فحص $ن_١ + ن_٢$ مفردة – قبل ان نصل الى قرار .

وعلى ذلك فان متوسط عدد الوحدات التى يتم فحصها – اى متوسط حجم العينة – يتوقف على النسبة ح . ويمكن تقديره كما يلى :

متوسط حجم العينة = $ن_١$ × (احتمال قبول العينة الاولى + احتمال رفض العينة الاولى)

+ $(ن_١ + ن_٢)$ × (احتمال سحب العينة الثانية)

ولكن احتمال سحب العينة الثانية = ١ – احتمال قبول العينة الاولى – احتمال رفض العينة الاولى .

وبالتالى فان :

متوسط حجم العينة = $ن_١$ + [$ن_٢$ × احتمال سحب العينة الثانية]

= $ن_١$ + [$ن_٢$ × احتمال ($ج_١ < ر_١ \leqslant ج_٢$)]

وبالتالى فانه يمكن ايجاد متوسط حجم العينة لكل قيمة من قيم ح .

فبالنسبة للمثال السابق واذا كانت ح = ر٠١ فان ن١ح = ١ وبالتالى يكون

احتمال (ح١ > ر١ ⩾ ح٢) = احتمال (٢ > ر١ ⩾ ٥)

= احتمال (ر١ ⩾ ٥) ـ احتمال (ر١ ⩾ ٢)

= ٠ر٩٩٩ ـ ٠ر٩٢٠ = ٠ر٠٧٩

اى ان متوسط حجم العينة (اذا كانت ح = ر٠١) = ١٠٠ + ٢٠٠ × ٠ر٠٧٩ = ١١٦

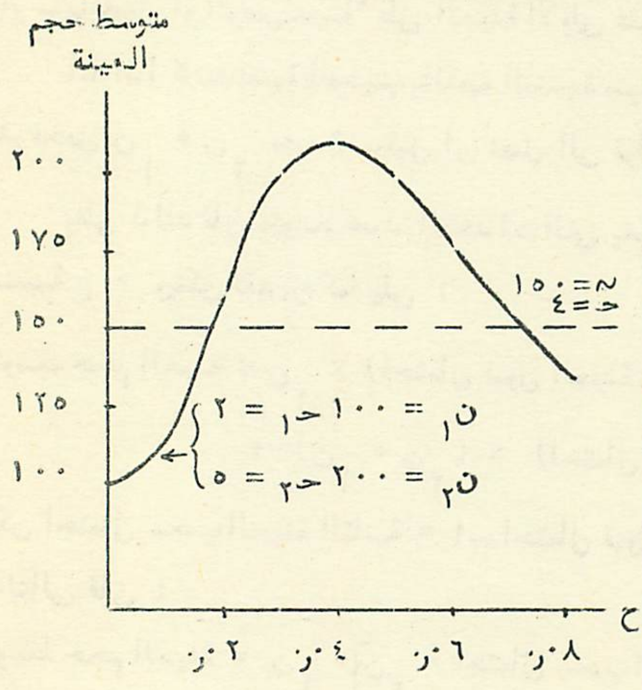
واذا كانت ح = ر٠٢ فان ن١ح = ٢ وبالتالى فان :

احتمال (٢ > ر١ ⩾ ٥) = ٠ر٩٨٣ ـ ٠ر٦٧٧ = ٠ر٣٠٦

اى ان متوسط حجم العينة (اذا كانت ح = ر٠٢) = ١٠٠ + ٢٠٠ × ٠ر٣٠٦ = ١٦١

وهكذا بالنسبة لباقى قيم ح فنحصل على الجدول والمنحنى التاليين :

ح	احتمال (٢ > ر١ ⩾ ٥)	متوسط حجم العينة
ر٠٠	٠	١٠٠
ر٠١	٠ر٩٩٩ ـ ٠ر٩٢٠ = ر٠٧٩	١١٦
ر٠٢	٠ر٩٨٣ ـ ٠ر٦٧٧ = ر٣٠٦	١٦١
ر٠٣	٠ر٩١٦ ـ ٠ر٤٢٣ = ٠ر٤٩٣	١٩٩
ر٠٤	٠ر٧٨٥ ـ ٠ر٢٣٨ = ٠ر٥٤٧	٢٠٩
ر٠٥	٠ر٦١٦ ـ ٠ر١٢٥ = ٠ر٤٩١	١٩٨
ر٠٦	٠ر٤٤٦ ـ ٠ر٠٦٢ = ٠ر٣٨٤	١٧٧
ر٠٧	٠ر٣٠١ ـ ٠ر٠٣٠ = ٠ر٢٧١	١٥٤
ر٠٨	٠ر١٩١ ـ ٠ر٠١٤ = ٠ر١٧٧	١٣٥
ر٠٩	٠ر١١٦ ـ ٠ر٠٠٦ = ٠ر١١٠	١٢٢



ومقارنة منحنى متوسط حجم العينة فى ظل نظام العينة المزدوجة بحجم العينة المفردة والتى تحقق نفس قيمة β(ح$_1$) نجد ان متوسط حجم العينة المزدوجة اكبر من حجم العينة المفردة اذا كانت ٠ر١٨ $\leq$ ح $\leq$ ٠ر٧٢ .

وهذا يبين انه اذا كان مستوى الجودة فى الكمية المنتجة مرتفعا او منخفضا فان نظام العينة المزدوجة يكون افضل – لان متوسط حجم العينة يكون اصغر وبالتالى فان نفقات الفحص تكون اقل .

<u>ملاحظات</u> :

١– من الممكن استخدام التجربة والخطأ لتحديد قيم ن$_1$ ، ن$_2$ ، ج$_1$ ، ج$_2$ ، ج$_3$ التى تحقق قيما معلومة للمقاييس α ، β ، ح$_0$ ، ح$_1$ كما سبق أن بينا فى حالة العينة المفردة . الا ان الحسابات هنا ستكون اكثر تعقيدا كما ان النتائج التى تحصل عليها تكون متعددة .

٢– باستخدام نفس طريقة التحليل المتبعة فى حالة العينة المفردة . يمكن هنا ايضا ايجاد منحنى متوسط نسبة المعيب بالكميات المباعة : م(ح) = ح β(ح)

٣ — نظام العينة التتابعية
Sequential Sampling Inspection Plan

نظرا لما يؤدى اليه استخدام العينة المزدوجة من انخفاض فى متوسط حجم العينة وبالتالى انخفاض نفقات الفحص فانه من المنطقى محاولة تعميم هذه الطريقة واستخدام نظام يعتمد على نتائج فحص عدة عينات متتالية بدلا من عينتين وذلك بهدف تخفيض متوسط حجم العينة ٠

ويبدأ نظام الفحص فى هذه الحالة بسحب عينة وفحص الوحدات المكونة لها ، وبناء على عدد الوحدات المعيبة بها نقرر احد الامور الثلاث الآتية :

١ — قبول الكمية المنتجة ٢ — رفض الكمية المنتجة ٣ — سحب عينة جديدة

فاذا توصلنا الى القرار الثالث نبدأ فحص عينة جديدة ٠ وبناء على عدد الوحدات المعيبة بالعينتين معا نختار أحد القرارات الثلاث السابقة وهكذا نكرر هذه العملية الى ان نصل الى قرار برفض او بقبول الكمية المنتجة ٠

وتعتبر الحالة الخاصة التى يكون فيها حجم العينة فى كل من المراحل المتتالية هو الوحدة من اهم نظم الفحص بالعينة التتابعية ٠ وسيقتصر التحليل هنا على هذه الحالة التى تعتبر تطبيقا مباشرا لما قام به "والد" A. Wald من دراسة تفصيلية للاختبارات الاحصائية التتابعية ٠ ولذلك سنبدأ بعرض النتائج الاساسية لتحليل "والد" التتابعى ثم نبين كيفية تطبيقها فى عينات الفحص ٠

تحليل "والد" Wald التتابعى :

لنفرض ان س متغير عشوائى يتبع توزيعا احتماليا معلوما وان ل (س ، θ) هى دالة كثافة الاحتمال لهذا التوزيع ، حيث θ هى معلمة التوزيع ٠

ولنفرض اننا نريد اختبار الفرض العدمى : $\theta = \theta_0$

ضد الفرض البديل : $\theta = \theta_1$ (حيث $\theta_1 > \theta_0$)

وذلك بمستوى معنوية α .

من الممكن اجراء مثل هذا الاختبار بواسطة اختيار عينة ذات حجم ثابت ن ثم حساب نسبة الامكان الاعظم $\lambda_{ن}$ (maximum Likelihood Ratio) :

$$\lambda_{ن} = \prod_{ر=1}^{ن} \frac{ل\,(س_ر \,،\, \theta_1)}{ل\,(س_ر \,،\, \theta_0)}$$

واذا كانت $\lambda_{ن} > ح_{(\alpha)}$ فاننا نرفض الفرض العدمي*.

ولكن الاختبار التتابعي يعتبر حجم العينة متغيرا عشوائيا ويقوم باجراء مقارنات متتالية لنسب الامكان الاعظم $\lambda_{م}$ (م = ١ ، ٢ ، ٣ ، ....) بمقدارين ثابتين أ ، ب :

فنبدأ بسحب مفردة واحدة (اى عينة حجمها واحد) ونوجد قيمة λ_1 :

فاذا كانت $\lambda_1 \geqslant$ أ نرفض الفرض العدمي

واذا كانت $\lambda_1 \leqslant$ ب نقبل الفرض العدمي

واذا كانت أ $> \lambda_1 >$ ب نسحب مفردة ثانية ونوجد قيمة λ_2 :

فاذا كانت $\lambda_2 \geqslant$ أ نرفض الفرض العدمي

واذا كانت $\lambda_2 \leqslant$ ب نقبل الفرض العدمي

واذا كانت أ $> \lambda_2 >$ ب نسحب مفردة ثالثة ونوجد قيمة λ_3 : . . .

وهكذا تستمر عملية سحب المفردات طالما كانت أ $> \lambda_{م} >$ ب وتتوقف عندما تصبح $\lambda_{م} \geqslant$ أ (فنرفض الفرض العدمي) او $\lambda_{م} \leqslant$ ب (فنقبل الفرض العدمي).

اما قيم الثوابت أ ، ب فانها تتوقف على قيم α ، β المطلوب تحقيقها . ويمكن ايجادها باستخدام الصيغ التقريبية ** التالية :

$$\text{أ} \simeq \frac{1-\beta}{\alpha} \quad ، \quad \text{ب} \simeq \frac{\beta}{1-\alpha}$$

---

* $ح_{(\alpha)}$ هي القيمة التي تحقق العلاقة :

$$\int \cdots \int_{\lambda_{ن} > ح} ل\,(س_1 \,،\, \theta_0) \cdots ل\,(س_{ن} \,،\, \theta_0)\; ى س_1 \cdots ى س_{ن} = \alpha$$

** لمعرفة كيفية استنتاج هذه القيم التقريبية وكذلك لاثبات ان الاختبار التتابعي ينتهي بالقبول او الرفض : انظر المرجع رقم (٥)

وكذلك فانه يمكن ايجاد الحجم المتوقع للعينة باستخدام الصيغة التقريبية التالية* :

$$\text{توقع (ن)} \simeq \frac{\text{ف}(\theta)\ \text{لو أ} + (1 - \text{ف}(\theta))\ \text{لو ب}}{\text{توقع (ص)}}$$

$$\text{حيث ص} = \text{لو}\ \frac{\text{ل}(\text{س}\ ،\ \theta_1)}{\text{ل}(\text{س}\ ،\ \theta_0)}$$

،ف (θ) هى دالة قوة الاختبار .

تطبيق التحليل التتابعى على عينات الفحص :

اذا كانت ح هى نسبة المعيب فى الكمية الكلية المنتجة واذا كانت ر هى عدد الوحدات المعيبة فى عينة حجمها ن فان :

$$\lambda_{\text{ن}} = \frac{\text{ح}_1^{\text{ر}}\ (1 - \text{ح}_1)^{\text{ن}-\text{ر}}}{\text{ح}_0^{\text{ر}}\ (1 - \text{ح}_0)^{\text{ن}-\text{ر}}}$$

حيث ح_0 هى النسبة المستهدفة للوحدات المعيبة (اى قيمة ح فى ظل الفرض العدمى)

ح_1 هى الحد الاعلى المسموح به لنسبة المعيب (اى قيمة ح فى ظل الفرض البديل)

وباستخدام طريقة التحليل التتابعى فانه يجب الاستمرار فى سحب مفردات جديدة وفحصها طالما ان أ $> \lambda_{\text{ن}} >$ ب .

اما اذا كانت $\lambda_{\text{ن}} \geqslant$ أ فاننا نرفض الكمية المنتجة

واذا كانت $\lambda_{\text{ن}} \leqslant$ ب فاننا نقبل الكمية المنتجة

(حيث أ $\simeq \frac{1-\beta}{\alpha}$ ، ب $\simeq \frac{\beta}{1-\alpha}$)

ويلاحظ انه يمكن الوصول الى نفس قرار القبول او الرفض اذا قورنت (لو $\lambda_{\text{ن}}$) بالمقادير (لو أ)، (لو ب) بدلا من مقارنة $\lambda_{\text{ن}}$ بالثوابت أ ، ب .

$$\text{ولكن لو}\ \lambda_{\text{ن}} = \text{ن لو}\ \frac{1-\text{ح}_1}{1-\text{ح}_0} + \text{ر لو}\ \frac{\text{ح}_1\ (1-\text{ح}_0)}{\text{ح}_0\ (1-\text{ح}_1)}$$

* انظر مرجع رقم (٥)

اى اننا نرفض الكمية المنتجة اذا كانت

$$\text{ن}\ \text{لو}\ \frac{1-\text{ح}_{1}}{1-\text{ح}_{0}} + \text{ر}\ \text{لو}\ \frac{\text{ح}_{1}(1-\text{ح}_{0})}{\text{ح}_{0}(1-\text{ح}_{1})} \geqslant \text{لو}\ \frac{1-\beta}{\alpha}$$

اى اذا كانت :

$$\text{ر} \geqslant \left[\text{لو}\ \frac{1-\beta}{\alpha} - \text{ن}\ \text{لو}\ \frac{1-\text{ح}_{1}}{1-\text{ح}_{0}}\right] \div \left[\text{لو}\ \frac{\text{ح}_{1}(1-\text{ح}_{0})}{\text{ح}_{0}(1-\text{ح}_{1})}\right]$$

كما اننا نقبل الكمية المنتجة اذا كانت

$$\text{ن}\ \text{لو}\ \frac{1-\text{ح}_{1}}{1-\text{ح}_{0}} + \text{ر}\ \text{لو}\ \frac{\text{ح}_{1}(1-\text{ح}_{0})}{\text{ح}_{0}(1-\text{ح}_{1})} \leqslant \text{لو}\ \frac{\beta}{1-\alpha}$$

اى اذا كانت :

$$\text{ر} \leqslant \left[\text{لو}\ \frac{\beta}{1-\alpha} - \text{ن}\ \text{لو}\ \frac{1-\text{ح}_{1}}{1-\text{ح}_{0}}\right] \div \left[\text{لو}\ \frac{\text{ح}_{1}(1-\text{ح}_{0})}{\text{ح}_{0}(1-\text{ح}_{1})}\right]$$

وبوضع

$$\text{جـ} = \left(\text{لو}\ \frac{1-\text{ح}_{0}}{1-\text{ح}_{1}}\right) \div \text{لو}\ \frac{\text{ح}_{1}(1-\text{ح}_{0})}{\text{ح}_{0}(1-\text{ح}_{1})}$$

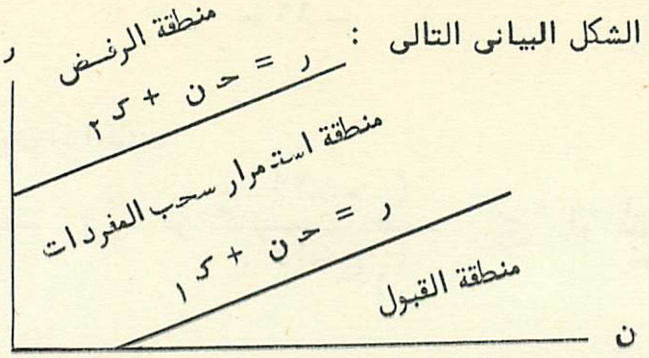
$$\text{ك}_{1} = \left(\text{لو}\ \frac{\beta}{1-\alpha}\right) \div \text{لو}\ \frac{\text{ح}_{1}(1-\text{ح}_{0})}{\text{ح}_{0}(1-\text{ح}_{1})}$$

$$\text{ك}_{2} = \left(\text{لو}\ \frac{1-\beta}{\alpha}\right) \div \text{لو}\ \frac{\text{ح}_{1}(1-\text{ح}_{0})}{\text{ح}_{0}(1-\text{ح}_{1})}$$

فانه يمكن تلخيص هذه النتائج فى صورة مبسطة يعتمد فيها قرار القبول او الرفض على عدد الوحدات المعيبة بالعينة . وذلك كما يلى :

اذا كانت	$\text{ر} \geqslant \text{جن} + \text{ك}_{2}$	نرفض الكمية المنتجة
واذا كانت	$\text{ر} \leqslant \text{جن} + \text{ك}_{1}$	نقبل الكمية المنتجة
واذا كانت	$\text{جن} + \text{ك}_{1} < \text{ر} < \text{جن} + \text{ك}_{2}$	نسحب مفردة جديدة

ويمكن تمثيل ذلك فى الشكل البيانى التالى :



واذا اتبعت هذه الطريقة لفحص الكميات المنتجة فان الحجم المتوقع للعينة يكون :

$$\text{توقع}(\text{ن}) \simeq^{*} \left[\left(1-\beta(\text{ح})\right)\text{لو أ} + \beta(\text{ح})\,\text{لو ب}\right] \div \left[\text{لو}\,\frac{1-\text{ح}_{1}}{\text{لو}\,1-\text{ح}_{٠}} + \text{ح}\ \text{لو}\,\frac{\text{ح}_{1}(1-\text{ح}_{٠})}{\text{ح}_{٠}(1-\text{ح}_{1})}\right]$$

حيث $\beta(\text{ح})$ هى دالة منحنى مميز الفاعلية للعينة التتابعية** ويلاحظ أن :

$$\beta(\text{ح}) = \begin{cases} 1 & \text{اذا كانت ح = صفر} \\ 1-\alpha & \text{اذا كانت ح} = \text{ح}_{٠} \\ \beta & \text{اذا كانت ح} = \text{ح}_{1} \\ ٠ & \text{اذا كانت ح = ١} \end{cases}$$

وبالتالى فان :

$$\text{توقع}(\text{ن}) = \begin{cases} \text{لو ب} \div \text{لو}\,\dfrac{1-\text{ح}_{1}}{1-\text{ح}_{٠}} & \text{اذا كانت ح = ٠} \\ \left[\alpha\,\text{لو أ} + (1-\alpha)\,\text{لو ب}\right] \div \left[\text{لو}\,\dfrac{1-\text{ح}_{1}}{1-\text{ح}_{٠}} + \text{ح}_{٠}\,\text{لو}\,\dfrac{\text{ح}_{1}(1-\text{ح}_{٠})}{\text{ح}_{٠}(1-\text{ح}_{1})}\right] & \text{اذا كانت ح} = \text{ح}_{٠} \\ \left[(1-\beta)\,\text{لو أ} + \beta\,\text{لو ب}\right] \div \left[\text{لو}\,\dfrac{1-\text{ح}_{1}}{1-\text{ح}_{٠}} + \text{ح}_{1}\,\text{لو}\,\dfrac{\text{ح}_{1}(1-\text{ح}_{٠})}{\text{ح}_{٠}(1-\text{ح}_{1})}\right] & \text{اذا كانت ح} = \text{ح}_{1} \\ \text{لو أ} \div \text{لو}\,\dfrac{\text{ح}_{1}}{\text{ح}_{٠}} & \text{اذا كانت ح = ١} \end{cases}$$

---

* فى هذه الحالة يمكن التعبير عن المتغير ص كما يلى :

$$\text{ص} = \text{لو}\,\frac{\text{ح}_{1}^{\text{س}}\,(1-\text{ح}_{1})^{1-\text{س}}}{\text{ح}_{٠}^{\text{س}}\,(1-\text{ح}_{٠})^{1-\text{س}}} = \text{لو}\,\frac{1-\text{ح}_{1}}{1-\text{ح}_{٠}} + \text{س}\ \text{لو}\,\frac{\text{ح}_{1}(1-\text{ح}_{٠})}{\text{ح}_{٠}(1-\text{ح}_{1})}$$

حيث $\text{س} = \begin{cases} 1 & \text{اذا كانت الوحدة معيبة} \\ ٠ & \text{اذا كانت الوحدة جيدة} \end{cases}$ ، أى أن توقع (س) = ح

وبالتالى فان : $\text{توقع}(\text{ص}) = \text{لو}\,\dfrac{1-\text{ح}_{1}}{1-\text{ح}_{٠}} + \text{ح}\ \text{لو}\,\dfrac{\text{ح}_{1}(1-\text{ح}_{٠})}{\text{ح}_{٠}(1-\text{ح}_{1})}$

** لايجاد الدالة $\beta(\text{ح})$ انظر مرجع رقم (٥)

الجــــــداول

جدول رقم (١)

المعاملات المستخدمه فى لوحات ضبط الوسط الحسابى والانحراف المعيارى

حجم العينة	لوحة ضبط الوسط الحسابى			لوحة ضبط الانحراف المعيارى				
ن	أ	أ١	أ٢	ح٢	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
٢	٢ر١٢١	٣ر٧٦٠	١ر٨٨٠	٠ر٥٦٤	٠	١ر٨٤٣	٠	٣ر٢٦٧
٣	١ر٧٣٢	٢ر٣٩٤	١ر٠٢٣	٠ر٧٢٤	٠	١ر٨٥٨	٠	٢ر٥٦٨
٤	١ر٥٠٠	١ر٨٨٠	٠ر٧٢٩	٠ر٧٩٨	٠	١ر٨٠٨	٠	٢ر٢٦٦
٥	١ر٣٤٢	١ر٥٩٦	٠ر٥٧٧	٠ر٨٤١	٠	١ر٧٥٦	٠	٢ر٠٨٩
٦	١ر٢٢٥	١ر٤١٠	٠ر٤٨٣	٠ر٨٦٩	٠ر٠٢٦	١ر٧١١	٠ر٠٣٠	١ر٩٧٠
٧	١ر١٣٤	١ر٢٧٧	٠ر٤١٩	٠ر٨٨٨	٠ر١٠٥	١ر٦٧٢	٠ر١١٨	١ر٨٨٢
٨	١ر٠٦١	١ر١٧٥	٠ر٣٧٣	٠ر٩٠٣	٠ر١٦٧	١ر٦٣٨	٠ر١٨٥	١ر٨١٥
٩	١ر٠٠٠	١ر٠٩٤	٠ر٣٣٧	٠ر٩١٤	٠ر٢١٩	١ر٦٠٩	٠ر٢٣٩	١ر٧٦١
١٠	٠ر٩٤٩	١ر٠٢٨	٠ر٣٠٨	٠ر٩٢٣	٠ر٢٦٢	١ر٥٨٤	٠ر٢٨٤	١ر٧١٦
١١	٠ر٩٠٥	٠ر٩٧٣	٠ر٢٨٥	٠ر٩٣٠	٠ر٢٩٩	١ر٥٦١	٠ر٣٢١	١ر٦٧٩
١٢	٠ر٨٦٦	٠ر٩٢٥	٠ر٢٦٦	٠ر٩٣٦	٠ر٣٣١	١ر٥٤١	٠ر٣٥٤	١ر٦٤٦
١٣	٠ر٨٣٢	٠ر٨٨٤	٠ر٢٤٩	٠ر٩٤١	٠ر٣٥٩	١ر٥٢٣	٠ر٣٨٢	١ر٦١٨
١٤	٠ر٨٠٢	٠ر٨٤٨	٠ر٢٣٥	٠ر٩٤٥	٠ر٣٨٤	١ر٥٠٧	٠ر٤٠٦	١ر٥٩٤
١٥	٠ر٧٧٥	٠ر٨١٦	٠ر٢٢٣	٠ر٩٤٩	٠ر٤٠٦	١ر٤٩٢	٠ر٤٢٨	١ر٥٧٢
١٦	٠ر٧٥٠	٠ر٧٨٨	٠ر٢١٢	٠ر٩٥٢	٠ر٤٢٧	١ر٤٧٨	٠ر٤٤٨	١ر٥٥٢
١٧	٠ر٧٢٨	٠ر٧٦٢	٠ر٢٠٣	٠ر٩٥٥	٠ر٤٤٥	١ر٤٦٥	٠ر٤٦٦	١ر٥٣٤
١٨	٠ر٧٠٧	٠ر٧٣٨	٠ر١٩٤	٠ر٩٥٨	٠ر٤٦١	١ر٤٥٤	٠ر٤٨٢	١ر٥١٨
١٩	٠ر٦٨٨	٠ر٧١٧	٠ر١٨٧	٠ر٩٦٠	٠ر٤٧٧	١ر٤٤٣	٠ر٤٩٧	١ر٥٠٣
٢٠	٠ر٦٧١	٠ر٦٩٧	٠ر١٨٠	...٠ر٩٦٢	٠ر٤٩١	١ر٤٣٣	٠ر٥١٠	١ر٤٩٠
٢١	٠ر٦٥٥	٠ر٦٧٩	٠ر١٧٣	٠ر٩٦٤	٠ر٥٠٤	١ر٤٢٤	٠ر٥٢٣	١ر٤٧٧
٢٢	٠ر٦٤٠	٠ر٦٦٢	٠ر١٦٧	٠ر٩٦٦	٠ر٥١٦	١ر٤١٥	٠ر٥٣٤	١ر٤٦٦
٢٣	٠ر٦٢٦	٠ر٦٤٧	٠ر١٦٢	٠ر٩٦٧	٠ر٥٢٧	١ر٤٠٧	٠ر٥٤٥	١ر٤٥٥
٢٤	٠ر٦١٢	٠ر٦٣٢	٠ر١٥٧	٠ر٩٦٨	٠ر٥٣٨	١ر٣٩٩	٠ر٥٥٥	١ر٤٤٥
٢٥	٠ر٦٠٠	٠ر٦١٩	٠ر١٥٣	٠ر٩٧٠	٠ر٥٤٨	١ر٣٩٢	٠ر٥٦٥	١ر٤٣٥
اكبر من ٢٥	$\frac{٣}{\sqrt{\text{ن}}}$	$\frac{٣}{\sqrt{\text{ن}}}$	....	....	$١ - \frac{١}{\sqrt{٢\text{ن}}}$	$١ + \frac{٣}{\sqrt{٢\text{ن}}}$	$١ - \frac{٣}{\sqrt{٢\text{ن}}}$	$١ + \frac{١}{\sqrt{٢\text{ن}}}$

تابع جدول رقم (١)

التعاريف المستخدمه :

$$\text{أ} = \frac{٣}{\sqrt{\text{ن}}} \qquad \text{أ}_{١} = \frac{٣}{\text{حـ}_{٢}\sqrt{\text{ن}}} \qquad \text{أ}_{٢} = \frac{٣}{\text{د}_{٢}\sqrt{\text{ن}}}$$

$$\text{حـ}_{٢} = \sqrt{\frac{٢}{\text{ن}}} \;\; \frac{\Gamma\left(\frac{\text{ن}}{٢}\right)}{\Gamma\left(\frac{\text{ن}-١}{٢}\right)}$$

$\text{د}_{٢}$ هى الوسط الحسابى للمتغير العشوائى و (و = $\frac{\text{ى}}{\text{ع}'}$ أى المدى النسبى)

$$\text{ب}_{١} = \text{حـ}_{٢} - ٣\sqrt{\frac{\text{ن}-١}{\text{ن}} - \text{حـ}_{٢}^{٢}} \qquad \text{ب}_{٢} = \text{حـ}_{٢} + ٣\sqrt{\frac{\text{ن}-١}{\text{ن}} - \text{حـ}_{٢}^{٢}}$$

$$\text{ب}_{٣} = ١ - \frac{٣}{\text{حـ}_{٢}}\sqrt{\frac{\text{ن}-١}{\text{ن}} - \text{حـ}_{٢}^{٢}} \qquad \text{ب}_{٤} = ١ + \frac{٣}{\text{حـ}_{٢}}\sqrt{\frac{\text{ن}-١}{\text{ن}} - \text{حـ}_{٢}^{٢}}$$

أولا : لوحة ضبط الوسط الحسابى

(١) اذا كانت $\text{س}'$ ، $\text{ع}'$ معلومتان فان :

خط الوسط هو $\text{س}'$ ، حدى الضبط هما $\text{س}' \pm \text{أ}\,\text{ع}'$

(٢) اذا كانت $\text{س}'$ ، $\text{ع}'$ مجهولتان فان :

خط الوسط هو $\bar{\bar{\text{س}}}$ ، حدى الضبط هما $\bar{\bar{\text{س}}} \pm \text{أ}_{١}\,\bar{\text{ع}}$

أو $\bar{\bar{\text{س}}} \pm \text{أ}_{٢}\,\bar{\text{ى}}$

ثانيا : لوحة ضبط الانحراف المعيارى

(١) اذا كانت $\text{ع}'$ معلومة فان :

خط الوسط هو $\text{حـ}_{٢}\,\text{ع}'$ ، حدى الضبط هما : $\text{ب}_{١}\,\text{ع}'$ ، $\text{ب}_{٢}\,\text{ع}'$

(٢) اذا كانت $\text{ع}'$ مجهولة فان :

خط الوسط هو $\bar{\text{ع}}$ ، حدى الضبط هما : $\text{ب}_{٣}\,\bar{\text{ع}}$ ، $\text{ب}_{٤}\,\bar{\text{ع}}$

جدول رقم (٢)

المعاملات المستخدمه فى لوحات ضبط المدى

حجم العينة ن	ك ٢	ك ٣	د ١	د ٢	د ٣	د ٤
٢	١ر١٢٨	٠ر٨٥٣	٠	٣ر٦٨٦	٠	٣ر٢٦٧
٣	١ر٦٩٣	٠ر٨٨٨	٠	٤ر٣٥٨	٠	٢ر٥٧٥
٤	٢ر٠٥٩	٠ر٨٨٠	٠	٤ر٦٩٨	٠	٢ر٢٨٢
٥	٢ر٣٢٦	٠ر٨٦٤	٠	٤ر٩١٨	٠	٢ر١١٥
٦	٢ر٥٣٤	٠ر٨٤٨	٠	٥ر٠٧٨	٠	٢ر٠٠٤
٧	٢ر٧٠٤	٠ر٨٣٣	٠ر٢٠٥	٥ر٢٠٣	٠ر٠٧٦	١ر٩٢٤
٨	٢ر٨٤٧	٠ر٨٢٠	٠ر٣٨٧	٥ر٣٠٧	٠ر١٣٦	١ر٨٦٤
٩	٢ر٩٧٠	٠ر٨٠٨	٠ر٥٤٦	٥ر٣٩٤	٠ر١٨٤	١ر٨١٦
١٠	٣ر٠٧٨	٠ر٧٩٧	٠ر٦٨٧	٥ر٤٦٩	٠ر٢٢٣	١ر٧٧٧
١١	٣ر١٧٣	٠ر٧٨٧	٠ر٨١٢	٥ر٥٣٤	٠ر٢٥٦	١ر٧٤٤
١٢	٣ر٢٥٨	٠ر٧٧٨	٠ر٩٢٤	٥ر٥٩٢	٠ر٢٨٤	١ر٧١٦
١٣	٣ر٣٣٦	٠ر٧٧٠	١ر٠٢٦	٥ر٦٤٦	٠ر٣٠٨	١ر٦٩٢
١٤	٣ر٤٠٧	٠ر٧٦٢	١ر١٢١	٥ر٦٩٣	٠ر٣٢٩	١ر٦٧١
١٥	٣ر٤٧٢	٠ر٧٥٥	١ر٢٠٧	٥ر٧٣٧	٠ر٣٤٨	١ر٦٥٢
١٦	٣ر٥٣٢	٠ر٧٤٩	١ر٢٨٥	٥ر٧٧٩	٠ر٣٦٤	١ر٦٣٦
١٧	٣ر٥٨٨	٠ر٧٤٣	١ر٣٥٩	٥ر٨١٧	٠ر٣٧٩	١ر٦٢١
١٨	٣ر٦٤٠	٠ر٧٣٨	١ر٤٢٦	٥ر٨٥٤	٠ر٣٩٢	١ر٦٠٨
١٩	٣ر٦٨٩	٠ر٧٣٣	١ر٤٩٠	٥ر٨٨٨	٠ر٤٠٤	١ر٥٩٦
٢٠	٣ر٧٣٥	٠ر٧٢٩	١ر٥٤٨	٥ر٩٢٢	٠ر٤١٤	١ر٥٨٦
٢١	٣ر٧٧٨	٠ر٧٢٤	١ر٦٠٦	٥ر٩٥٠	٠ر٤٢٥	١ر٥٧٥
٢٢	٣ر٨١٩	٠ر٧٢٠	١ر٦٥٩	٥ر٩٧٩	٠ر٤٣٤	١ر٥٦٦
٢٣	٣ر٨٥٨	٠ر٧١٦	١ر٧١٠	٦ر٠٠٦	٠ر٤٤٣	١ر٥٥٧
٢٤	٣ر٨٩٥	٠ر٧١٢	١ر٧٥٩	٦ر٠٣١	٠ر٤٥٢	١ر٥٤٨
٢٥	٣ر٩٣١	٠ر٧٠٩	١ر٨٠٤	٦ر٠٥٨	٠ر٤٥٩	١ر٥٤١

تابع جدول رقم (٢)

التعاريف المستخدمه :

$\text{ك}_{٢}$ الوسط الحسابى للمتغير العشوائى و

$\text{ك}_{٣}$ الانحراف المعيارى للمتغير العشوائى و

($\text{و} = \dfrac{\bar{\text{ى}}}{\text{ع}'}$ أى أنها المدى النسبى)

$\text{د}_{١} = \text{ك}_{٢} - ٣\,\text{ك}_{٣}$ ، $\text{د}_{٢} = \text{ك}_{٢} + ٣\,\text{ك}_{٣}$

$\text{د}_{٣} = ١ - ٣\,\dfrac{\text{ك}_{٣}}{\text{ك}_{٢}}$ ، $\text{د}_{٤} = ١ + ٣\,\dfrac{\text{ك}_{٣}}{\text{ك}_{٢}}$

لوحة ضبط المدى :

(١) اذا كانت $\text{ع}'$ معلومة :

خط الوسط هو $\text{ك}_{٢}\,\text{ع}'$ ، حدى الضبط هما $\text{د}_{١}\,\text{ع}'$ ، $\text{د}_{٢}\,\text{ع}'$

(٢) اذا كانت $\text{ع}'$ مجهولة :

خط الوسط هو $\bar{\text{ى}}$ ، حدى الضبط هما $\text{د}_{٣}\,\bar{\text{ى}}$ ، $\text{د}_{٤}\,\bar{\text{ى}}$

جدول رقم (٣)

جدول لايجاد قيم $و'$ التى تحقق العلاقة : احتمال $\{و \leq و'\} = ح$

حيث $و = \frac{ى}{ع'}$ هى المدى النسبى

(بفرض أن العينات مسحوبة من مجتمع معتاد)

ح / حجم العينة ن	٠ر٠٠١	٠ر٠٠٥	٠ر٠١٠	٠ر٠٢٥	٠ر٠٥٠	٠ر٩٥٠	٠ر٩٧٥	٠ر٩٩٠	٠ر٩٩٥	٠ر٩٩٩
٢	٠ر٠٠	٠ر٠١	٠ر٠٢	٠ر٠٤	٠ر٠٩	٢ر٧٧	٣ر١٧	٣ر٦٤	٣ر٩٧	٤ر٦٥
٣	٠ر٠٦	٠ر١٣	٠ر١٩	٠ر٣٠	٠ر٤٣	٣ر٣١	٣ر٦٨	٤ر١٢	٤ر٤٢	٥ر٠٦
٤	٠ر٢٠	٠ر٣٤	٠ر٤٣	٠ر٥٩	٠ر٧٦	٣ر٦٣	٣ر٩٨	٤ر٤٠	٤ر٦٩	٥ر٣١
٥	٠ر٣٧	٠ر٥٥	٠ر٦٦	٠ر٨٥	١ر٠٣	٣ر٨٦	٤ر٢٠	٤ر٦٠	٤ر٨٩	٥ر٤٨
٦	٠ر٥٤	٠ر٧٥	٠ر٨٧	١ر٠٦	١ر٢٥	٤ر٠٣	٤ر٣٦	٤ر٧٦	٥ر٠٣	٥ر٦٢
٧	٠ر٦٩	٠ر٩٢	١ر٠٥	١ر٢٥	١ر٤٤	٤ر١٧	٤ر٤٩	٤ر٨٨	٥ر١٥	٥ر٧٣
٨	٠ر٨٣	١ر٠٨	١ر٢٠	١ر٤١	١ر٦٠	٤ر٢٩	٤ر٦١	٤ر٩٩	٥ر٢٦	٥ر٨٢
٩	٠ر٩٦	١ر٢١	١ر٣٤	١ر٥٥	١ر٧٤	٤ر٣٩	٤ر٧٠	٥ر٠٨	٥ر٣٤	٥ر٩٠
١٠	١ر٠٨	١ر٣٣	١ر٤٧	١ر٧٦	١ر٨٦	٤ر٤٧	٤ر٧٩	٥ر١٦	٥ر٤٢	٥ر٩٧
١١	١ر٢٠	١ر٤٥	١ر٥٨	١ر٧٨	١ر٩٧	٤ر٥٥	٤ر٨٦	٥ر٢٣	٥ر٤٩	٦ر٠٤
١٢	١ر٣٠	١ر٥٥	١ر٦٨	١ر٨٨	٢ر٠٧	٤ر٦٢	٤ر٩٢	٥ر٢٩	٥ر٥٤	٦ر٠٩

المراجــــــــــع

1. Burr, I.W., "Engineering Statistics and Quality Control" Mc Graw Hill Book Company, Inc., New York, 1953.

2. Duncan, A.J., "Quality Control and Industrial Statistics", Richard D. Irwin, Inc., Homewood, Illinois, 1959.

3. Grant, E.L., "Statistical Quality Control", Mc Graw Hill Book Company, Inc., New York, 1952.

4. Hald, A., "Statistical Theory with Engineering Applications", New York., John Wiley and Sons, Inc., London, 1962.

5. Mood, A.M., "Introduction to the theory of statistics", McGraw Hill Book company, Inc., New York, 1950.