د. محمود [illegible]
مركز [illegible]

الجمهورية العربية المتحدة

التخطيط القومي

معهد التخطيط القومي

مذكرة رقم (٨٨٢)

نظرية الصفوف وتطبيقاتها

اعداد

الدكتور / يوسف نصر الدين محمد

مايو سنة ١٩٦٩

القاهرة
٣ شارع محمد مظهر - بالزمالك

الآراء التي وردت في هذه المذكـــــــــــــرة
تمثل رأي الكاتب ولاتمثل رأي المعهد ذاتـــــــــــــه

: نظرية الصفوف وتطبيقاتها :

مقدمة :

يقصد بنظرية الصفوف الوصول التتابعي لطلبات يراد خدمتها ٠ فاذا كان معدل تأدية الخدمة أقل من معدل وصول الطلبات فان على بعض هذه الطلبات ان تنظرلتأدية الخدمة لهما مكونة صف أمامأجهزة الخدمة ٠

الهدف من النظرية هو دراسة الخدمات الجماهيرية دراسة عملية وتوجيهها الى صالح المجموعة التى تتطلب هذه الخدمة ٠

مجالات تطبيق نظرية الصفوف كثيرة ومتعددة منها مثلا الخدمة التى يقوم بها البائع فى المحال التجارية والموظف فى شباك بيع تذاكرالسينما او المسرح او السكك الحديدية ٠ وكذلك الخدمات التى تقدمها مراكز اصلاح الاجهزة الكهربية والسيارات ٠الى جانب خدمات التليفون والتلغراف ومراكز الاسعاف والمستشفيات ٠ وأيضا الى جانب الخدمة فى الموانى البحرية والجوية كما ان لها تطبيقات فى مجال الصناعة والزراعة والمجال العربى ٠

من الطبيعى ان يتساءل فى كل هذه المجالات عن كمية الخدمة وكيفية ادائها ومعرفة ما سيتحقق منها وهل هى تتلاءم وظروفنا ؟

عند دراسة مشكلة خدمة نظرية الصفوف فاننا نستدل على حلها بمؤشرات مختلفة منها — طول صف الانتظار — متوسط فترة الانتظار — احتمال رفض الخدمة (او قد ترفض الخدمة لسبب ما) وهذه المؤشرات دون شك لها اهميتها القصوى كما انها تعتمد على كثيرمن العوامل فمثلا طول الصف على شباك صرف تذاكر القطار يعتمد على كثير من العوامل منها خبرة الشخص الذى يقوم بصرف التذاكر كما يعتمد ايضا على حالته النفسية وعلى طريقة الحديث بالنسبة الى الشخص المسافر ٠

كما يعتمد ايضا على الجهة واقبالها على العدد المتوجه اليها ٠ وواضح ان بعض العوامل تكون اساسية اى انها تؤثر على طول الصف مباشرة وبعضها يكون تأثيره ثانويا ويمكن اهماله ونرى فى هذا المثال من اهم العوامل التى تؤثر على طول الصف هى عدد المسافرين وسرعة تلبية الطلب وتوزيع اماكن صرف التذاكر بالنسبة الى القطارات المختلفة ٠ ونرى انه لوامكننا

تحسين عملية سرعة تلبية الطلب (ولو انها لحدود معينة) فانه لا يمكن معرفة عدد المسافرين لانه كمية عشوائية ولذا فلا يمكن التأثير على هذا العامل ويبقى امامنا طريق واحد هو تغيير نظام الخدمة وذلك يجعل كل موظف يقوم بصرف تذاكر قطار واحد فقط ولذا فاننا نتوقع أن أى مسافر مهما كانت وجهته لانتظر فى الصف اكثر من اى شخص فى نفس صف الانتظار. ومن الامثلة الاخرى فى — فى مراكز خدمة اصلاح السيارات نرى ان هناك اهمية كبرى لمعرفة كمية التصليح كما انه لا يقل عنها اهمية هو تنظيم عملية الخدمة داخل مراكز التصليح فمثلا يجب معرفة عدد العمال الذين يقومون بكمية التصليح وما لديهم من اجهزة وأدوات ونوعها فلو كانت هذه العوامل قليلة لنتج عن ذلك صف من السيارات المتعطلة فلو كان التصليح على مستوى المحافظة او الجمهورية لادى ذلك الى خسارة كبيرة . وقد تكون السيارات المتعطلة تكلف اكثر من التوسع فى مركز الخدمة ولكن ليس من المعقول ان يكون هذا التوسع بدون حدود بل يجب ان يكون المقصود منه هو تقليل فترة انتظار الخدمة دون ان يكون هناك عمالا أو أدوات اكثر من اللازم ولكن كيف يكون ذلك ؟ هناك طريقتان :

<u>الطريقة الاولى</u> : أن يبدأ مركز الخدمة بعامل واحد فقط وبعض الادوات فاذا وجدنا ان كمية العمل تفوق طاقته جعلنا من مساعدة وهو عامل آخر. فاذا وجدنا ان العمل يفوق طاقتهما نلجأ الى اضافة عامل آخر وهكذا الى أن نصل الى عدد العمال والادوات كاف بكافة مركز الخدمة . ولو ان تلك الطريقة تكلفنا وقتا كثيرا حتى نصل الى نقطة الكفاية .

<u>والطريقة الثانية : استخدام نظرية الصفوف</u> : أمكن التوصل الى نتائج حسنة دون الحاجة الى اجراء التجارب كما فى الطريقة الاولى ويمكن صياغة المشكلة السابقة فى صورة نموذج من نماذج نظرية الصفوف على الوجه التالى :

عندما تتعطل سيارة عن العمل فانه يستوجب تصليحها ولذا فانها تتوجه الى مركز الخدمة التى بها عدد معين من العمال فيقوم احد العمال بالتصليح فعند ظهور سيارة أخرى متعطلة يقوم عامل آخر بتصليح السيارة الثانية المتعطلة فاذا حدث ان تعطلت سيارة وكان جميع العمال مشغولين فى خدمة سيارات سبقت هذه السيارة فانه يجب عليها ان تقف فى انتظار التصليح طالما كان كل العمال مشغولين فى الخدمة .

وهنا نتساءل عن العدد اللازم من العمال حتى نجعل وقت الانتظار اقل ما يمكن (ربما يقول قائق أن يجب أن نتوسع فى عدد العمال ولكنه خطأ من الوجهة الاقتصادية وغير ممكن من الناحية العملية) ٠

يطلق على العامل الواحد او الجهاز الواحد الذى يقوم بخدمة معينة واحدة بمجموعة الخدمة ذات القناة الواحدة ٠ اما عندما يكون عدد العمال أو الاجهزة أكثر من واحد فان المجموعة فى هذه الحالة تسمى بمجموعة الخدمة ذات القنوات المتعددة وفى حالة تساوى هذه القنوات أو الاجهزة فى الصفات فاننا نطلق عليها القنوات المتكافئة او المتساوية الصفات فى الخدمة ومن أبسط الامثلة فى صالون الحلاقة يوجد به عدد معين من العمال الذين لو اسند لكل منهم العمل (مثل حلاقة الذقن أو الشعر) لا مكن أن يقوم به ويقال عنهم انهم متساوون فى الصفات ٠

والنماذج الرئيسية فى نظرية الصفوف هى :

(١) نموذج رفض الخدمة ٠ *

(٢) نموذج لانتظار الخدمة ٠ *

الا انه نتيجة لنظام الخدمة المتبع فانه يوجد انواع عديدة من نظم الخدمة منها :

(١) عند وصول اى طلب للخدمة يتوجه الى الجهاز الغير مشغول وفى حالة ما اذا كانت جميع الاجهزة مشغولة فان الطلب ترفض خدمته ومن امثلة ذلك خدمة المكالمات التليفونية وعدد التذاكر على شباك السينما والمسرح ٠

(٢) قد تكون اجهزة الخدمة ذات ارقام خاصة فعند وصول اى طلب فانه يتوجه الى الجهاز الذى يليه فان وجده مشغولا فى خدمة طلب سبقه فانه يتوجه الى الجهاز الذى يليه وهكذا ٠ وعلى ذلك فان اى طلب جديد يخدمه فقط اقل رقم من أرقام الاجهزة الغير مشغولة من الاجهزة التى لها ارقام مثال ذلك فى التليفونات الاتوماتيكية ٠

(٣) عند وصول اى طلب للخدمة يتوجه الى اى جهاز من الاجهزة الغير مشغولة وفى حالة ما اذا كانت جميع الاجهزة مشغولة فانه يأخذ دوره فى صف انتظار الخدمة وبمجرد خلو أى جهاز يتوجه اليه الطلب الذى دوره فى الخدمة (النظام المتبع فى هذه الحالة " من وصل الى جهاز الخدمة اولا يخدم اولا ") ومن امثلة ذلك صف المسافرين امام شباك التذاكر والخدمة فى الموانى البحرية والجوية ٠

* سنقوم بشرحها فيما بعد ٠

(٤) قد يكون الانتظار مرتبط بعدد معين من الطلبات الممكن تأدية خدمته وبعد هذا العدد فان الطلب الجديد يترك جهاز الخدمة مباشرة ولا ينتظر الخدمة اما العدد المحدود هذا فننظر حتى تؤدى خدمته أى أن شرط الانتظار هو ان العدد اللازم وجوده فى صف الانتظار لا يتعدى عدد معين • ومن امثلة ذلك نرى ان لكل مركز خدمة طاقة محدودة بعدد معين من الطلبات بعده ترفض خدمة اى طلب جديد كلما كان لدى المركز عدد من الطلبات يساوى طاقته •

(٥) قد يكون وقت الانتظار محدود اى مرتبط بوقت معين بعده يترك الطلب جهاز الخدمة سواء أديت الخدمة أم لم تؤد ومثال ذلك المسافر الذى سينتظر لمدة ساعة مثلا فى محطة بها مركز للخدمات به عمال يقومون بالخدمة وامام هؤلاء العمال عدد من المنتظرين فان اى مسافر يريد خدمة ما فان يقف فى صف الانتظار مع المنتظرين فبعد انتهاء المدة المقررة لانتظاره يترك المسافر مركز الخدمة سواء أديت الخدمة أم لم تؤد • ومن الامثلة الاخرى : مثال البضائع التى ترتبط بمدة زمنية معينة يفقد بعدها صلاحيتها ويستوجب بعد ذلك اعدامها فلو اعتبرنا ان البضائع يقوم مقام الشخص المراد خدمته بينما يلعب دور مركز الخدمة هو محل البقالة الذى يقوم العمال فيها ببيع البضاعة ويجب عليه ان يقوم بالبيع خلال الفترة المرتبطة بها صلاحية البضاعة •

(٦) قد تكون فى الخدمة مفاضلة بين الطلبات اى تفضل نوع على آخر عند اجراء الخدمة لعدة انواع مختلفة من الطلبات المراد خدمتها • فمثلا يوجد نوعين من التلغرافات العادى والمستعجل فلو انه وصل تلغراف مستعجل اثناء ارسال تلغراف عادى فسيبدأ المختص فورا بالتلغراف المستعجل الوارد اليه فى هذه اللحظة ويأخذ التلغراف العادى دوره فى انتظار الانتهاء من مناولة التلغرافات المستعجلة ونرى انه هنا تتكون لدينا صفان احدهما من التلغرافات العادية والاخر من التلغرافات المستعجلة او الخدمة من الموانى البحرية اذ يفضل خدمة السفن الكبيرة اولا •

لقد لعبت نظرية الصفوف دورا كبيرا فى التخطيط على مجال الوحدة فمثلا لعبت دورا كبيرا فى مجال التخطيط الصناعي وامكن بواسطتها الوصول الى حلول موضية لمشاكله

فعند اقامة مصنع ما فان كل ما يهمنا هو طاقته الانتاجية وكيفية الوصول بها الى اقصى قيمة ممكنة ولذا فاننا نتساءل اولا ما هى طاقته الالية التى تلزم للوصول الى المستوى الانتاجى المطلوب قد يعاوننا وجود عدد من العمال يقومون بملاحظة عدد من وحدات الغزل والنسيج فاذا تعطلت وحدة من هذه الوحدات لسبب ما فان احد العمال سوف يتوجه الى الوحدة المتعطلة ويقوم بعمل اللازم لاصلاحها ويستغرق منه بعض الوقت (الذى يسمى بوقت الخدمة وهو لا يمكن تحديده مسبقا اذ انه كمية عشوائية) ماذا نصادف بان عدد الوحدات المتعطلة اكبر من عدد العمال فانه نتيجة لذلك ينشأ صف من الوحدات المتعطلة مما يؤدى الى خسارة اقتصادية ويهدد بتوقف الانتاج • وقد يبدو لنا أن كثرة عدد العمال تؤدى الى تقليل الخسارة الا ان ذلك لا يتمشى مع الوجهة الاقتصادية اذ سيرتفع بالتالى سعر المتر من القماش نتيجة لازدياد التكاليف وهنا يتساءل عما هو مطلوب منا حتى نقلل من فترة تعطل الوحدة مع الوصول الى سعر مناسب للمتر ؟

وقد يقابلنا وجود عدد n من الوحدات الاساسية وعدد m من الاحتياطى وان مدة تشغيل الوحدة كمية عشوائية فعند تعطل احدى الوحدات الاساسية واستبدالها بوحدة من الاحتياطى والقيام باصلاحها ومدة التصليح كمية عشوائية فاذا افترضنا ان عدد العمال القائمين بالتصليح هو •

وهنا يتساءل عن الطريقة المثلى فى تشغيل هذه المجموعة باكملها بما يتمشى مع الناحية الاقتصادية باستقلالها اكبر مدة ممكنة •

قد يحدث فى المجال الزراعى ان تتعطل وحدة زراعية (محراث مثلا) ويستلزم القيام باصلاحه عن طريق مركز الخدمة الموجود فى نفس مكان العمل او فى المركز الرئيسى الموجود فى مكان بعيد عن الحقل • ففى مركز الخدمة المجاور للحقل قد يكون العامل مشغولا باصلاح وحدة سبقت هذه المتعطلة وهنا تأخذ الوحدة المتعطلة دورها فى الانتظار مما قد يؤدى الى توقف العمل وما يتبع ذلك من خسارة مادية • أما المركز الرئيسى البعيد عن مكان العمل فقد يقوم باصلاح الوحدة بمجرد وصولها اليه الا أن نقل الوحدة الى المكان الرئيسى قد يكلف الكثير وهنا نتساءل عن الطريقة المثلى اتباعها فى التصليح هل من الافضل القيام بالتصليح فى مكان

العمل أم في المركز الرئيسي ؟ كما أنه يمكننا هنا توزيع اماكن الخدمة الرئيسية بحيث يمكن لنا المفاضلة في اجراء عملية التصليح هناك ٠

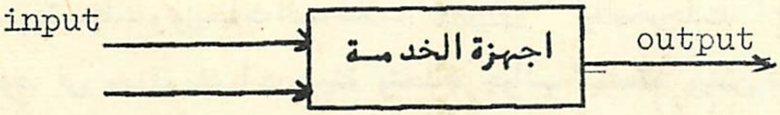
في التكنيك الحربي الحديث أعطت نظرية الخدمة الطرق المثلى عن كيفية استخدام ما لديك من اسلحة وذخيرة لالحاق اكبر خسارة ممكنة بالعدو وباقل خسارة ممكنة ٠

في مجالات الخدمة العامة : مثلا في مجال الطب حيث عدد الاسرة في المستشفى محدود والمرضى المراد علاجهم لا يمكن تحديد اعدادهم اذ انه كمية عشوائية ٠ فعندما يكون عدد المرضى اكبر من عدد الاسرة فان ذلك يتطلب ان ينتظر المرضى الزائدون في صف خارج المستشفى حتى يتم شفاء احد المرضى ويفرغ سرير ونتساءل عن الطريقة المثلى التي يجب اتباعها لنجعل من فترة الانتظار اقل ما يمكن حتى لا يؤدي طول فترة الانتظار الى مضاعفات تؤدي بحياة المريض ٠ وقد يقابلنا حالة المفاضلة في الخدمة بمعنى ان هناك من يستحق اجراء عملية له بسرعة ولا يحتمل الانتظار ٠ وهنا نتساءل عن الطريقة الواجب اتباعها لجعل فترة انتظار هذا المريض اقل ما يمكن ؟ ومن الامثلة الاخرى ٠ فان وجود عدد معين من الارصدة في اى من الموانى البحرية عند وصول سفينة الى الميناء وانشغال جميع الارصفة في تفريغ شحنات سفن سبقتها فانها تأخذ دورها في الانتظار خارج الميناء ويتبع ذلك ما تتعرض له الشركة صاحبة السفينة من خسارة نتيجة لتأخير تفريغها كما يعرض ذلك ادارة الميناء نفسها الى الغرامة نتيجة لتعطيل السفينة خارج الميناء وهنا نتساءل عن الطريقة المثلى الواجب اتباعها لتقليل الخسارة من الجانبين ونجعل المكسب دائما في صف ادارة الميناء ٠

كما ان ارتباط منتجات صناعية بفترة معينة بعدها تفقد صلاحيتها ونتساءل عن الطريقة المثلى الواجب اتباعها لكي يكون متوسط التالف من البضاعة اقل ما يمكن ومثال آخر وجود عدد محدود من الخطوط التليفونيةلكل مؤسسة أو وحدة والمطلوب تحديد عدد الخطوط اللازمة لتسيير العمل داخل المؤسسة او الوحدة الانتاجية ٠

ودراسة اى مشكلة من المشاكل السابقة بنظرية الصفوف يمكن تقسيمها الى تيار المدخلات input وأجهزة تقوم بخدمة هذا التيار وفي النهاية تيار المخرجات كما أن

تيار المخرجات يكون معتمدا على أجهزة الخدمة • والرسم التالى يوضح نموذج نظرية الصفوف :



فتيار المدخلات : عبارة عن تيار الطلبات المراد خدمتها وتكون مصحوبة بفترات زمنية بين كل طلب وآخر كما اننا نلاحظ انه من الصعب تحديد لحظات وصول الطلبات او طول الفترات بين طلب وآخر ولذا فان تيار المدخلات يعتبر متغير عشوائى يعتمد على الزمن ولذا فان من أهم الخطوات هو معرفة صفات هذا المتغير واعداد توزيع احتمالى لسلوكه من التوزيعات الكثيرة لتيار المدخلات توزيع بواسوان وهو أن احتمال وصول عدد k من الطلبات خلال فترة t هو :

$$P(X(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

حيث λ عبارة عن توقع عدد الطلبات فى وحدة الزمن •

أما تيار المخرجات : عبارة عن الطلبات التى أجريت لها أم لم تجرى لها الخدمة ومن الواضح ان لكل طلب أجريت له الخدمة قضى فترة من الوقت لتأديتها • وتسمى هذه الفترة بمدة الخدمة ومن الواضح ايضا ان طول هذه الفترة يعتمد كما عوامل كثيرة منها كمية الخدمة ونوعيتها وحالة الجهاز الذى يقوم بالخدمة فلذا فانها عبارة عن متغير عشوائى ولذا فان من الاهمية معرفة توزيعات هذه المدة اى المطلوب تعيين :

$$P(\eta < t) = G(t) \qquad t > 0$$

حيث η مدة الخدمة

وهى احتمال ان مدة الخدمة لا تتعدى مدة محدودة t

ومن التوزيعات كثيرة الاستخدام التوزيع الاسى وهو على الصورة :

$$G(t) = 1 - e^{-\mu t}$$

حيث μ تمثل متوسط مدة الخدمة •

وفيمايلى سنعالج بعض النموذج مع ذكر الامثلة بفرض ان أجهزة الخدمة متكافئة •

....

بعض النماذج الاساسية فى نظرية الصفوف :

بمعرفة صفات وتوزيعات المدخلات input والمخرجات output يمكن تطبيق نظرية الصفوف فى معرفة مؤشرات معينة وتحدد جوانب المشكلة ويمكن للمخطط منها اعطاء التوجيهات السليمة التى على أساس علمى سليم ٠

وسنتعرض هنا لذكر بعض النماذج الاساسية للخدمة مع المؤشرات التى يمكن التوصل اليها مع ذكر امثلة عددية ٠ والنماذج هى :

(١) نموذج رفض الخدمة ٠

(٢) نموذج الخدمة بعدد غير محدود من الاجهزة ٠

(٣) نموذج انتظار الخدمة وينقسم الى :

(أ) خدمة الانتظار فى حالة خدمة عدد محدود من المدخلات ٠

(ب) " " فى حالة خدمة عدد غير محدود من المدخلات ٠

(حـ) " " فى حالة عدد معين فقط من الطلبات بعد هذا العدد ترفض أى طلب آخر ٠

(٤) نموذج الخدمة بالنسبة الى ترتيب الاجهزة ٠

أولا : نموذج الرفض :

نفرض ان لدينا عدد n من أجهزة الخدمة وأن نظام الخدمة هو بمجرد وصول طلب يراد خدمته وانشغال جميع اجهزة الخدمة فى خدمة طلبات سبقت فان خدمته ترفض ٠

ونفرض أن معدل وصول الطلبات فى وحدة الزمن λ ومعدل الخدمة فى وحدة الزمن μ ونفرض أن P_k احتمال وجود عدد k من الاجهزة مشغولة كما أن P_K تحقق المعادلات التالية فى حالة الاتزان أى فى حالة

$$\lim_{t \to \infty} P_k(t) = p_K$$

حيث $P_k(t)$ احتمال وجود عدد k من الطلبات خلال الزمن

$$\therefore \quad p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_o$$

$$(\lambda + k\mu) p_k = \lambda p_{k-1} + (k+1) \mu p_{k+1}$$

$$p_n = \frac{\lambda}{n\mu} p_{n-1}$$

ومنها نجد أن

$$(1) \quad p_k = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^k}{k!} p_o \qquad (k=1, \ldots, n) \ldots.$$

حيث p_o يمكن الحصول عليها من العلاقــة

$$\sum_{k=o}^{n} p_k = 1$$

أى أن

$$(2) \quad p_o = \left[\sum_{k=o}^{n} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^k}{k!} \right]^{-1}$$

واحتمال رفض الخدمة يســاوى

$$(3) \quad p_n = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} p_o \qquad \ldots\ldots$$

والتوقع لعدد الاجهزة المشغولة يساوى

$$(4) \quad M_1 = \sum_{k=1}^{n} kp_k = \sum_{k=1}^{n} k. \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^k}{k!} \Big/ \sum_{k=o}^{n} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^k}{k!} \qquad \ldots.$$

ودرجة التحميل على الاجهزة مشغولة يساوى

$$(5) \quad \frac{M_1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^k}{(k-1)!} \Big/ \sum_{k=o}^{n} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{k!} \qquad \ldots\ldots$$

والتوقع لعدد الاجهزة الغير مشغولة يساوى

$$(6) \quad M_2 = \sum_{k=o}^{n-1} (n-k)\, p_k = \sum_{k=o}^{n-1} (n-k) \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^k}{k!} p_o \qquad \ldots\ldots$$

<u>مثال ١ :</u>

عند التخطيط لمبنى مركز رئيسى لاحدى المؤسسات العامة المطلوب تحديد عدد الخطوط التليفونية اللازمة لسير العمل بحيث لا يتعطل العمل نتيجة لعدم اتمام المكالمة فى حينها واحتمال رفض المكالمة أقل من 0.01 . واذا فرض ان متوسط عدد المكالمات فى وحدة الزمن (الدقيقــة) هما ثلاثة ومتوسط مدة المكالمة $\frac{2}{3}$ دقيقــة .

الحـــل :

نفرض ان العدد المطلوب هو n والمطلوب تحديد قيمة n التى تحقق المتباينة

$$p_n \leqslant 0{,}01$$

أى أن

$$\frac{\frac{(\frac{\lambda}{u})^n}{n!}}{\sum_{k=o}^{n} \frac{(\frac{\lambda}{u})^k}{k!}} \leqslant 0.01$$

وحيث أن

$$\frac{1}{\mu} = 2 \quad , \lambda = 3 \quad , \lambda/u = \frac{3}{2} = 1.5$$

لايجاد n التى تحقق المتباينة السابقة نفرض أن $n = 5$ ويحقق منها هل تحقق المتباينة أم لا اذا كانت تحقق المتباينة تقل قيمة n الى أن نصل الى n أما اذا لم تحقق المتباينة فاننا نكبر لقيم n ونرى أن

لقيمة $n = 5$ فان

$$(\frac{\lambda}{\mu})^5 / 5! = (5)^5 / 5! = \frac{u}{15}$$

$$\therefore \sum_{k=o}^{5} \frac{(\frac{\lambda}{u})^k}{k!} = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} =$$

$$= 1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + 2/3 + 4/15 = 7.266$$

ومنها فان

$$p_5 = 0.0367$$

أى أن $n=5$ لا تحقق المتباينة السابقة وعلى ذلك فان خمس خطوط لا تكفى حيث أن احتمال الرفض أكبر من القيمة المطلوبة ٠

نفرض أن $n=6$ وبنفس الطريقة السابقة نجد أن

$$P_6 = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{61}}{6!} / \sum_{k=o}^{6} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^k}{k!} = 0.01209$$

أى أن ستة خطوط أيضا غير كافية ٠

نفرض أن $n = 6$ ونجد فى هذه الحالة أن

$$P_7 = 0.0034$$

أى انها اقل من 0.01

وبذلك فان المؤسسة يلزمها لكى يسير العمل على اكمل وجه (احتمال الرفض 0.01) هو ان يكون عدد الخطوط على الاقل سبعة .

ولتحديد مدى استغلال كل هذه الخطوط نوجد التوقع لعدد الخطوط المشغولة ،

$$M_1 = \sum_{k=o}^{7} k\, p_k$$

ومن الجدول :

عدد الخطوط المشغولة

k	p_k/p_o	p_k	$k\, p_k$
0	1,0000	0.1355	0.0000
1	2.0000	0.2710	0.2710
2	2,0000	0.2710	0.5420
3	1.3330	0.1807	0.5421
4	0.6670	0.0903	0.3612
5	0.2670	0.0361	0.1807
6	0.0889	0.0120	0.0720
7	0.0254	0.0034	0.0238
		1.0001	2.0128

نرى أن

$$M_1 = 2.0128$$

أى انه فى المتوسط خطان من السبعة خطوط دائما مشغولين وفترة استغلال كل خط تساوى

$$\frac{M_1}{n} = \frac{2,0128}{7} = 0.2875$$

أى أن كل خط يشغل 0.2875 من فترة العمل اليومى .

مثال ٢ : قاعدة مضادة للطائرات بها عدد ثلاث أجهزة قاذفة للصواريخ يطلق كل جهاز قذيفة واحدة فقط فاذا كان متوسط وقت الانطلاق واصابة الهدف هو اربعة دقائق وكثافة الهدف (طائرات العدو) عبارة عن 0.75 أى $\lambda = 0.75$

المطلوب ايجاد احتمال اختراق مجال القاعدة .

الحل : احتمال اختراق مجال القاعدة هو احتمال رفض الخدمة (أى عدم اصابتها) وبما أن

$$\frac{\lambda}{\mu} = 3 \quad , \quad \lambda = 0.75 \quad , \quad \frac{1}{\mu} = 4 \qquad n = 3$$

$$P_3 = \frac{3^3}{3!}\, p_0$$

حيث p_0 تساوى

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!}} = 0.077$$

أى انه تقريبا 8% من الوقت يكون الاجهزة وبالتعويض عن قيمة p_0 نحصل على

$$p_3 = \frac{3^3}{3!}\; 0.077 \;=\; 0.346$$

أى أن من 1000 طائرة ممكن اصابة 654 طائرة وتخترق القاعدة عدد قدره 346 طائرة .

نلاحظ كما فى المثال السابق يمكن تحديد عدد أجهزة القذف التى ممكن لها الحاق اكبر خسارة لطائرات العدو (أى أن اصابة الهدف تساوى $1 - \varepsilon$ حيث ε كمية صغيرة) أى يوجد قيمة n التى تحقق المتباينة

$$P_n \leqslant \varepsilon$$

ثانيا : نموذج الخدمة لعدد غير محدود من الاجهزة :

فى هذا النموذج عدد اجهزة الخدمة غير محدود بمعنى ان احتمال رفض خدمة اى طلب يساوى صفرا كما أن معدل وصول الطلبات فى وحدة الزمن هو λ ومتوسط مدة الخدمة هو $\frac{1}{\mu}$ فان

احتمال وجود عدد k من الطلبات خلال الفترة t هو :

$$(1)\quad P_k(t) = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k (1-e^{-\mu t})^k\ e^{-\frac{\lambda}{u}(1-e^{-\mu t})} \quad \ldots\ldots$$

وعندما $t \to \infty$ (أى فى حالة الاتزان)

$$(2)\quad p_k = \lim_{t\to\infty} P_k(t) = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{u}\right)^k e^{-\frac{\lambda}{u}}$$

وتوقع عدد الطلبات فى الخدمة (عدد الاجهزة المسئولة) خلال الفترة t يساوى

$$(3)\quad M_1 = \frac{\lambda}{u}\,(1 - e^{-\mu t})$$

وفى حالة الاتزان عندما $t \to \infty$ فأن

$$(4)\quad M_2 = \frac{\lambda}{u}$$

مثال ١ : فى احدى الالات يوجد بها عدد كبير من العناصر ونفترض ان تعطل اى عنصر فيها يعنى تعطل الالة مما يستلزم الامر البحث عن العناصر التالف واستبداله بقطعة غيار ويستغرق ذلك فى المتوسط ساعتان اى ان $\frac{1}{\mu} = 2$ ومنها $\mu = \frac{1}{2}$

فاذا كانت قطع الغيار على نوعين احدهما رخيص الثمن ولكن تنخفض الصلاحية بالنسبة الى النوع الثانى وان من عشرة عناصر يتعطل عنصر واحد خلال ساعة بالنسبة الى النوع الثانى وان من عشرة عناصر يتعطل عنصر واحد خلال ساعة عمل اى أن $\lambda=0.1$ والنوع الاخر غالى الثمن ولكنه مرتفع الصلاحية بالنسبة للنوع الاول وان من مائة عنصر يتعطل عنصر واحد خلال ساعة عمل أى ان $\lambda_2 = 0.01$ ونفرض ان التكاليف الكلية لجميع قطع الغيار التى من النوع خلال 1000 ساعة عمل هى a وللنوع الثانى هى b وان الحساب الناجمة عن تعطل الوحدة ساعة عمل هى c

والمطلوب تحديد النظام الامثل من الناحية الاقتصادية لاستخدام قطع الغيار فترة 1000 ساعة .

الحل : نفرض ان عدد العناصر يقدر بالالاف ولذا فاننا نتوقع عدد كبير من العناصر المتعطلة وبما أن تعطل الالة يكون ناتج عن تعطل ولو عنصر واحد من عناصرها ولذا فأن

احتمال عدم تعطل الالة هو p_o أى أن

$$p_o = \begin{cases} e^{-\frac{\lambda_1}{\mu}} & \text{بالنسبة الى عناصر النوع الاول} \\ e^{-\frac{\lambda_2}{\mu}} & \text{بالنسبة الى عناصر النوع الثانى} \end{cases}$$

وبالتعويض عن قيم $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.01$, $\mu = 0{,}5$

$$p_o = \begin{cases} e^{-\frac{\lambda_1}{\mu}} = 0.819 & \text{بالنسبة الى عناصر النوع الاول} \\ e^{-\frac{\lambda_2}{\mu}} = 0.980 & \text{" " " الثانى} \end{cases}$$

أى أن نتيجة لاستخدام قطع الغيار من النوع الاول فان الالة تقف متعطلة فترة مدتها 181 ساعة من 1000 ساعة عمل .

كما ان نتيجة لاستخدام النوع الثانى من قطع الغيار فان الالة تقف متعطلة فترة مدتها 20 ساعة من 1000 ساعة .

ونرى ان الخسارة الناجمة عن استخدام قطع الغيار من النوع الاول تساوى 181 C ومن قطع الغيار من النوع الثانى تساوى C 20 ولذا فان استخدام قطع الغيار من النوع الثانى قلل الخسارة من 181 C الى 20 C أى 161 C ويفضل استخدام قطع الغيار من النوع الثانى اذا كان

$$b - a \leqslant 161 C$$

فمثلا اذا كانت $a = 100$, $b = 1000$, $C = 10$

فان

$$\frac{1000 - 100}{10} < 161$$

أى أن $90 < 161$

من هذه النتائج نرى أنه يفضل من الناحية الاقتصادية قطع الغيار من النوع الثانى وذلك على الرغم من زيادة التكاليف 900 جنيها الا انهما توفرمدة توقف قدرها 161 ساعة وقيمتها 1610 جنيها ويكون الوفر الكلى هو :

$$1610 - 900 = 710$$

جنيها

أحيانا بطلب تحديد كفاءة قطعة الغيار (العنصر) اللازمة لكى يكون احتمال عدم تعطل الالة يساوى مثلا $\varepsilon = 0.999$

أى تحديد قيمة λ من المعادلة

$$p_o = \varepsilon = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

أو

$$\lambda = -\mu \log = 0.5 \log 0,999 \approx 0.002.$$

أى انه من 1000 عنصر خلال مدة معينة يتعطل ليس أقل من عنصرين •

ثالثا : نماذج الخدمة فى حالة الانتظار

(أ) نموذج خدمة الانتظار فى حالة خدمة تيار محدود من الطلبات :

نفترض وجود عدد من الطلبات m يراد خدمته وأن اجهزة الخدمة n وكل جهاز يستطيع أن يخدم طلب واحد (فمثلا فى وحدة انتاجية يوجد عدد m من الوحدات يقوم بمراقبتها عدد n من العمال) ونفرض أن أى طلب يصل ونجد ان جميع الاجهزة مشغولة فى طلبات سبقت فانه ننتظر حتى انتهاء احد الاجهزة من خدمة الطلبات السابقة • ونظام الخدمة المتبع من وصل اولا يخدم اولا • ونفرض ان معدل وصول طلب فى زمن Δt هو $\lambda \Delta t$ وأن متوسط مدة الخدمة هو $\frac{1}{\mu}$

نفرض أن p_k- احتمال انه فى اى لحظة يوجد عدد k من الطلبات ومن السهل اثبات ان p_k تحقق المعادلات التالية :

$$m \lambda p_o = \mu p_1$$

$$(m-k) \lambda + ku \quad p_k = (m-k+1) \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu \, p_{k+1} \qquad 0 \leqslant K \leqslant n$$

$$(m-k) \lambda + n\mu \quad p_k = (m-k+1) \lambda p_{k-1} + n\mu \, p_{k+1} \qquad n \leqslant k \leqslant m$$

$$n \mu p_m = \lambda p_{m-1}$$

ومنها فان احتمالات وجود عدد k من الطلبات فى اجهزة الخدمة هو

$$(1)\qquad p_k = \begin{cases} \dfrac{m!}{k!\,(m-k)\,!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k p_o & 0 \leqslant k \leqslant n \\[2ex] \dfrac{m!}{n^{k-n}\,n!\,(m-k)!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k p_o & n \leqslant k \leqslant m \end{cases}$$

-1 واحتمال ان جميع الاجهزة غير مشغولة هو :

$$p_o = \sum_{k=o}^{n-1} \frac{m!}{k!\,(m-k)\,!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{m!\left(\frac{\lambda}{u}\right)^n}{n!}\sum_{k=n}^{m}, \frac{\left(\frac{\lambda}{nu}\right)^{k-n}}{(m-k)\,!}$$

وأن متوسط الطلبات المنتظرة فى الصف فى انتظار الخدمة يساوى

$$(3)\qquad M_1 = \sum_{k=n+1}^{m} (k-n)p_k = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{(k-n)\;m!}{n^{k-n}\;n!\,(m-k)!}\left(\frac{\lambda}{u}\right)^k p_o$$

ومتوسط مدة الوقت الذى يقضيه الطلب فى انتظار الخدمة يساوى

$$(4)\qquad \frac{M_1}{m} = \frac{1}{m}\sum_{k=n+1}^{m} (k-n)\;p_k$$

ومتوسط عدد الطلبات المراد خدمتها داخل مجموعة الخدمة تساوى

$$M_2 = \sum_{k=o}^{m} k\;p_k = \sum_{k=o}^{n} k\;p_k + \sum_{k=n+1}^{m} k\;p_k =$$

$$= \sum_{k=o}^{n} \frac{m!}{(k-1)!\,(m-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_o + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{k\quad m!}{n^{k-n}n!\,(m-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_o$$

ومتوسط عدد الاجهزة الغير مشغولة يساوى

$$(5)\qquad M_3 = \sum_{k=o}^{n-1} (n-k)p_k = \sum_{k=o}^{n-1} \frac{(n-k)\quad m!}{k!\,(m-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_o$$

ومتوسط المدة التى يكون فيها كل جهاز غير مشغول يساوى

$$(6)\qquad \frac{M_3}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=o}^{n-1} (n-k)\;p_k$$

واحتمال وجود عدد اكبر من N فى انتظار الخدمة يساوى

$$(7)\quad P_{>N} = \sum_{k=N+1}^{m} p_k = 1 - \sum_{k=o}^{N} p_k$$

حيث $n \leqslant N \leqslant m$

مثال ١ : وحدة انتاجية يوجد بها وحدات انتاجية فى احد عنابرها يوجد سبع وحدات يقوم بملاحظتهم ثلاث عمال وذلك للقيام بتصليح الوحدات المتعطلة وكل عامل يمكنه تصليح وحدة واحدة في وقت واحد فاذا كانت $\lambda = 2$ $\mu = 5$

فاوجد :

(١) متوسط عدد الوحدات المنتظرة التصليح .

(٢) متوسط فترة انتظار التصليح .

(٣) متوسط الوحدات المتعطلة

(٤) متوسط فترة التعطيل .

(٥) متوسط الفترة التى يقضيها كل عامل بدون عمل .

الحل : بما أن $m = 7$, $n = 3$, $\mu = 5$, $\lambda = 2$

بحساب الجدول التالى :

k	k-n	n-k	p_k/p_o	p_k	$(n-k)p_k$	$(k-n)p_k$	$k\ p_k$
0	0	3	1.0000	0.09913	0.26739	0	0
1	0	2	2.8000	0.24960	0.49920	0	0.24960
2	0	1	3.3600	0.24440	0.29940	0	0.59880
3	0	0	2.2400	0.19960	0	0	0.59880
4	1	0	1.1950	0.10650	0	0.10650	0.42600
5	2	0	0.4778	0.04258	0	0.08516	0.21290
6	3	0	0.1276	0.01137	0	0.03411	0.06822
7	4	0	0.0170	0.00152	0	0.00608	0.01064
			11.2147	0.9997	1.06599	0.23185	2.16496

تستطيع منه التوصل الى النتائج التالية :

$$M_1 = \sum_{k=n+1}^{m} (k-n)\ p_k = 0.23185$$

أى أن 0.2 وحدة فى المتوسط دائما فى انتظار التصليح

وأن فترة انتظار التصليح هى :

$$\gamma = \frac{0.23185}{7} = 0.03312$$

أى أن من كل مائة ساعة عمل يقضى الوحدة منها ثلاث ساعات فى انتظار التصليح ٠

كما أن متوسط عدد الوحدات المتعطلة تساوى

$$M_2 = \sum_{k=1}^{m} k\ p_k = 2.16496$$

أى انه من سبع وحدات وحدتان تقريبا فى المتوسط دائما لا تعطى انتاجا

مثال ٢ : نفرض أن متوسط مدة التصليح للوحدات الانتاجية ستة دقائق وأن بها

(أ) حالة $m = 6 \ , \ n = 1$

(ب) حالة $m = 20 \ , \ n = 3$

فاذا كان متوسط عدد الوحدات المتعطلة خلال ساعة عمل هو وحدة واحدة أوجـــد في كل حالة :

(١) متوسط عدد الوحدات المنتظرة التصليح .

(٢) متوسط فترة انتظار التصليح

(٣) متوسط الوحدات المتعطلة

(٤) متوسط فترة التعطل لكل وحدة

(٥) متوسط الفترة التي يقضيها كل عامل بدون عمل .

(٦) المقارنة بين النتائج في الحالتين

الحل : (أ) في الحالة الاولى $\frac{\lambda}{\mu} = (0.1)$, $m = 6$, $n = 1$

نجد أن

$$p_1 = \frac{6!}{1!\,(6-1)\,!}\,(0.1)^1\, p_o = 0.6\, p_o$$

$$p_k = \frac{6!}{(6-k)\ \ !}\,(0.1)^k\, p_o \qquad 2 \leqslant k \leqslant 6$$

ويستخدم العلاقة

$$\sum_{k=o}^{6} \frac{p_k}{p_o} = \frac{1}{p_o}$$

لقيم المختلفةوباستخدام الصيغ السابقة نحصل على الجدول التالي :

عدد الوحدات المتعطلة k		p_k/p_o	P_k	$(k-1)p_k$	$k\,p_k$
0	0	1.0000	0.4845	0	0
1	0	0.6000	0.2907	0	0.2907
2	1	0.3000	0.1454	0.1454	0.2908
3	2	0.1200	0.0582	0.1164	0.1746
4	3	0.0360	0.0175	0.0525	0.0700
5	4	0.0072	0.0035	0.0140	0.0175
6	5	0.0007	.0004	0.0020	0.0024

من الجدول نرى أن التوقع لعدد الوحدات المنتظرة التصليح هو :

$$M_1 = \sum_{k=2}^{6} (k-1)p_k = 0.3303$$

أى أن فى المتوسط عدد 0.33 وحدة تقف فى انتظار التصليح

كما ان متوسط فترة الانتظار تساوى

$$\frac{M_1}{6} = \frac{0.3303}{6} = 0.055$$

أى ان الوحدة من 1000 ساعة عمل تقضى تقريبا 55 فى انتظار التصليح (أى أن مجموع فترات الانتظار متوسطه هو 55 ساعة)

ومن الجدول فان التوقع لعدد الوحدات المتعطلة يساوى

$$M_2 = \sum_{k=o}^{6} k\, p_k = 0.8460$$

أى أنه يظهر فى المتوسط 0.8460 من مدة العمل اليومى وحدة واحدة لا يعطى انتاجا من الست وحدات أو أنه دائما فى المتوسط وحدة واحدة من الست وحدات لا تعطى انتاجا .

كما أن متوسط فترة التعطل يساوى

$$\frac{M_2}{6} = \frac{0.8460}{6} = 0.1410$$

اى انه من 1000 ساعة عمل يقضى الوحدة 141 ساعة متعطلة لا يعطى انتاجا منهم 55 ساعة فى انتظار التصليح ، 86 ساعة تقضيها فى التصليح .

ومتوسط عدد الاجهزة الغير مشغولة يساوى

$$M_3 = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\, p_k = p_o = 0.4845$$

ومتوسط الفترة التى يقضيها العامل بدون عمل تساوى

$$\frac{M_3}{n} = \frac{M_3}{1} = 0.4845$$

أى انه تقريبا نصف وقت العمل اليومى يكون العامل بدون عمل .

(ب) فى حالة $n = 3$, $m = 20$ فاننا بنفس الطريقة السابقة يمكن الحصول علــى الجدول التالــى :

عدد الوحدات المتعطلـة	عدد الوحدات المنتظـرة التصليـح	عدد العمال الذين بـدون عمــل	p_k	$(k-3)p_k$	$k\,p_k$
0	0	3	0.13626	–	–
1	0	2	0.27250	–	0.27250
2	0	1	0.25888	–	0.51776
3	0	0	0.15533	–	0.46599
4	1	0	0.08802	0.08802	0.35208
5	2	0	0.04694	0.09388	0.23470
6	3	0	0.02347	0.07041	0.14082
7	4	0	0.01197	0.04788	0.07665
8	5	0	0.00475	0.02375	0.03800
9	6	0	0.00190	0.01140	0.01710
10	7	0	0.00070	0.00480	0.00700
11	8	0	0.00023	0.00184	0.00253
12	9	0	0.00007	0.00063	0.00084

ونلاحظ عند حساب الجدول السابق ان لقيم $K > 12$ قيمة p_k أقل من 0.5×10^{-5} ولذا اهملنا هذه القيم .

من الجدول نرى أن

التوقع لعدد الوحدات المنتظرة التصليح يساوى

$$M_1 = \sum_{K=3}^{20} (K-3)\, p_k = 0.33863$$

أى انه فى المتوسط تقف فى انتظار التصليح 39 وحدة

كما أن المدة التى تقضيها فى انتظار التصليح تساوى

$$\frac{M_1}{20} = \frac{0.33863}{20} = 0.0163$$

أىأن الوحدة من 1000 ساعة عمل تقف فى انتظار التصليح 16 ساعة أوأن الوحدة تقف فى المتوسط 0.0163 من العمل اليومى فى انتظار التصليح •

من الجدول نرى أن :

التوقع لعدد الوحدات المتعطلة يساوى

$$M_2 = \sum_{k=1}^{20} k\, p_k = 2.12597$$

أى انه من عدد 20 وحدة نرى دائما أن وحدتان تقريبا لا تعطى انتاجا كما أن متوسط المدة التى تقضيها كل وحدة فى التعطل (الانتظار + التصليح) تساوى

$$\frac{M_1}{20} = \frac{2.12597}{20} = 0.10630$$

أى أنه من 1000 ساعة عمل تقضى الوحدة منها 106 ساعة فى حالة تعطل ، 16 ساعة منها فى انتظار التصليح والباقى 90 ساعة فى التصليح • وبمقارنة الحالتين (أ ، ب) نلاحظ انه نتيجة لزيادة 2/3 وحدة على العامل فان مدة انتظار الوحدة للتصليح قلت من 55 ساعة الى 16 ساعة اى39 ساعة أى ان انتاج الوحدة زاد بمقدار 3,9% وذلك بزيادة التحميل على العامل 2/3 وحدة كما أن مدة التعطل قلت بمقدار 36 ساعة •

وأخيرا من الجدول نرى أن :

التوقع لعدد العمال الذين بدون عمل يساوى

$$M_3 = \sum_{k=o}^{2} (3-k)p_k = 3p_o + 2p_1 + p_2 = 1.21266$$

ومتوسط المدة التى يقضيها العامل بدون عمل تساوى

$$\frac{M_3}{3} = \frac{1.21266}{3} = 0.40422$$

أى ان العامل يكون بدون عمل 0.40422 من مدة العمل اليومى • ويلاحظ انه نتيجة لاضافة 2/3 وحدة الى الجزء المقرر فى أ قل وقت فراغه بمقدار 0.08028 من مدة

العمل اليومى أى زاد انتاجه بمقدار 8 % ٠

المثال السابق يبين مدى الاستفادة من نظرية الصفوف فى تحديد الزيادة والانتاج بزيادة طفيفة فى الامكانيات المادية والالية ٠

<u>مثال ٣ :</u> نفرض ان لدينا عدد 5 من الوحدات العاملة فى مكان بعيد عن مركز الخدمة ونفرض ان مركز الخدمة يبعد مسافة d كما أنه يوجد بمكان العمل وحدة تصليح بها عامل واحد يقوم بتصليح الوحدات المتعطلة والاختلاف فى المركزين هو ان المركز الرئيسى للخدمة له القدرة على التصليح بمجرد وصول الوحدة المتعطلة اليه ونفرض ان معدل تعدل الوحدات هو $\lambda = 0.006$ وان متوسط مدة التصريح فى المكانين واحدة وتساوى 10 ساعات أى أن $\mu = 0.1$ ونفرض أن سرعة توصيل الوحدة المتعطلة الى المركز الرئيسى تساوى 40 كم / ساعة

<u>السؤال :</u> هل من الافضل من الناحية الاقتصادية القيام بتصليح الوحدة المتعطلة فى مكان العمل ام فى المركز الرئيسى ٠ وعلى اى بعد ممكن توزيع اماكن الخدمة عن اماكن العمل ٠

<u>الحل :</u> نرى انه اذا تعطلت وحدة وكان العامل يقوم بتصليح وحدة سبقت فان الوحدة المتعطلة تنتظر حتى يفرغ من اصلاح الوحدة السابقة فاذا تعطلت وحدة ثانية وثالثة فانه ينتج عن ذلك توقف الانتاج ٠ اما اذا توجهت الوحدة المتعطلة الى المركز الرئيسى للتصليح فان الوقت المفقود عبارة عن الوقت الذى يستغرقه فى توصيل الوحدة المتعطلة الى المكان الرئيسى والعودة الى مكان العمل ويساوى

$$t = \frac{2d}{V} = \frac{2d}{40} = \frac{d}{20}$$

كما ان الوقت المستغرق فى التصليح واحد فى المكانين ٠

وقرار اختبار مكان التصليح تستنتج من مقارنة الوقت الذى تقضيه الوحدة فى انتظار التصليح فى مكان العمل بالنسبة الى الوقت الذى تأخذه الوحدة فى نقلها الى المركز الرئيسى والعودة الى مكان العمل ٠ ويكون المقارنة بين الوقتين من الناحية الكمية والاقتصادية ٠

وقد يكون المقارنة من ناحية التكاليف ٠ اذ أن الخسارة الناجمة عن التصليح فى نفس مكان العمل عبارة عن الخسارة الناجمة عن الانتظار مضافا اليها تكاليف التصليح اما فى المركز

الرئيسى فان الخسارة عبارة عن تكاليف النقل مضافا اليها تكاليف التصليح ويكون اتخاذ القرار الافضل بحيث تكون التكاليف اقل ما يمكن .

بما أن

$$\frac{\lambda}{\mu} = 0.06 \quad , \quad m = 5 \quad , \quad n = 1$$

فان

$$p_1 = \frac{5!}{1!\ 4!}(0.06)\,p_o$$

$$p_k = \frac{5!}{(5-k)!}(0.06)^k\,p_o \qquad 2 \leqslant k \leqslant 5$$

كما أن

$$\sum_{k=o}^{5} \frac{p_k}{p_o} = \frac{1}{p_2}$$

من العلاقات السابقة لقيم K المختلفة يمكن وضع الجدول التالى

عدد الوحدات المتعطلة K	عدد الوحداة المنتظرة التصليح	p_k/p_o	p_k	$(k-1)p_k$
0	0	1.000000	0.721190	-
1	0	0.300000	0.216336	-
2	1	0.072000	0.0519211	0.051921
3	2	0.012960	0.009346	0.018692
4	3	0.001555	0.001121	0.003363
5	4	0.000093	0.000067	0.000268

من الجدول السابق نرى :

التوقع لعدد الوحدات المنتظرة التصليح يساوى

$$M_1 = \sum_{k=2}^{5} (k-1)\, p_k = 0.074244$$

ومتوسط المدة التى تقضيها الوحدة فى انتظار التصليح يساوى

$$\frac{M_1}{5} = 0.014848$$

أى أنه من 1000 ساعة عمل تقضى الوحدة 15 ساعة منها فى انتظار التصليح

فاذا فرض أن التصليح يجرى مرة واحدة خلال 1000 ساعة فنرى أنه من الافضل التصليح فى المركز الرئيسى اذا كان على بعد اقل من

$$d = 20.t = 20.15 = 300$$ كم

فاذا ان التصليح اجرى ثلاث مرات خلال هذه المدة فان المسافة d يجب ان يكون أقل من 100 كم وبما أن $\lambda = 0.006$ أى ان التصليح اجرى عدد ست مرات فان المسافة d يجب ان يكون اقل من 50 كم أى كلما زادت صلاحية الوحدة كلما قلت المسافة بين المركز الرئيسى ومكان العمل .

من هذا المثال يمكن توزيع امكان الخدمة فى الاماكن المناسبة من الناحية الاقتصادية .

مثال٤ : نفرض ان لحرس السواحل عدد 10 سفن مراقبة ويوجد فى الميناء حوضان للقيام بالتصليح فى حالة حدوث عطب ما فى السفينة ونفترض ان امكانية الحوض الواحد هو القيام بتصليح سفينة واحدة فى نفس الوقت وان معدل تعطل السفينة هو $\lambda = 0.02$ وان متوسط مدة تصليح السفينة المتعطلة هو شهران أى ان $\frac{1}{\mu} = 2$ أوجد :

التوقع لعدد السفن المتعطلة ؟

الحل : بما أن

$$m = 10 \quad , \quad n = 2 \quad \frac{\lambda}{\mu} = 0.04$$

واحتمال وجود عدد k من السفن المتعطلة يساوى

$$p_k = \frac{10!}{k!(10-k)!} (0.04)^k p_o \qquad k = 1,2$$

$$p_k = \frac{10!}{2^{k-2}\, 2!(10-k)!} (0.04)^k p_o \qquad 3 \leqslant k \leqslant 10$$

ونحصل على قيمة p_o من العلاقة

$$\sum_{k=o}^{10} \frac{p_k}{p_o} = \frac{1}{p_o}$$

لقيم K المختلفة نحصل على الجدول التالى :

عدد السفن المتعطلة	p_k/p_o	p_k	$k\ p_k$	$(k-2)p_k$
0	1.000000	0.673242	0.000000	--
1	0.400000	0.269297	0.269297	--
2	0.072000	0.048473	0.096946	--
3	0.011520	0.007756	0.023268	0.007756
4	0.001613	0.001086	0.004344	0.002172
5	0.000193	0.000130	0.000650	0.000390
6	0.000019	0.000013	0.000078	0.000052
7	0.000002	0.000001	0.000007	0.000005
8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
			0.394590	0.010375

من الجدول السابق نرى ان التوقع لعدد السفن المنتظرة التصليح يساوى

$$M_1 = \sum_{k=3}^{10} (k-2)p_k = 0.010373$$

اى انه من عدد العشر سفن تقريبا لا يوجد اى سفينة فى انتظار التصليح والتوقع لعدد السفن المتعطلة يساوى

$$M_2 = \sum_{K=1}^{10} k\ p_k = 0.394590$$

أى انه فى المتوسط 0.4 سفينة متعطلة من العشر سفن واحتمال وجود اكثر من سفينتين متعطلتين يساوى

$$p_o + p_1 + p_2 = 0.991074$$

وهذا الاحتمال يساوى احتمال وجود ليس اقل من ثمانية سفن سليمة .

من النتائج السابقة نرى ان وجود حوضان لعملية التصليح كثيرا .

ولذا فاننا نفرض ان $n = 1$ أى ان لدينا حوضا واحدا للقيام بعملية التصليح .

وعلى ذلك فان احتمال وجود عدد k من السفن المتعطلة هو :

$$p_1 = \frac{10\,!}{9\,!}\ (0.04)\ p_o$$

$$p_k = \frac{10!}{(10-k)!}\ (0.04)^k\ p_o \qquad 2 \leqslant K \leqslant 10$$

وان يمكن الحصول عليها من العلاقة

$$\sum_{k=o}^{10} \frac{p_k}{p_o} = \frac{1}{p_o}$$

من الصيغ السابقة ولقيم K المختلفة نحصل على الجدول التالى :

عدد السفن المتعطلة k	p_k/p_o	p_k	$k\ p_k$	$(k-1)p_k$
0	1.000000	0.622351	--	--
1	0.400000	0.248940	0.248940	--
2	0.144000	0.179236	0.358472	0.179236
3	0.046080	0.028678	0.086034	0.057356
4	0.012902	0.008029	0.032116	0.024087
5	0.003096	0.001927	0.009635	0.007708
6	0.000649	0.000385	0.002310	0.001925
7	0.000099	0.000062	0.000434	0.000372
8	0.000012	0.000007	0.000056	0.000049
9	0.000001	0.000001	0.000009	0.000008
10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
			0.558770	0.181123

من الجدول نرى أن

التوقع لعدد السفن المنتظرة التصليح يساوى

$$M_1 = \sum_{k=2}^{10} (k-1)\ p_k = 0.181137$$

أى انه من متوسط عدد السفن المنتظرة للتصليح هى تقريبا ١٨ر سفينة .

كما ان متوسط المدة التى تقضيها السفينة فى انتظار التصليح تساوى

$$\frac{M_1}{10} = \frac{0.181137}{10} = 0.0181134$$

أى ان 0.018 من طول فترة عملها تقضيها فى التصليح .

كما أن التوقع لعدد السفن المتعطلة يساوى

$$M_2 = \sum_{k=1}^{10} k\, p_k = 0.558770$$

أى انه نتيجة لتقلل عدد الاحواض من اثنتين الى واحد فان القيمة زادت بمقدار 0.16418

وذلك فان متوسط المدة التى تقضيها السفينة متعطلة تساوى

$$\frac{M_2}{10} = \frac{0.558770}{10} = 0.055877$$

أى انه 0.056 من طول فترة عملها تقضيها فى التعطل منها 0.018 فى انتظار التصليح 0.038 فى التصليح .

واحتمال وجود ليس اكثر من سفينتين متعطلتين يساوى

$$P_0 + P_1 + P_2 = 0.961909$$

أى أن الفرق بين فى الحالة الاولى والثانية ليس كبيرا .

من الجدول نوى ايضا أن :

$$P_8 = 0.623351$$

أى ان اكثر من 0.62 من الوقت يكون الحوض غير مشغول أى ان درجة التحميل عليه ليست كبيرة . وهذا يبين ان وجود حوض واحد كافى للقيام بمهمة التصليح .

... ...

(٢) ـ نموذج خدمه الانتظار فى حاله وجود تيار غير محدود من الطلبات :

فى هذا النموذج عدد الطلبات المراد خدمتها غير محدودا كما سبق نفرض ان لدينا عدد n من اجهزه الخدمه يقوم كل جهاز بخدمه طلب واحد فى وقت واحد ونفرض ان معدل وصول الطلبات هو λ ومعدل الخدمه هو μ

والطلب الذى يصل ويجد ان جميع الاجهزه مشغوله ينتظر لحين ان يفرغ جهاز من خدمه طلب سبق هذا الطلب .

نفرض ان p_k احتمال وجود k من الطلبات داخل مجموعه الخدمه فى اى لحظه نجد أن p_k تحقق المعادلات التاليه :

$$\mu p_1 = \lambda p_o$$

$$(\lambda + k\mu) p_k = \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n)$$

$$(\lambda + n\mu) p_k = \lambda p_{k-1} + n\mu p_{k+1} \qquad (k \geqslant n)$$

منهما من السهل اثبات أن

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{1}{k!} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k p_o & 1 \leqslant k \leqslant n \\ \dfrac{1}{n!\, n^{k-n}} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k p_o & k \geqslant n \end{cases} \tag{1}$$

كما أن p_o تساوى

$$p_o = \sum_{k=o}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{\mu}{(n-1)!\,(nu-\lambda)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \tag{2}$$

واحتمال ان يكون جميع الاجهزه مشغوله هو

$$\Pi = \frac{P_n}{1 - \frac{\lambda}{n\mu}} \quad \cdots\cdots \tag{3}$$

ومتوسط عدد الطلبات المنتظره فى الصف يساوى

$$M_1 = p_n \sum_{k=o}^{\infty} k\, p^k = p_n \frac{\lambda}{nu\,(1-\rho)^2} \tag{4}$$

حيث $\rho = \dfrac{\lambda}{n\mu}$

ومتوسط عدد الطلبات الموجوده داخل مجموعه الخدمه يساوى

$$(5)\qquad M_2 = M_1 + p_o \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{\lambda}{u}\right)^k + \frac{n\,p_n}{1-\rho}$$

ومتوسط عدد الاجهزه الغير مشغوله يساوى

$$(6)\qquad M_3 = \sum_{k=o}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_o$$

وقانون التوزيع لفتره الانتظار هو

$$(7)\qquad P\ B \leq t = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \Pi e^{-(n\mu-\lambda)t} & t \geq 0 \end{cases}$$

ومتوسط فتره الانتظار هى

$$(8)\qquad T_n = \frac{\Pi}{n\mu - \lambda}$$

وعندما $n = 1$ فانه يمكن اثبات ان :

$$(9)\qquad p_o = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = (1 - \rho)$$

$$(10)\qquad p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \rho^k (1 - \rho)$$

ومتوسط عدد الطلبات المنتظره فى الصف يساوى

$$(11)\qquad M_1 = p_1 \frac{\lambda}{n\mu(1-\rho)^2} = \frac{\lambda}{\mu}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

واحتمال ان يكون الجهاز مشغولا دائما هو

$$(12)\qquad \Pi = \frac{p_1}{1-\rho} = \frac{\rho(1-\rho)}{1-\rho} = \rho$$

ومتوسط عدد الطلبات التى فى مجموعه الخدمه يساوى

$$(13)\qquad M_1 = \frac{\rho^2}{1-\rho} + \frac{\rho}{1-\rho} =$$

ومتوسط فتره الانتظار يساوى

$$(14)\qquad T = \frac{\rho}{\mu-\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu}$$

<u>مثال ١ :</u> فى احد الموانى البحريه يوجد ثلاث أرصفه لعمليه افراغ وشحن السفن فاذا كان متوسط عدد السفن فى اليوم ثمانيه ومتوسط مده التفريغ والشحن نصف يوم ٠

ما هى المده التي تنتظرها السفينه حتى يتم تفريغها وشحنها ؟

وما متوسط عدد السفن المراد شحنها وتفريغها ٠ وماهدى سير العمل وهى الثلاث ارصفه كافيـه ؟

الحـل : عدد السفن المراد شحنها او تفريغها غير محدود وبما أن $\lambda = 8$ ، $\mu = 2$

كما أن $n = 3$ فان

$$\frac{\lambda}{n\mu} = \frac{8}{2.3} > 1$$

أى انه نتوقع فى هذه الحاله ان صف السفن المراد شحنها او تفريغها يزداد زياده كبيره ولذا فان اى سفينه تنتظر مده طويله حتى يتم تفريغها او شحنها كما أننا نجد ان الارصفه الثلاث دائما مشغوله ولذا فان العمل اكثر من طاقتها ويستلزم كثره عدد الارصفه ويجب الا يقل عددهم عن خمسه حيث ان فى حاله اربعه $\frac{\lambda}{n\mu} = 4$ لا تتغير الصوره السابقه ٠

عند $n = 5$ فان احتمال من لحظه وصول سفينه فان جميع الارصفه مشغوله يساوى

$$\Pi = \frac{\mu}{(n-1)!(n\mu-\lambda)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_o = \frac{2}{4!\ (2.5-8)} \left(\frac{8}{2}\right)^5 p_o = \frac{4^5}{4!} p_o$$

ولذلك فان

$$p_o = \frac{1}{\sum_{k=o}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{(n-1)!(n\mu-\lambda)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = 0.01299$$

أى ان احتمال فى لحظه وصول سفينه لتفريغها او شحنها تكون الارصفه غير مشغوله هو

$p_o = 0.01299$

واحتمال انهم جميعا مشغولين هو :

$$\Pi = \frac{4^5}{4!} p_o = 0.55424$$

أى ان الارصفه يكون مشغوله تقريبا ما يساوى نصف الوقت وقانون توزيع مده الانتظار خارج الميناء يساوى

$$P(B > t) = \Pi e^{-(n\mu-\lambda)t} = 0.55424\ e^{-2t}$$

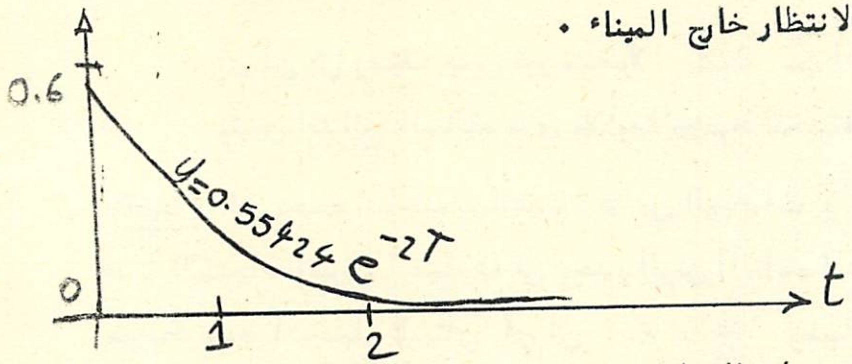
حيث B مده الانتظار خارج الميناء ٠

فمثلا احتمال سفينه وصلت تو تصل الى الرصيف بعد يوم كامل أى مده الانتظـــار

يوما تسـاوى

$$P(\beta > 1) = 0.55424\ e^{-2} \approx 0.0750$$

أى انه ليس اكثر من ثمانيه سفن من مائه مده انتظارهم خارج الميناء تتعدى يوما كامـلا والرسم التالى يبين قانون التوزيع لمده الانتظار خارج الميناء .



ونرى هنا أن عدد السفن التي مده انتظارها اكثر من يومين تقريبا يساوى صفرا ومتوسـط مده الانتظار خارج الميناء يساوى

$$T = \frac{\Pi}{n\mu - \lambda} \approx \frac{0.55424}{2.5 - 4} = 0.27712$$

أىأن متوسط مده الانتظار خارج الميناء لكل سفينه يساوى 0.27712 يوما ونـرى ان احتمال ان فتره الانتظار خارج الميناء اكبر من متوسطها يساوى

$$P(\beta > T) = \Pi\ e^{-(n\mu - \lambda)T} = 0.55424\ e^{-0.55424} = 0.3184$$

أى انه باحتمال قدره 0.6816 فان عمليه التفريغ والشحن تبدأ بعد 0.27712 من اليوم من وصولها .

ومتوسط طول صف السفن المراد تفريغها أو شحنها يساوى

$$M_1 = P_n \frac{\lambda}{n\mu(1 - \frac{\lambda}{n\mu})^2} = p_5 \frac{0.8}{(1 - \frac{8}{10})^2} = P_5 \frac{0.8}{0.04}$$

$$= 2P\ p_5$$

ولكن

$$p_5 = \frac{4^5}{5!}\ p_o = 0.1108$$

وبالتعويض فان متوسط طول صف السفن المراد تفريغها او شحنها يساوى

$$M_1 = 2.216$$

ومتوسط عدد الارصفه الغير مشغوله يساوى

$$M_3 = \sum_{k=o}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \left(\frac{\lambda}{u}\right)^k p_o \approx 1.0000$$

أى أنه فى المتوسط نجد دائما رصيفا غير مشغول والمده التى يقضيها كل رصيف غير مشغولا يساوى

$$\frac{M_3}{5} = 0.2$$

أى أن كل رصيف يكون غير مشغولا 0.2 من اليوم .

وتبين النتائج السابقه مدى ملاءمه المجموعه للخدمه .

مثال ٢: فى وحده انتاجيه بها عدد m من الوحدات لاختبار صفات المنتجات فاذا كان متوسط عدد المنتجات المراد اختبارها فى وحده الزمن (الثامنه) هو خمس قطع أى أن $\lambda = 5$ وأن متوسط مده الاختبار ثانيتان أى أن $\frac{1}{\mu} = 2$ ومنها $\mu = 0.5$

المطلوب تحديد عدد وحدات الاختبار بحيث يكون درجه التحميل على هذه الوحدات ليس اقل من قيمه معينه .

الحل : يمكن تحديد العدد اللازم من الوحدات وذلك باستخدام الشرط اللازم لضمان عدم وجود زيادة غير محدودة فى صف الاختبار أى العلاقة $n \geqslant \frac{\lambda}{\mu}$ وبما أن $\lambda=5, \mu=0.5$ فان

$$\frac{\lambda}{\mu} = 10$$

أى ان العدد اللازم من الوحدات يجب ان يكون اكثر من عشرة الا ان هذا لا يعنى ان الاختبار سوف يسير على اكمل وجه فيمكن ان يكون فترة انتظار الاختبار مدة طويلة .

نفترض ان درجة التحميل على الوحدات هى 90% أى ان احتمال أن جميع أجهزة الاختبار مشغولة اكبر من 0.9 ونفرض انها تساوى 0.9 وعلى ذلك فان

$$\Pi = 0.9$$

ونفرض ان فترة الاختبار لا تتعدى ثانية واحدة باحتمال 0.99 أى أن

$$P(B > 1) = 0.01$$

وباستخدام العلاقة التالية ممكن تحديد العدد اللازم من وحدات الاختبار

$$P\ B > t = \Pi e^{-(n\mu - \lambda)t}$$

بوضع $\Pi = 0.9$, $\mu = 0.5$, $\lambda = 5$, $t = 1$ نحصل على

$$P(B > 1) = 0.01 = 0.9\ e^{-(n\,0.5 - 5).1}$$

بأخذ اللوغاريتم نحصل على

$$\log \frac{1}{90} = 0.5n + 5$$

أى أن

$$n = 2 \quad 5 + \log 90 \approx$$
$$\approx 2.9.5 = 19$$

أى ان العدد اللازم من وحدات الاختبار ليس اقل من 19 وحدة فلذا فان عشر وحدات لا تكفى .

ففى حالة $n = 19$ فان قانون توزيع فترة انتظار الاختبار يساوى

$$P(\beta > t) = 0,9 \quad e^{-4.5t}$$

والجدول التالى يبين التوزيع لقيم t المختلفة

الزمن t مقاسا بالثانية	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$P(\beta > t)$	0.56	0.37	0.23	0.16	0.09	0.06	0.04	0.02	0.015	0.01

ونرى من الجدول ان احتمال فترة الانتظار تتعدى نصف ثانية يساوى 0.09 أى باحتمال مقدارها 0.91 فان اختبار النطق يبدأ بعد نصف ثانية من وصولها (أنتاجها) كما يمكن القول بأن من كل مائة قطعة 9 منهم فترة انتظار الاختبار يتعدى نصف ثانية كما ان باحتمال 0.99 يبدأ الاختبار بعد ثانية واحدة من وصول القطعة ومعنى آخر ان من كل مائة قطعة قطعة واحدة فترة انتظار اختبارها تتعدى الثانية .

والشكل البيانى التالى يبين مسار توزيع فترة الانتظار الاختبار

فى حالة $n = 11$

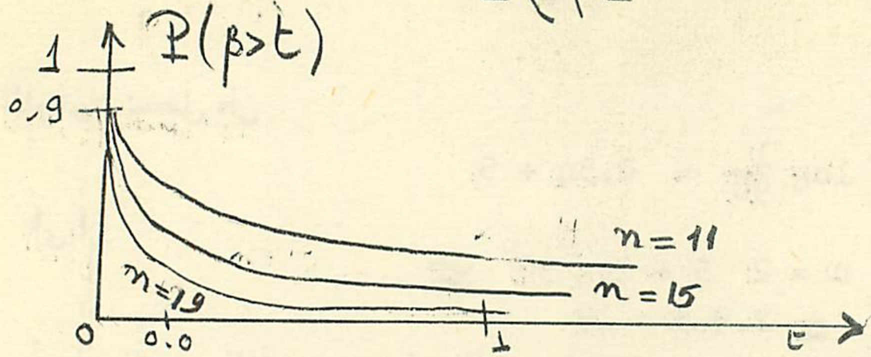
$$P(\beta > t) = 0.9 \quad e^{-0.5t}$$

فى حالة $n = 15$

$$P(\beta > t) = 0.9 \quad e^{-2.5t}$$

فى حالة $n = 19$

$$P(\beta > t) = 0.9 \quad e^{-4.5t}$$



ونرى انه فى حالة $n = 11$ فان احتمال فترة الانتظار لا تتعدى ثانية يساوى 0.45 أى أن فى المتوسط اقل بقليل من نصف المنتجات سوف يبدأ اختبارها بعد ثانية واحدة من وصولها الى اجهزة الاختبار .

اما فى حالة $n=15$ فان هذا الاحتمال يساوى 0.93 أى أن الصورة يتحسن على سابقها اذ أن من مائة قطعة سبع قطع فقط تنتظر مدة اكثر من ثانية لاختبارها من لحظة وصولها .

ومن هذا المثال يمكن تحديد الطاقة الاجمالية اللازمة للانتاج .

<u>مثال ٣ :</u> يصل الى الوحدات الحاسبة الالكترونية تيار مستمر من المعلومات ونفرض ان الوحدة مصممة بحيث انها لا يمكن أن تقبل اكثر من عملية واحدة تقوم بها . فاذا وصلت عملية وكانت الوحدة مشغولة فى زاوية عملية سبقت فانها تخزن فى مكان خاص (الحافظة) وتنتظر حتى تفرغ الوحدة من عملها السابق . ونفترض ان كل عملية تفقد قيمتها بعد دقيقتين فى لحظة وصولها اذا لم تبدأ الوحدة فى تأديتها (اى انها تلغى) . نفرض ان معدل وصول المعلومات فى الدقيقة الواحدة يساوى عشرة أى أن $\lambda = 10$ ونفرض ان طاقة الوحدة عبارة عن عشرين عملية فى الدقيقة الواحدة أى أن $\mu=20$

المطلوب (١) ايجاد احتمال أن اى عملية لا تلغى .

(٢) سعة الحافظة فى هذه الحالة .

<u>الحل :</u> بما أن $n=1 \ , \lambda = 10 \ , \mu = 20 \ , t = 2$

فان

$$P(\beta > 2) = \Pi e^{-(20-10).2} = \Pi e^{-20}$$

ولكن

$$\Pi = \frac{\mu p_o}{(n-1)!\ (n\mu - \lambda)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n =$$

$$= \frac{20\ p_o}{0!(20-k)} \ ½ = p_o$$

أى أن p_0 ينطبق مع قيمة $\prod$ ولكن

$$= \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 - p_0$$

$$\therefore \prod + p_0 = 1$$

ومنها فان

$$\prod = p_0 = \tfrac{1}{2}$$

أى أن احتمال أن الوحدة مشغولة فى تحليل المعلومات يساوى $\tfrac{1}{2}$ ومنها فان

$$P(B > 2) = 0.5 \quad e^{-20} \approx 10^{-9}$$

أى أن المعلومات تلغى باحتمال تقريبا يساوى صفرا أى أنه يمكن تحليل جميع المعلومات . وهنا قد نتساءل عن المدة التى تكون فيها الوحدة خالية من المعلومات حتى يتسنى لنا استخدامها فى اغراض أخرى .

بما أن $p_0 = \frac{1}{2}$ أى أن نصف الوقت تكون فيه الوحدة خالية من تحليل المعلومات ومن هذا نرى أنه يمكن تكليف الوحدة بعمل آخر او حل مشكلة اخرى معقدة اكثر وتأخذ وقت اكثر فى تحليلها وهذا حتى يمكن استغلال الوحدة على اكمل وجه .

لتحديد سعة مكان التخزين (الحافظة ـ الذاكرة) بما ان العملية تفقد قيمتها بعد دقيقتين باحتمال 10^{-9} فان المطلوب هو تحديد سعة الحافظة بحيث تقبل جميع العمليات باحتمال قدره $1 - 10^{-9}$

ومتوسط العمليات المنتظرة فى الحافظة يساوى

$$M_1 = p_n \frac{\lambda}{n\mu(1 - \frac{\lambda}{n\mu})^2} = p_1 \frac{1}{2(1 - \tfrac{1}{2})^2} = 2p_1$$

ولكن

$$p_1 = \tfrac{1}{2} p_0 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore M_1 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \tfrac{1}{2}$$

أى أن العمليات المنتظرة فى الحافظة لا يتعدى عملية واحدة ولكن هذا لا يعنى ان سعة الحافظة تحتوى فقط مكان واحد لعملية واحدة ولتحديد عن الاماكن فى الحافظة نفرض ان هـ

وهذا العدد يساوى N وهو العدد الذى يرفض قبول او حفظ العمليات باحتمال قدره 10^{-9}
الاحتمال يساوى

$$P_{>N} = \sum_{k=N+1}^{\infty} p_k$$

ولكن

$$p_k = (½)^k \ p_o = (½)^{k+1}$$

$$\therefore \ P_{>N} = \sum_{k=N+1}^{\infty} (½)^{k+1} = \frac{(½)^{N+2}}{1 - ½} = (½)^{N+1}$$

أى أن

$$10^{-9} = (½)^{N+1}$$

باخذ اللوغاريتم نحصل على

$$N+1 = \frac{-9}{-\log 2} = \frac{9}{0.3010} \quad 30 \quad \therefore \ N = 29$$

أى ان سعة الذاكرة اللازمة لكى تقبل جميع المعلومات ليس اقل من 29 مكانا ٠

مثال ٤ : داخل وحدة انتاجية بها عدد من الوحدات معدل تعطل الوحدات خلال ساعة هو ثلاث فاذا كانت الوحدة المتعطلة تكلف الشركة 5 جنيها عن كل ساعة الوحدة الانتاجية واجهت المشكلة التاليــة :

الاختيار بين عاملين للقيام بعملية التصليح : احدهما يعمل ببطء ولكن ياخذ أجر أقــل والاخر أسرع ويأخذ أجر اكبر٠ فاذا كان العامل الاول يأخذ 0.20 جنيها عن كل ساعة ويقوم بتصليح اربعة وحدات فى الساعة والثانى يأخذ 0.3 جنيها عن كل ساعة ويقوم بتصليح ست وحدات فــى الساعــة ٠

فأى العاملين تختار الوحدة الانتاجية للقيام بعملية التصليـح ٠

الحــل : نحسب الخسارة الناجمة عن التعطل والتصليح بالنسبة الى العامل الاول والثانى وبعــد ذلك المفاضلة بينهما من حيث اقل خسارة ٠

نجد أن أجر العامل الاول خلال 8 ساعات عمل هو 1,6 جنيها التوقع لعدد الوحدات المتعطلة خلال 8 ساعات هو

$$8 . \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 8 \ \frac{3}{4 - 3} = 24$$ وحدة

حيث $\mu = 4$ عبارة عن عدد الوحدات التى يمكن تصليحها خلال ساعة (وحدة زمن) والخسارة الناجمة عن تعطل 24 وحدة هى 120 جنيها .

وعلى ذلك فان الوحدة الانتاجية تكون خسارتها الكلية فى اليوم هى

$$120 + 1.6 = 121.6$$

اما بالنسبة الى العامل الثانى فان $\mu = 6 \; , \; \lambda = 3$

والتوقع لعدد الوحدات المتعطلة خلال 8 ساعات هو :

$$8 \cdot \frac{3}{6-3} = 8$$ وحدات

والخسارة الناجمة عن تعطل 8 وحدات هى 40 جنيها .

والخسارة الكلية عند استخدام العامل الثانى هى :

$$40 + 4 = 44$$ جنيها

اى أن الوحدة الانتاجية تختار العامل الثانى حيث انه يكلف الوحدة اقل خسارة .

٣- نموذج خدمة الانتظار فى حالة صف الانتظار محدود :

فى هذا النموذج يكون الانتظار محدود الى عدد معين امام أجهزة الخدمة فاذا وصل طلب وكان أمام أجهزة الخدمة العدد المحدود m مثلا فانه ترفض خدمته ويترك أجهزة الخدمة ننظر فقط اذا كانت الطلبات التى أمام أجهزة الخدمة أقل من m نفرض ان عدد اجهزة الخدمة n ونلاحظ ان الطلبات المراد خدمتها يجب الا تتعدى العدد $n+m$ وكما سبق فى النماذج السابقة نفرض ان معدل وصول الطلبات وخدمتها فى معدل الزمن هو μ ، λ

نفرض أن p_k - احتمال وجود عدد k من الطلبات داخل مجموعة فى أى لحظة نجد أن p_k تحقق المعادلات التالية :

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} \; p_o$$

$$(\lambda + k\mu)p_k = \lambda p_{k-1} + (k+1)\,\mu\, p_{k+1} \qquad (1 \leqslant k < n)$$

$$(\lambda + n\mu)p_k = \lambda p_{k-1} + n\mu\, p_{k+1} \qquad (n \leqslant k \leqslant n+m-1)$$

$$p_{m+n} = \frac{\lambda}{n\mu} \; p_{n+m-1}$$

ومنها من السهل اثبات أن :

$$(1)\quad p_k = \begin{cases} \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^k}{k!}\, p_o & 0 \leqslant k < n \\[2ex] \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^k}{n^{k-m}\, n!}\, p_o & n \leqslant k \leqslant n+m \end{cases}$$

كما أن

$$(2)\quad p_o = \sum_{k=o}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{u}\right)^n \frac{1 - \rho^{m+1}}{1 - \rho}$$

حيث

$$\rho = \frac{\lambda}{n\mu}$$

واحتمال ان جميع الاجهزة مشغولة

$$(4)\quad \Pi = \sum_{k=n}^{n+m} p_k = p_n \frac{1 - \rho^{m+1}}{1 - \rho}$$

ومنها فان

$$(4')\quad p_n = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+1}} \cdot \Pi$$

وقانون توزيع مدة الانتظار

$$(5)\quad P(\beta > t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \mathcal{L}(t) & t > 0 \end{cases}$$

حيث

$$\mathcal{L}(t) = \frac{\Pi\, e^{-nut}}{1 - \rho^{m+1}} \sum_{i=o}^{m-1} \frac{(n\mu t)^i}{i!} (\rho^i - \rho^m)$$

ومتوسط عدد الطلبات المنتظرة الخدمة :

$$(6)\quad M_1 = \frac{p_n}{(1-\rho)^2} \left(\rho - (m+1)\rho^{m+1} + m\, \rho^{m+2}\right) = \sum_{k=n}^{m+n} (k-n) p_k \quad 18$$

ومتوسط عدد الطلبات المراد خدمتها يساوى

$$(7)\quad M_2 = \sum_{k=1}^{n+m} k\, p_k = M_1 + np_n \frac{1 - \rho^{m+1}}{1 - \rho} + p_o \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

ومتوسط عدد الاجهزة الغير مشغولة يساوى

$$(8)\quad M_3 = \sum_{k=o}^{n-1} (n-k)\, p_k = \sum_{k=o}^{n-1} \frac{(n-k)}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_o$$

ومتوسط المدة التى يقضيها الجهاز غير مشغولا يساوى

$$(9) \quad \frac{M_3}{n} = \sum_{k=o}^{n-1} \frac{n-k}{n\,k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_o$$

مثال : مركز خدمة به عدد معين من سيارات اللورى يستقبل الطلبات لحمولة ونقل البضائع المختلفة ونفرض ان طاقة مركز الخدمة محدودة أى انه يقبل عدد معين من الطلبات وبعده يرفض اى طلـــب ونفرض ان هذا العدد هو عشرة ونفرض ان عدد السيارات خمسة فقط وان كل ساعة يقبل المركز طلب واحد أى أن $\lambda=1$ ومتوسط مدة الشحن والنقل ساعة واحدة أى أن $\mu = 1$

المطلوب تحديد درجة التحميل على السيارات .

الحل : وبما أن $n = 5 \;,\; m = 10$ فان $n+m = 5$

$\mu = 1 \;,\; \lambda = 1 \quad p$

$$\rho = \frac{\lambda}{n\mu} = 0.2$$

احتمال ان يكون جميع الاجهزة مشغولة

$$\Pi = p_5 \; \frac{1 - (0.2)^{10}}{1 - 0.2} = \frac{5}{4} \; 1 - (0.2)^{11} \quad p_5$$

ولكن

$$p_5 = \frac{1}{5!} (1)^5 \; p_o = \frac{p_o}{5!}$$

ولكن

$$p_o = \frac{1}{\sum_{k=o}^{4} \frac{1}{k!} + \frac{1}{5!\;0.8} (1-(0.2)^{11})} = 0.5818$$

أى ان احتمال ان جميع الاجهزة غير مشغولة يساوى 0.5818 أى اكثر من نصف الوقت تكون فيه السيارات غير مشغولة ومنها يمكن التوصية بتقليل عدد السيارات أو زيادة عدد الطلبات .

واحتمال ان الاجهزة مشغولة

$$p_5 = \frac{p_o}{5!} = 0.0048$$

أى من 1000 ساعة خمس ساعات فقط تكون فيه السيارات مشغولة واحتمـــال أن جميع السيارات مشغولة

$$\Pi = \frac{5}{4} \; 1 - (0.2)^{11} \; \frac{0.5818}{5!} = 0.0061$$

أى انه من 1000 ساعة ست ساعات تكون فيها جميع السيارات مشغولة وهذا يبين مدى التحميل على السيارات ونرى انه صغير جدا ٠

ومتوسط عدد الطلبات المنتظرة للخدمة يساوى

$$M_1 = \frac{P_5}{(0,8)^2} \; 0.2 - 11(0.2) + 10\,(0.2)^{12} \approx 0.0015$$

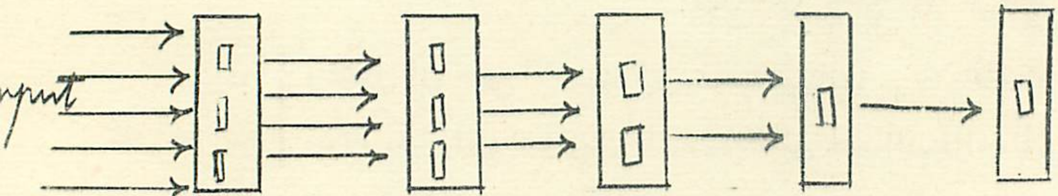
أى أنه لا يوجد صف امام مركز الخدمة أى أن أى طلب تؤدى خدمته ولا يرفض كما انه نجد ان الطاقة الالية كثيرة ولذا يستلزم الاقلال منها أو زيادة العدد m

---

*

نموذج بالم " Blam " الخدمة بالنسبة الى ترتيب اجهزة الخدمة :

فى بعض نماذج الخدمة نرى ان الخدمة للطلبات تبدأ بالنسبة الى ترتيب اجهزة الخدمة (مرتبة ترتيبا خاصا حسب خواص كل مجموعة وامكانية كل جهاز فى المجموعة) فمثلا ان المجموعة الاولى تخدم جميع الطلبات فاذا كانت مشغولة فى خدمة طلبات سبقت فان الطلبات المراد خدمتها تتوجه الى المجموعة التى تلى المجموعة الاولى واذا كانت المجموعة الثانية مشغولة فى خدمة طلبات طلبات سبقت فانها تتوجه الى المجموعة التى تلى المجموعة الثانية وهكذا ٠ أى أن الطلب يفضل الجهاز الذى أقل فى الترتيب :



اجهزة الخدمة مقسمة الى مجموعات

نفترض أن كل مجموعة تحتوى على جهاز واحد وان $A_1 , A_2 , \ldots , A_k$ عبارة عن أجهزة الخدمة - A_k عبارة عن الجهاز الذى ترتيبه k ويصل الطلب الى الجهاز k عندما يكون قد مر على جميع الاجهزة $A_1, A_2 , \ldots, A_{k-1}$ وكانوا جميعا مشغولين فى طلبات سبقت ٠

نعرف أن E_n - عبارة عن احتمال ان جميع n جهاز مشغولون ينطبق الرفض

نجد ان هذا الاحتمال يساوى

$$E_n = \frac{\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{\sum_{k=o}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}$$

وهذه عبارة عن احتمال ان الطلب يتوجه الى الجهاز $n+1$ اذا وجد أو يتوجه الى الجهاز الاول .

واذا فرض ان $\prod_n$ عبارة عن احتمال ان الجهاز A_n مشغول فان :

$$E_n = E_{n-1} \prod_n$$

وبالتعويض نجد أن

$$E_n = \frac{\lambda}{n\mu + \lambda E_{n-1}}$$

مثال ١ : مصنع تعبئة منتجات مصنوعة يوجد به عدد من الوحدات الاوتوماتيكية للتعبئة موضوعة بالترتيب . تتوجه المنتجات الى الوحدة الاولى فاذا كانت مشغولة فى تعبئة منتجات سبقت فانها تتوجه الى الوحدة التى تليها وهكذا فاذا كان متوسط فترة التعبئة للقطعة الواحدة يساوى ثانية وكان متوسط العدد المتوجه من المنتجات للتعبئة 1000 قطعة فى الساعة .

المطلوب تعيين درجة التحميل على الوحدات .

الحل : نرى ان عدد الوحدات ليست معروفة ولذا فاننا اولا نحددها نفرض ان عددها واحتمال ان جميع الاجهزة مشغولة يساوى

$$E_n = \frac{\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{\sum_{k=o}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}$$

حيث

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1000 \ . \ 3.24}{3600} = 0.9$$

لقيم n المختلفة يمكن الحصول على الجدول التالى :

n	1	2	3	4	5	6	7
E_n	0.47368	0.17570	0.05007	0.01115	0.00200	0.00030	0.00000

من الجدول نرى أنه اذا كانت عدد الوحدات 6 فان احتمال ان جميعها يكون مشغول فى وقت واحد يساوى 0.00030 وعندما $n = 7$ فان احتمال ان يكون جميع الوحدات مشغولة يساوى صفرا .

ولذا فان وجود اكثر من ست وحدات تعبئة تعتبر طاقة آلية زائدة اذ نرى انه يمكن ان يسير العمل على اكمل وجه بست وحدات تعبئة فقط اذ ان من 1000 قطعة فقط ثلاث ترفض تعبئتهم ويمكن ارجاعهم الى وحدة التعبئة الاولى كما انه قد يقال انه يكفى فقط خمسة وحدات اذا انه من 1000 ساعة عمل يكون ساعتان جميع الوحدات الخمس مشغولة . من هذا المثال امكن تحديد الطاقة الالية ودرجة التحميل عليها .

وقد تحتوى كل مجموعة على مجموعة من أجهزة الخدمة فمثلا نفرض ان عدد المجموعات N كل مجموعة تحتوى على $n_1, n_2, \ldots, n_N$ من الاجهزة ونرى ان احتمال ان المجموعة الاولى مشغولة يساوى

$$E_1 = \frac{\frac{1}{n_1!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n_1}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k}}$$

واحتمال ان جميع المجموعات مشغولة يساوى

$$E_N = \frac{\frac{1}{S_N!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{S_N}}{\sum_{k=0}^{S_N}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k}}$$

حيث $S_N = n_1+n_2+\ldots+n_N$

<u>مثال :</u>

نفرض ان لدينا ثلاث خطوط للدفاع فى كل خط يوجد قاعدة للصواريخ المضادة للطائرات القاعدة الاولى بها ثلاثة اجهزة والثانية بها جهازين والثالثة بها جهاز واحد فاذا كانت معدل الطائرات المغيرة هو اربعة فى وحدة الزمن وان متوسط مدة الاطلاق واصابة الهدف نصف دقيقة أى ان $\mu = 2$

المطلوب ايجاد احتمال اختراق مجال الخطوط الدفاع الثلاث .

الحـل : بما أن $n_1=3 \quad , \mu = 2 \quad \lambda = 4$

فان احتمال اختراق مجال الخط الاول يساوى

$$E_1 = \frac{\frac{2^3}{3!}}{1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}} = 0.21053$$

اى انه اكثر من خمس الوقت جميع اجهزة الخط الاول يكون مشغولة فى القذف او اكثر مـن خمس الطائرات ستخترق مجال الخط الاول وتقع فى مجال الخط الثانى .

واحتمال اختراق مجال الخط الثانى يساوى

$$E_2 = \frac{\frac{2^5}{5!}}{\sum_{k=o}^{5} \frac{2^k}{k!}} = 0.03670$$

أى ان من 1000 طائرة تخترق مجال الخط الثانى وتقع فى مجال الخط الثالـث 37 فقـط .

واحتمال اختراق مجال الخط الثالث يساوى

$$E_3 = \frac{\frac{2^6}{6!}}{\sum_{k=o}^{6} \frac{2k}{k!}} = 0.00121$$

أى انه من 1000 طائرة يخترق مجال الخط الثالث وتصيب الهدف طائرة واحدة .

ويمكن هنا تحديد عدد اجهزة القذف اللازم وضعها فى خطوط الدفاع بحيث يكـون احتمال اختراق مجال الخطوط اقل من كمية صغيرة ϵ أى ان تحديد s التى تحقـق المتباينـة .

$$\frac{\frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{u}\right)^s}{\sum_{k-1}^{s} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} < \epsilon$$

Monte Carlo simulation technique Applied to the theory of Queues.

طريقة مونت كارلو وتطبيقاتها فى نظرية الصفوف

فى الدراسة التحليلية السابقة افترضنا أن توزيعات المدخلات input بواسون والمخرجات output توزيع أسى وتوصلنا الى صيغة رياضية للمؤشرات التى تصف المشكلة وفى بعض الاحيان اذا اختلف توزيعات المدخلات والمخرجات عن هذه التوزيعات فانه قد يكون من الصعب الوصول الى الصيغ الرياضية أو أن هذه الصيغ صعبة الاستخدام فلذا فانه يكون من الأفضل أن يستخدم الارقام العشوائية random numbers وذلك بفرض أن فترات الوصول وفترات الخدمة تأخذ قيم عشوائية .

واستخدام الارقام العشوائية هو أبسط اجراء لوصلنا مباشرة الى النظام التى يطابق الى أقصى حد النظام الحقيقى .

والمثال التالى يبين شرح الطريقة والخطوات المتبعة لحل المشكلة .

نفرض أن لدينا جهاز واحد للخدمة وأن متوسط مدة الخدمة $\frac{1}{\mu}$ والنظام المتبع فى الخدمة هو من يأتى أولا يخدم أولا . ونفترض أن التوزيع الاحتمالى للخدمة أسى .

ونفرض أن لحظات وصول الطلبات ما هى الا لحظات عشوائية نفرض أن توزيعها الاحتمالى هو التوزيع الأسى توقعه فى وحدة الزمن λ ولايجاد فترات الوصول نرى أن

$$\phi(t_1) = 1 - e^{-\lambda t}$$

ومنها فان

$$t_1 = -\frac{1}{\lambda} \log\left(1 - \phi(t_1)\right) \quad \ldots . \quad (1)$$

حيث $\phi(t_1)$ يمكن الحصول عليها باستخدام الارقام العشوائية

وفترات الخدمة : تساوى

$$t_2 = \frac{1}{\mu} \log(1 - \psi(t_2)) \qquad (2)$$

حيث $\psi(t_2)$ يمكن الحصول عليها باستخدام الارقام العشوائية . ولحل المشكلة بطريقة مونت كارلو تجرى الخطوات التالية :

(١) نفترض قيمتين لكل من λ ، μ (وذلك حسب البيانات المتاحة)

(٢) تختار من جدول الأرقام مجموعة من الأرقام توضع قبلها العلامة العشرية مثلا العدد 9342 تصبح العدد 0.9342

وهذه الاعداد يمثل $\phi(t)$

(٣) من المعادلة (١) لقيمة λ المفروضة يمكن حساب فترات الوصول t_1

(٤) بالنسبة الى فترات الخدمة فاننا تأخذ مجموعة أخرى من الأرقام وتوضع قبلها العلامة العشرية كما سبق وهذه الأعداد تمثل $\psi(t_2)$

(٥) من المعادلة (٢) لقيمة μ المفروضة يمكن حساب فترة الخدمة .

(٦) من هذه البيانات نوجد

(أ) متوسط المدة التى يقضيها الطلب داخل مجموعة الخدمة .

(ب) متوسط فترة الانتظار لكل طلب .

(حـ) متوسط الفترة التي يقضيها الجهاز بدون عمل .

(د) متوسط طول الصف .

لايجاد هذه القيم نفرض أن $\lambda = 0.5$ $\mu = 1$ فى وحدة الزمن (الساعة)

ايجاد فترات وصول الطلبات : نفرض أن لدينا عشرة طلبات وباستخدام الخطوات ١ ـ ٣ نحصل على الجدول التالى :

جـدول رقـم (١)

الطلبات	الارقام العشوائيـة	$\phi(t)$	$-\frac{1}{\lambda}\ln(1-\phi(t))$	لحظات وصـول الطلبات
1	4504	0.4504	71	71
2	6340	0.6340	119	190
3	3173	0.3173	48	238
4	5682	0.5682	99	337
5	2841	0.2841	41	378
6	5516	0.5516	92	470
7	2758	0.2758	40	510
8	5475	0.5475	94	604
9	6833	0.6833	139	743
10	7512	0.7512	169	912

من الجدول نرى أن λ^* عدد الطلبات الواصلة فى وحدة الزمن تساوى

$$\lambda^* = \frac{10}{\frac{912}{60}} = \frac{10.60}{912} = 0.657$$

<u>لايجاد مدد الخدمة</u> : وباستخدام الخطوات ٤ ــ ٥ نحصل على الجدول التالى

جـــدول رقم (٢)

عدد الطلبات	الارقام العشوائية	$\psi(t)$	$-\frac{1}{\mu}\ln(1-\psi(t))$	مجموع مدة الخدمـه
1	0412	0.0412	3	3
2	4302	0.4302	35	38
3	2151	0.2151	14	52
4	5171	0.5171	44	96
5	6681	0.6681	65	161
6	7436	0.7436	82	243
7	7814	0.7814	90	333
8	8003	0.8003	96	429
9	4001	0.4001	32	461
10	6096	0.6096	65	526

من الجدول نرى أن μ^* عدد الطلبات التى يمكن خدمتها فى وحدة الزمن تساوى

$$\mu^* = \frac{10.60}{426} = 1.141$$

لايجاد الخطوة (٦) يستخدم جدول (١) ، (٢) للوصول الى الجدول التالى :

جدول رقم (٣)

الفترة التى يقضيها الجهاز بدون عمل	طول الصف	فترة الانتظار	لحظات انهاء الخدمة	مجموع فترات الخدمة	طول فترة الخدمة	لحظات الوصول	عدد الطلبات
71	0	0	74	3	3	71	1
116	0	0	225	38	35	190	2
13	0	0	252	52	14	238	3
85	0	0	381	96	44	337	4
0	1	3	446	161	65	378	5
24	0	0	552	243	82	470	6
0	1	42	642	333	90	510	7
0	1	38	738	429	96	604	8
5	0	0	775	461	32	743	9
137	0	0	977	526	65	912	10
451	13	83	المجموع				

من الجدول السابق نرى أن

متوسط فترة الانتظار لكل طلب تساوى مجموع فترات الانتظار على عدد الطلبات

أى أن

$$T = \frac{83}{10} = 8.3$$ دقيقة

دقيقة لكل طلب

ومتوسط المدة التى يقضيها الجهاز بدون عمل تساوى

$$\frac{451}{10} = 45.1$$ دقيقة

ومتوسط طول الصف يساوى

$$M_1 = \frac{\text{مجموع الصف}}{\text{عدد الطلبات}} = \frac{3}{10} = 0.3$$ طلب

ونلاحظ أن هذه القيم تختلف عن قيم الصيغ الرياضية وهى

ومتوسط الصف يساوى

$$M_1 = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{0.5}{1.0.5} = 1$$

ومتوسط مدة الانتظار يساوى

$$T_1 = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{0.5}{1(1-.5)} = 1$$ دقيقة لكل طلب

مثال (٢) : في الانتاج عندما نمر على مراحل : نفرض أن وصول المواد الخام يتبع القانون الأسى متوسطه دقيقة $20 = 1/\lambda$ وأن الانتاج يمر على ثلاث مراحل توزيعات مدة الخدمة فى هذه المراحل تتبع

(١) المرحلة الأولى : القانون المعتاد متوسطه 10 دقائق وانحرافه المعيارى 5 دقائق .

(٢) المرحلة الثانية : القانون الأسى متوسطه $\frac{1}{\mu} = 15$

أوجد بطريقة مونت كارلو متوسط مدة التى يقضيها الطلب فى مجموعة الخدمة — ومتوسط الانتظار

الحل : نفرض أنه خلال مجموعة الخدمة تصل عدد 10 طلب خلال مدة معينة ، كما فى المثال السابق فاننا نأخذ من الارقام العشوائية مجموعة تمثلها بالنسبة الى $\phi(t)$ ومرة مجموعة أخرى بالنسبة الى $\psi(t)$ مع العلم تستخدم بالنسبة للمرحلة الأولى جدول الارقام العشوائية للتوزيع المعتاد وللمرحلة الثانية للتوزيع الاسى نحصل بعد ذلك على الجدول التالى الذى يمثل لحظات الوصول وفترات الخدمة على المرحلة الأولى والثانية .

جدول رقم (٤)

مجموعة فترات الخدمة	مدة الخدمة فى المرحلة الثانية	مجموعة الخدمة	مدة الخدمة فى المرحلة الاولى	لحظات الوصول	فترات الوصول	رقم الطلب
9	9	11	11	25	25	1
13	4	24	13	32	7	2
25	12	30	6	42	10	3
51	26	38	8	73	31	4
64	13	43	5	94	21	5
71	7	55	11	106	12	6
89	18	64	9	142	36	7
139	50	79	15	178	36	8
141	2	97	18	185	7	9
146	5	103	6	186	1	10

من الجدول نرى أن

$$1/\lambda^* = \frac{186}{10} = 18.6$$

ومتوسط مدة الخدمة فى المرحلة الاولى $\frac{1}{\mu^*} = \frac{103}{10} = 10.3$

والمرحلة الثانية : $\frac{1}{\mu^*} = \frac{146}{10} = 14.6$

لايجاد المؤشرات المطلوبة نكون الجدول التالى :

جدول رقم (٥)

المدة التى يقضيها	الانتهاء من المرحلة الثالثة	الوصول الى المرحلة الثالثة	الانتهاء من المرحلة الثانية	الوصول الى المرحلة الثانية	وقت الانتهاء من المرحلة الاولى	الوصول الى المرحلة الاولى	لحظات الوصول	رقم الطلب
8	7	6	5	4	3	2	1	
35	60	45	45	36	36	25	25	1
43	75	60	53	49	49	36	32	2
48	90	75	67	55	55	49	42	3
49	122	107	107	81	81	73	73	4
43	137	122	120	107	99	94	94	5
46	152	137	127	120	177	106	106	6
42	184	169	169	151	151	142	142	7
70	258	243	243	193	193	178	178	8
88	273	258	245	245	211	193	185	9
102	288	273	250	245	217	211	186	10
566	المجموع							

من الجدول نرى أن متوسط المدة التى يقضيها الطلب فى مجموعة الخدمة يساوى

$$\frac{566}{10} = 56.6$$ دقيقة

ومتوسط المدة التى يقضيها فى الانتظار تساوى

$$56.6 - 10 - 15 - 15 = 16.6$$ دقيقة لكل طلب

ونلاحظ أن الجدول السابق محسوب فى حالة الطلب يجرى خدمته لأى مرحلة عندما تنتهى من خدمة الطلب السابق له فى نفس المرحلة أى أن عملية الانتاج مستمرة .