الجمهورية العربية المتحدة

معهد التخطيط القومي

Dr. S. H

مذكرة رقم ١٨٦

مبادئ الاقتصاد القياسي

دكتور محمد محمود الامام

(الجزء الأول)

١٩٦٢/٦/٣

القاهرة

٣ شارع محمد مظهر - بالزمالك

الفصـــل الأول

مقدمـــة

١/١ ـ أهمية البحث القياسى فى التخطيط

يقتضى وضع الخطط الاقتصادية دراسة العلاقات بين الجوانب المختلفة للاقتصاد القومى وداخـل كل قطاع من القطاعات ، وهذه الدراسات لازمة للآتـى :

(١) معرفة نمط هذه العلاقات فى الماضى لتتبين العوامل التى كانت تساعد النمو وتلك التى كانـت تعوقه ، وبالتالى توجيه العناية الى أهم هذه العوامل .

(٢) ادخال تغيرات عمدية فى بعض هذه الجوانب كتغيير معدل الاستثمار مثلا ، الأمر الذى يتطلب معرفة القدر الواجب احداث التغيير به ، فلا يكفى أن نقول أنه يجب زيادة معدل الاستثمار وانما لابد من أصدار قرارات مثل " معدل الاستثمار يجب أن يرتفع من س ٪ (١٠ ٪ مثلا) الى ص ٪ (١٨ ٪ مثلا) "

(٣) دراسة أثر التغيرات العمدية على النواحى الاخرى للاقتصاد التى يكون حق اتخاذ القرار فيهـــا لغير المخطط . فالاستهلاك الخاص يتم بناء على قرارات المستهلكين ، فلا يكفى أن يقرر المخطط أن الاستهلاك يجب أن يكون عند حد معين بل لابد من التكهن بالتصرف الذى يقوم به المستهلكون فعلا ويسعى الى احداث التغيرات اللازمة فى العوامل التى تحدد الاستهلاك (كالدخل التصرفى) وفى تنظيمات الاسواق بما يكفل تحقق الخطة بالشكل المرغوب .

(٤) التنبؤ ببعض المتغيرات التى تخرج عن ارادة المخطط سواء بطريق مباشر أو غير مباشر فالاستهلاك خارج عن السيطرة المباشرة للمخطط ولكنه يخضع لسلطانه غير المباشر . أما التصدير فانه يتوقـف على عوامل خارجة عن الاقتصاد القومى كله ، ولابد من عمل تنبؤ بحجمه مع أخذ التطورات فـى الانتاج الداخلى فى الحسبان .

فاذا رجعنا الى علم الاقتصاد بأسلوبه النظرى وجدناه يحتوى على جانب وصفى يمثل أشكال المؤسسات والنظم الاقتصادية والمقارنة بينهما ، كما أنه يحتوى على جانب آخر تحليلى يتناول العلاقات بين الظواهر المختلفة ويضع لها ما يعتقد الكاتب أنه أفضل الفروض التى تساعد على تفسير هذه العلاقات . والمشاهد أن الظاهرة الواحدة يوجد عنها أكثر من نظرية واحدة الأمر الذى يستدعى أيها ينطبق حتى تكون النتائج المستخلصة متفقة مع الواقع . ويتميز الجانب الاكبر من الدراسات التحليلية الاقتصادية بأنه يتناول ظواهر يمكن معالجتها رقميا ، أى أنها تخضع للقياس .

ولكن ينشأ هنا السؤال : ما الذى يدعو الى تعدد النظريات بالنسبة لظاهرة واحدة ؟ للاجابة على هذا السؤال نرجع الى طبيعة المشاكل الاقتصادية . فهذه المشاكل هى عبارة عن خلاصة تصرفات الافراد فى حياتهم الاقتصادية ، وهؤلاء يقومون بهذه التصرفات بناء على دوافع وحوافز معينة قد تختلف من فرد لآخر أو من ظرف لآخر ، بعضها يرجع الى عوامل نفسانية أواجتماعية ، والبعض الآخر يرجع الى عوامل موضوعية متغيرة . والافراد فى هذه التصرفات يستجيبون تلقائيا لهذه العوامل بدون محاولة لتمييز كل من هذه العوامل بصورة صريحة أواعطاء كل من هذه العوامل (إن تمكنوا من تمييزها) وزنا يتناسب مع أهميتها فى نظرهم . ومعنى هذا أنه لايمكن استخلاص الفروض النظرية عن هذه التصرفات بتوجيه أسئلة مباشرة للافراد يجيبون عنها بشكل يؤدى الى التعرف على العوامل الواجب ادخالها فى العلاقة المدروسة وكيفية ادخالها فيها .

ومن جهة أخرى فان من المتعذر ان لم يكن من المستحيل استخدام أسلوب التجربة الشائع فى العلوم الطبيعية بحيث يتحكم الباحث فى المتغيرات التى يعتبرها عوامل مؤثرة فى الظاهرة المدروسة ، ثم يدرس كيفية استجابة الافراد لتلك العوامل فى تحديد قيم هذه الظاهرة . وحتى لو أمكن اجراء مثل هذه التجربة فان تكاليفها سواء المادية أو المعنوية لابد وأن تكون باهظة ، فضلا عن أن التجربة تعنى عادة تثبيت كل العوامل ما عدا تلك التى يراد اختبار أثرها ، الامر الذى يعطى تفسيرا لاثر العوامل المتغيرة ولكنه لا يضمن أن يشتمل هذا التفسير على كل العوامل التى تؤثر عليها فى الظاهرة . فالاجابة المطلوبة هنا ليست هى : ما الذى يحدث لظاهرة معينة (كالاستهلاك) اذا تغير عامل معين (مثل الدخل) بل ان المطلوب هو معرفة كيفية تحديد الاستهلاك : أى ما هى العوامل الواجب أخذها فى الاعتبار ثم ما هو أثر تغيرها على تلك الظاهرة .

لذلك فعلى الباحث أن يدرس الحياة كما هى وأن يستخلص أفضل ما يراه من فروض • ونظراً لتشابك العلاقات العملية فلابد له من اجراء تجربة ذهنية يقوم فيها بتصور أن الظاهرة المدروسة قد تمت بمعزل عن باقى الظواهر ، وهذا ما يسمى بعملية التجريد Abstraction أو العزل ، فلا يستبقى فى البحث سوى ما يرى أنه عوامل لازمة للتفسير ، ثم يستخدم المنطق (اللفظى أو الرمزى) لاستخلاص أثر العوامل المختلفة على هذه الظاهرة • وبذلك يتوصل الى نظرية تفسر الظاهرة المدروسة ، وتكون هذه النظرية مصاغة بالأسلوب اللفظى أو بالاسلوب الرياضى وفقا لنوع المنطق الذى استخدمه •

مثل هذه النظرية لا تتحقق الا اذا تحققت عملية التجريد ، لأنه اذا لم يكن هناك خطأ فى التحليل المنطقى (وهو ما نستبعده لأنه يمكن دائما تصحيحه) فان التفسير لابد وأن يكون نتيجة منطقية للفروض التى بنيت عليها النظرية ، غير أن هذا التحقق التام لعملية التجريد لا يمكن أن يتم عمليا ، وأفضل ما نتوقعه هو أن تكون عملية التجريد قد نجحت فى التركيز على العوامل الرئيسية واهمال غيرها من العوامل الثانوية • أى أن كل تفسير نتقدم به عن هذا الطريق ان هو الا تفسير تقريبى يتوقف نجاحه على مدى التقريب أى على درجة تحقق الفروض التى قامت عليها عملية التجريد • ونظرا لأن التقريب يمكن أن يكون بدرجات متفاوتة فانه من الجائز أن توجد أكثر من نظرية لنفس الظاهرة • بل وأكثر من ذلك فان كل منها تعتبر صحيحة (تقريبا) وتخدم كل منها مجموعة من الاغراض بحيث لا نرفض أحدها على وجه الاطلاق ، ولو أنه يستحيل القول أن واحدة بالذات هى " النظرية " الوحيدة التى يجب قبولها •

وعلى ذلك فاذا تحددت مجموعة الاهداف التى يراد تحليل الظاهرة من أجلها ، فلابد من اجراء اختبارات عملية للتأكد مما اذا كانت النظريات المقدمة فى هذا الشأن تتفق (بالتقريب المقبول) مع الواقع • ولكن الأمر لا يتوقف عند قبول أو رفض النظرية ، بل لابد وأن نتعرف على ابعادها بشكل يمكننا من التوصل الى قيم رقمية محددة : فنتوصل منها الى معرفة حجم معدل النمو أو قيمة أثر التغير فى السعر على الكمية المطلوبة : هل هو + ٥٠ أو ــ ١٨,٢ الخ ... وبدون ذلك فان النتائج النظرية لن تعدو كونها نوعا من الرياضة الذهنية المفيدة تساعد الدارسين على استخلاص اتجاهات عامة فى الحالات المختلفة • ومعنى هذا أن عملية القياس Measurement تعتبر ضرورة اساسية لابد من القيام بها قبل اجراء أى بحث يؤدى الى استخلاص اى نتيجة عملية من النتائج التى تلزم للمخطط •

٢/١ ـ أسلوب البحث الاقتصادى :

عند البحث عن تفسير نظرى لظاهرة معينة باستخدام أسلوب التجريد يقوم الباحث باجراء العمليات التاليـــة :

(١) اختيار عدد من المتغيرات الاقتصادية يعتبر أنه متعلق بالظاهرة المدروسة من حيث أنه قد يؤثر فيها بشكل معين أو من حيث أنه يتوقف عليها ويؤثر فيها فى نفس الوقت ، ولذلك فان هـــذا الاختيار يعنى ضمنا أن المتغيرات التى لا تظهر فى التحليل لا تتبادل التأثير مع تلك التى ظهرت فيـــه ٠

(٢) تقسيم هذه المتغيرات الى مجموعتين : الاولى تؤثر فى الثانية ولكن لا تتأثر بها وفى هذه الحالة لا يجعل الباحث نفسه مسئولا عن تفسيرها فيعتبرها محددة من خارج البحث ٠ أى متغـيرات خارجيـة exogenous أو محددة predetermined ٠ أما الثانيـــة فانها تؤثر فى بعضها البعض وتتأثر بالمتغيرات الخارجية ولكنها لا تؤثر فيها ، وتسمى متغـيرات داخليـة endogenous أو متجاوبـة jointly - depenedent ٠

لنفرض مثلا أنه فى بحث للطلب والعرض بالنسبة لسلعة معينة تقرر ادخال المتغيرات الآتية فـى البحث : الكمية المطلوبة ـ الكمية المعروضة ـ السعر ـ دخل المستهلكين ـ تكاليــف الانتاج ٠ فى هذه الحالة يمكن اعتبارا الكميات والسعر متغيرات داخلية لان تغير الكمية يؤثــر فى السعر وبالعكس ٠ ولكن الدخل أو نفقات الانتاج (للوحدة) لا يلزم أن تكون متأثرة بالكمية أو السعر لهذه السلعة بالذات ولو أنها متغيرات تؤثر فى الطلب أو العرض ٠ ولذلك نعتبرهــا متغيرات لازمة للبحث ولكنها خارجية أو محددة من خارجه ٠

(٣) اذن عملية اختيار المتغيرات وتقسيمها الى داخلى وخارجى تنطوى على عدد من الفـــروض الاجتهادية ، فما يعتبر خارجيا فى بحث قد لا يجوز اعتباره كذلك فى بحث آخر ٠ وعلــى أساس هذه الفروض يقوم الباحث بوضع عدد من العلاقات يكفى لتفسير كل واحد من المتغـيرات الداخلية ٠ وباللغة الرياضية يعنى هذا أن نكون معادلة لكل متغير داخلى وبذلك نحصل علــى مجموعة كاملة من المعادلات تكفى لتفسير المتغيرات الداخلية جميعا ٠ هذه المجموعة نسميهــا

نموذج اقتصادى economic model لانها تعطى نموذجا لما يعتقد الباحث أنه يجرى عمليا . مثال ذلك : القول أن الكمية المطلوبة من سلعة معينة بواسطة مستهلك معين حتى تتوقف على سعر السلعة ع وعلى دخله س بحيث تزيد الكمية كلما انخفض السعر أو زاد الدخل (أى أن $\frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{س}} >$ صفر ، $\frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{ع}} <$ صفر) . هذه العبارة يمكن كتابتها رياضيا بالشكل

$$\text{ص} = \text{د}\,(\text{س} \,،\, \text{ع}) \qquad \left(\frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{س}} > \text{صفر} \,،\, \frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{ع}} < \text{صفر} \right) \qquad (١)$$

وهذه الصورة الرياضية قد تكون مجرد ترجمة للعبارة السابقة (من صورة لفظية الى صورة رمزية) على أن تكون العبارة نفسها مستخلصة بالمنطق اللفظى ، أو تكون مستمرة مباشرة بهذا الشكل باستخدام أسلوب التحليل الرياضى .

(٤) بعد تكوين مجموعة العلاقات التى يتكون منها النموذج يصبح فى امكاننا دراسة المغزى الضمنى لهذا النموذج ، وهو عادة ما يسمى حل النموذج . فالمعادلات التى يتكون منها النموذج تسمى معادلات هيكلية stractural equations لانها تصف ما يحدث وفقا لطبيعة الهيكل الاقتصادى نفسه ، ولكنها يندر أن تشاهد عمليا بمعنى أن الذى يشاهد عمليا هو عادة نتيجة تفاعل هذه المعادلات الهيكلية . فمثلا لا يمكن مشاهدة معادلة الطلب أو معادلة العرض ولكن الذى يمكن مشاهدته هو الكمية والسعر اللذين يتم عندهما التعامل أى تساوى العرض والطلب . وما معادلتا الطلب والعرض الا وسائل نظرية للتوصل الى معرفة هذه الكمية وهذا السعر أو على الاقل معرفة كيفية تعيينهما . كذلك عندما نقول أن الاستهلاك يتوقف على الدخل وأن الاستثمار وهو ما يتبقى من الدخل بعد الاستهلاك يتوقف على معدل تغير الدخل ، نحصل على معادلات تصف الهيكل الاقتصادى أو نموذج له . فاذا استخدمنا هذه المعادلات معا واستنتجنا أن معدل نمو الدخل يتوقف على الميل للاستثمار (= الادخار) ومعامل رأس المال (الذى يصف العلاقة بين الاستثمار والتغير فى الدخل) فان هذا المعدل يمكن مشاهدته مباشرة ويمكن اختباره وفقا للحل الذى توصلنا اليه نظريا .

(٥) اذن يتلخص الموقف فى أننا توصلنا الى مجموعة فروض ونتائج لها . ولكى تكون مقبولة لابد وأن تكون متسقة منطقيا وغير متعارضة مع الواقع العملى . هذان هما الشرطان اللذين يجب أن تجتازهما النظرية والا رفضناها ، فبالنسبة للشرط الاول يجب أن نتأكد أن النتائج المستخلصة منطقيا من أحد الفروض (كأن نستنتج أن الاستهلاك يزيد بزيادة الدخل) لا تتضارب مع فرض آخر (كأن يوجد فرض يقضى بعكس ذلك) . هذا الجانب من اختبار النظرية يتم على المستوى النظرى وهو من أهم نواحى البحث النظرى ، وسنفترض أن النظرية قد اجتازته فعلا .

أما الاختبار العملى فيتطلب عمليتين : الاولى هى الحكم بما اذا كانت هذه الفروض متفقة مع ما هو مشاهد بشكل مباشر ، فمثلا قد تدرس علاقة الاستهلاك بالدخل بافتراض أن توزيع الدخل ثابت ، فاذا كانت المشاهدات لا تبرر هذا الفرض وجب تعديله والرجوع الى التحليل النظرى لمعرفة ما اذا كان هذا التغير يؤثر فى الاستهلاك ، وبأى شكل . أما الثانى فهو يتوقف على مدى اتفاق النتائج المستمدة من هذه الفروض مع المشاهد عمليا ، فاذا تباينت النتائج النظرية عن الوقائع كان علينا أن نعيد النظر فى الفروض .

هذه الاختبارات العملية يقوم بها الباحث القياسى ، ولابد أن يأخذها الباحث النظرى فى الحسبان . على أن البحث القياسى لا يقف عند مجرد محاولة تعزيز أو هدم نظرية معينة ، بل ان الامر يتطلب الوصول الى تفسير واقعى للظواهر المختلفة ، ولذلك فان جانب النظرية يكون بمثابة المرشد للباحث ولا يلزم أن يحد من حريته فى البحث . ومن جهة أخرى فان عملية القياس لا يمكن أن تكون ذات قيمة اذا لم تبنى على أساس نظرى سليم .

٣/١ ــ خطوات البحث القياسى

ذكرنا من قبل أن أغراض البحث القياسى تتفاوت وفقا للاستخدامات المختلفة . على أن القواعد العامة التى يمكن اتباعها يمكن تلخيصها فى التالى :

(١) اختيار المتغيرات التى لابد من ادراجها فى البحث ثم تقسيمها الى متغيرات داخلية وخارجية كما هو الحال فى البحث النظرى ، ولو أن هذا التقسيم يكون مرجعه أساسا الى أهميته من الناحية الاحصائية . ومن المفيد هنا أن نتبع بعض الاساليب البيانية التى سنعالجها فى البند التالى .

(٢) جمع البيانات الاحصائية عن المتغيرات التى يقع الاختيار عليها . وقد تكون هذه البيانات عبارة عن سلسلات زمنية منشورة فى الكتب الاحصائية المختلفة ، أو قد يضطر الباحث الى تكوين مثل هذه السلسلات بطريقة معينة من واقع بيانات أخرى . فمثلا قد يحتاج وفقا لاحتياجات الدراسة الى قياس الدخل الحقيقى ، فيقوم بقسمة الدخل النقدى على رقم قياسى مناسب للاسعار ، أو قد يحتاج لقياس الانتاج الصناعى الكلى فيكوّن رقما قياسيا لهذا الانتاج ، وهكذا . كما أنه من الممكن أن يقوم بجمع البيانات مباشرة من مصادرها الأولية ، وطبيعى أن محاولة جمع سلسلة زمنية بالمشاهدة المباشرة يكون باهظ التكاليف فضلا عن أنه يتطلب مضى وقت طويل قبل أن يصبح فى الامكان اجراء البحث عليها ، ولذلك تكون هذه البيانات مستمدة من بحوث ميدانية فى شكل بيانات مقطعية cross - sectional data ، أى تتناول مقطعا يعترض المجرى الزمنى . ومن أمثلتها أبحاث القوى العاملة وميزانية الاسرة الخ . . . . وهذا النوع من البيانات يبرز التفاوت بين مفردات المجتمع .

وعملية جمع البيانات - سواء بالحصر الشامل أو بالعينة أو بتسجيل الاحداث حال وقوعها ، من العمليات النظامية التى تقوم بها الدولة والهيئات المختلفة أو الباحثون ويهتم بها علم الاحصاء الاقتصادى ، ولذلك فلن نتناول هذا الجانب من البحث فى دراستنا هذه . والشىء الذى يمكن الاشارة اليه هنا أن هذه المرحلة كثيرا ما تتدخل فى تسيير دفة البحث نحو وجهات متباينة . فالتعريفات التى تضعها الابحاث النظرية للمتغيرات المختلفة لا يلزم أن تتفق دائما مع الواقع ، وكثيرا ما يجد الباحث أنه من الضرورى ادخال بعض التعديلات على الصيغة النظرية ليأخذ فى الاعتبار طبيعة البيانات التى يمكن الحصول عليها عمليا . فقد يقتضى البحث أن تتوفر بيانات عن الدخل التصرفى للافراد فيتعذر عليه قياسه لعدم توفر البيانات ولذلك يستعيض عنه بالدخل القومى أو الدخل الخاص ويضطر الى تعديل نموذجه بما يتفق مع هذا التغيير . ومعنى هذا أن الباحث القياسى لا يكتفى بالالتجاء الى النظرية كما هى قائمة بل لابد له من بذل مجهود اضافى فى هذا الشأن هدفه هو الربط بين النظرية والواقع ، ولو اقتضى الأمر تحوير النظرية بما يحقق هذا الهدف .

(٣) بجانب تباين التعريفات النظرية للمتغيرات عن الواقع فان هناك جانب آخر للتعديل فى الصيغـــة النظرية للنموذج يرجع الى مدى انطباق فروض نموذج نظرى معين على الواقع العملى ، وضـــرورة تعديل هذه الفروض بما يتفق مع الواقع الذى تجرى دراسته . ويتناول هذا التعديل ادخـــال المتغيرات التى افترض النموذج ثباتها ولكن ثبت أنها تعرضت للتغير خلال فترة البحث وكان لها علاقة بالظاهرة المدروسة . ففى بعض نماذج الطلب والعرض تعتبر كل العوامل ثابتة فيما عــدا السعر والكمية ، ولكن معلوم من نماذج أخرى أن الدخل يؤثر على الطلب ، ولذا يجب ادخاله فى البحث اذا كان قد تغير خلال فترة الدراسة ، كما أنه يفترض ثبات حجم السوق فاذا تغير هذا الحجم نتيجة لتغير عدد الافراد (بتغير عدد السكان) وجب ادخال متغير جديد يمثــل عدد السكان فى الدراسة (أو استبعاد أثر تغيره) وهكذا .

كذلك يجرى التحليل النظرى أحيانا مجردا عن الزمن ، فيقال مثلا أن العرض يتأثر بالسعر ولكن لا يبين ما اذا كان هو السعر الحالى أو السابق ، لان قواعد التحليل الستاتيكى تستبعـد عنصر الزمن من الصورة . ولكن يحدث أحيانا أن يمضى وقت قبل أن يستجيب العرض للتغيرات فى السعر بسبب ضرورة مضى فترة بين بدء الانتاج وفقا للأسعار الجديدة وبين ظهور هـــذا الانتاج . فمن المعلوم أن الزراع عندما يصادفهم موسم طيب لمحصول معين يحاولون فـــى الموسم التالى زيادة انتاجهم منه ، وبذا فان المعروض فى موسم يكون محددا وفقا لسعـــر الموسم السابق ولا يمكن أن يستجيب فى الحال للسعر الجارى (خاصة اذا لم تكن السلعـــة قابلة للتخزين) . وفى بعض الاحيان تكون هناك فترات " ابطاء " times lags أقل وضوحا ، مما يتطلب جهدا من الباحث القياسى فى تحديدها ، لان البحث النظرى قلمـا يتعرض اليه بشكل قاطع .

(٤) بعد الاطمئنان الى اتفاق الفروض مع الواقع تظهر مشكلة صياغة العلاقات بصورة رياضية قابلـــة للتقدير الاحصائى . فالبحث النظرى يكتفى عادة بصياغة معادلات بالصورة العامة (الدالـــة) الممثلة فى المعادلة (١) . ولابد من كتابة هذه العلاقة بصورة صريحة : معادلة خطية أو مـــن الدرجة الثانية أو أسية الخ ... وسواء كان التحليل النظرى مصاغا بأسلوب لفظى أو بأسلــوب رياضى بالشكل (١) فان عملية صياغة العلاقة بصورة صريحة مثل

ص = أ + ب ع + حـ س (أ ، ب ، حـ ثوابت) (٢)

تكون من مسئوليات الباحث القياسى . ومن المعلوم أن أبسط الصيغ هو الصيغة الخطية وذلك سواء من الناحية الرياضية أو من الناحية الاحصائية غير أن الصيغة الخطية لا يلزم أن تكون هى الصيغة الحقيقية . فمثلا لو حسبنا معدل تغير ص بالنسبة الى ع لوجدنا أن

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \text{ب} = \text{ثابت}$$

. ولكن يحدث أحيانا أن يتغير هذا المعدل مع تغير ع نفسها فتغير السعر بوحدة لا يلزم أن يؤدى الى تغير الكمية المطلوبة دائما بنفس العدد من الوحدات أيا كان السعر الاصلى ، فمن المعقول مثلا أن يكون أثر تغير الوحدة هذا أكبر عندما يكون السعر الاصلى صغيرا وبالعكس .

غير أنه من الثابت رياضيا أنه لو كانت التغيرات فى المتغيرات (ع ، ص) محدودة فى حدود ضيقة فان هذا الاختلاف يكون طفيفا بحيث يمكن اعتبار الصورة الخطية تمثيلا مقبولا ضمن هذه الحدود . ومعنى هذا أن المعاملات أ ، ب ، حـ يمكن أن تختلف لو غيرنا الحدود لهذه المتغيرات ، وتظل المعاملات الجديدة صحيحة ضمن الحدود الجديدة — ومثل هذا الفرض يجعل من الممكن استخدام الصورة الخطية ضمن حدود معينة ، ولكنه يقصر فائدة تلك الصورة على هذه الحدود . وعلى ذلك اذا استخدمنا الصورة الخطية (لسهولتها) وجب تطبيقها بحذر خارج حدود المشاهدات ، مما يؤثر على المقدرة على التنبؤ . وسوف نعالج بعض مشاكل الصياغة الرياضية فى بند (٦) فيما بعد كما سنتعرض لها عند التطبيقات المختلفة .

(٥) ان الميزة الاساسية للاقتصاد القياسى هى أن أسلوب البحث فيه احصائى ، ومعنى هذا أنه ليس فقط تكون البيانات اللازمة للتحليل احصائية (وليست أرقاما افتراضية) بل ان أسلوب التحليل للنتائج هو الآخر أسلوب احصائى مبنى على نظرية التوزيعات الاحتمالية التى تعتبر أساسا للتحليل الاحصائى . والواقع أن معالجة هذا الجانب الاحصائى من مشكلة القياس بشكل يتفق مع طبيعة وظروف الابحاث الاقتصادية هو الذى يدعو الى انشاء علم مستقل بذاته هو علم الاقتصاد القياسى . أى أن هذا العلم يركز اهتمامه على المشاكل الاحصائية النظرية والعلمية الخاصة بقياس العلاقات الاقتصادية . ولذلك فهو فى جوهره أحد فروع علم الاحصاء .

ولو أن مجال التطبيق الذى يعالجه هو الميدان الاقتصادى . وسوف نعالج مشكلة الصياغة الاحصائية فى بند (٥) فيما بعد ، ولكن لنتصور أن هذه المشكلة قد حلت فما هو الاجراء الذى نتبعه بعد ذلك ؟

من الواضح أن المعاملات أ ، ب ، حـ بصورتها الرمزية لا تعنى أكثر من تمثيل العلاقة بشكل عام ولكن من الجائز أن تكون قيم هذه المعاملات بشكل يجعل العلاقة تبدو كالاتى :

ص = ١٠٠ ــ ٢ر١ ع + ١٧ر٠ س (٢′)

أو قد تكون بحيث تصبح المعادلة (٢) كالاتى

ص = ٢٠٠ ــ ٨ر٠ ع + ٢٢ر٠ س (٢″)

وهكذا ، يمكن أن نتصور عددا لا نهائيا من هذه المعادلات تختلف عن بعضها فى قيم الثوابت ، ولكنها اذا صيغت بصورة عامة لوجدناها جميعا تقع تحت الصورة العامة (٢) التى تمثل النموذج النظرى .

لنفرض أن المعادلة (٢′) تمثل اقتصادا معينا (أ) فى فترة معينة (رقم ١) ، بينما أن المعادلة (٢″) تمثل اقتصادا آخر (ب) فى نفس الفترة ، أو تمثل نفس الاقتصاد (أ) ولكن فى فترة أخرى (رقم ٢) . اذن كل من هاتين المعادلتين تبين خصائص هيكل اقتصادى معين وفقا لنموذج عام . ولذلك يمكن اعتبار كل منهما هيكل اقتصادى structure ينضم تحت النموذج العام (٢) . أى أن النموذج يمكن اعتباره مشتملا على جميع الهياكل الاقتصادية التى تحقق صورة معينة للعلاقات الاقتصادية .

اذن النموذج (٢) يشمل الهياكل (٢′) ، (٢″) وغيرها من المعادلات التى يمكن ردها الى الصورة (٢) . ولكن لو كانت المعادلة الخاصة باقتصاد آخر (حـ) هى

ص = ١٠٠ ــ ٢ر١ ع

أو ص = ٢٠٠ ــ ٨ر٠ ع + ٢٢ر٠ س + ٣ر١ ى

حيث ى متغير آخر ، فان كل منهما ينتمى الى نموذج آخر صورته هى

ص = أ + ب ع

أو ص = أ + ب ع + حـ س + م ى

وهذا يختلف عن (٢) ٠

وعلى ذلك فان المقادير أ ، ب ، حـ ليست ثابتة على وجه الاطلاق بل هى تأخذ قيما ثابتة فى حالة معينة ، وتختلف هذه القيم من حالة لاخرى دون أن يتعارض ذلك مع فكرة وحدة النموذج فى جميع الحالات ٠ ولذلك تسمى " معالم النموذج "parameters ومهمة الباحث القياسى هى تقدير estimation هذه المعالم لهيكل معين ، وقد استخدمنا كلمة " تقدير " وليس " حساب " حتى نبرز الفكرة الاساسية وهى أن الحساب الفعلى لهذه القيم يكاد يستحيل عمليا ، وأفضل ما نصبو اليه هى " تقدير " على قدر مقبول من الدقة للقيم الفعلية (المجهولة) ، وهذا يتفق مع العرف الاحصائى فى هذا الصدد ٠

والمعادلة التى نحصل عليها بالصورة (٢′) أو (٢″) تساعدنا على تبين ما اذا كانت الخصائص النظرية للنموذج تنطبق على الهيكل المدروس أم لا ٠ فمن الواضح أن

$$\frac{د ص}{د س} = ١٧ر٠ > صفر \quad ، \quad \frac{د ص}{د ع} = -٢ر١ < صفر$$

وهذا يتفق مع الفرض النظرى (١) ٠ ولكن نظرا لان التقدير تم بأسلوب احصائى فانه يكون عرضة لاخطاء عشوائية ، وعلينا أن نعرف هل يمكن أن تؤدى الاخطاء العشوائية الى ظهور تقدير موجب أو سالب بينما العكس هو الصحيح ٠ فمن الممكن مثلا ألا تكون هناك أى علاقة تربط الكمية بالدخل فى الهيكل الذى تمثله المعادلة (٢″) ولكن نتيجة أخطاء الصدفة العشوائية

فقد ظهر تقدير المعلمة ح = ٠٫٢٢ ، ولو أننا كنا أخذنا مجموعة أخرى من البيانات لنفس الاقتصاد لوجدنا أن تقدير هذه المعلمة هو ـ ٠٫٤ مثلا . وهكذا . ولذلك تنشأ الحاجة الى اختبار دلالة أو معنوية التقدير . وبذلك تستطيع نظرية الاختبارات الاحصائية لو أمكن صياغة المشكلة بشكل قابل لهذه الاختبارات ، وهنا يكمن جانب آخر من المشكلة الاحصائية فى البحث القياسى . ويعتبر اجتياز هذه الاختبارات بمثابة نجاح النظرية فى تفسير الوقائع أى أن هذه الاختبارات بمثابة اختبار لاتفاق النظرية مع الواقع .

(٦) الخطوة الاخيرة للبحث القياسى هو استخدام نتائج القياس بعد الاطمئنان الى معنويتها . وتختلف هذه الاستخدامات وفقا لظروف البحث . فبعضها يكتفى باختبار النظرية كما فى الفقرة السابقة ، وبعضها يسعى الى استخدام نتائج البحث فى اجراء تقديرات لبعض المتغيرات أو التنبؤ بها فى المستقبل ، كما أن بعضها يسعى الى استخلاص بعض النتائج التى تساعد على رسم السياسة الاقتصادية . وسوف نعالج هذه المشاكل المختلفة فى التطبيقات التى سنتناولها فيما بعد .

١/٤ ـ المشكلة الاحصائية فى البحث القياسى :

يتبين من الاستعراض السابق لخطوات البحث القياسى أن المشكلة الاحصائية تظهر فى المراحل المتعددة للبحث . فهى تظهر أولا عند جمع البيانات اللازمة للبحث وتهذيبها بشكل يتفق مع النظرية الاقتصادية ، وهى من قبيل المشاكل التى يعالجها علم الاحصاء الاقتصادى .

وهى تظهر ثانيا عند صياغة العلاقات الاقتصادية الرياضية بشكل يتفق مع احتياجات التحليل . فلو أن المعادلات الاقتصادية ظلت فى صورتها الدالية لكان من الممكن معالجتها بالطرق المعروفة فى الهندسة التحليلية : فيكفى أن نعرف نقطتين لكى نحسب منها معلمتى الخط المستقيم ص = أ + ب س وهما أ ، ب . وهكذا . ومن المعلوم أن التحليل الاحصائى يعتمد أساسا على صفات المتغيرات العشوائية فأين هى المتغيرات العشوائية فى العلاقات الاقتصادية ؟ فى الواقع يمكن تعيين مصدرين أساسيين لهذه المتغيرات :

(١) الاول هو اخطاء المشاهدة observation errors أو ما يسمى عموما بأخطاء المتغيرات errors in variables لنفرض أن العلاقة الدالية (مثل ١ تنطبق في الواقع تماما بحيث لا يوجد ما يدعو لاختلاف الفرض النظرى عن الواقع بأى شكل . ولكن مع ذلك نظرا لأن البيانات الاحصائية تجمع عادة فى ظروف لا تخضع لرقابة الباحث التامة فانها تحتوى عادة على أخطاء نتيجة عملية المشاهدة ، وترجع هذه الأخطاء الى خطأ مباشر فى القياس ، كأن يخطئ قياس الانتاج بسبب عدم امكان حصره كله أو استخدام مقاييس تقريبية بحيث لو تحسنت عملية القياس لأمكن القضاء على هذا الخطأ أو قد ترجع الأخطاء الى اختلاف المتغير المشاهد عن المتغير الواجب ادخاله نظريا فى البحث . فالنظرية مثلا تتحدث عن " سعر السلعة " فى سوق معين ولكن الذى يمكن مشاهدته عمليا هو متوسط أسعار مأخوذة فى نقط زمنية متباعدة (فى منتصف كل أسبوع مثلا) أو فى نقط متتالية وهكذا . أو قد لا يجد الباحث وسيلة لمشاهدة المتغير مباشرة فيلجأ الى الحصول على دليل يتناسب معه فى تغيراته . فالدخل الحقيقى ليس بالشئ الذى يمكن مشاهدته ، ولكن يمكن تقريبه بخارج قسمة الدخل النقدى على رقم قياسى للأسعار وهكذا .

مثل هذه الأخطاء قلما ينجو منها بحث قياسى ، ولذلك يجب معالجتها كجزء لا يتجزأ منه وطبيعى أن الفرض الأساسى هو أن الباحث يجب أن يبذل أقصى جهده للحصول على أصدق البيانات ، بما يتفق والتعريفات النظرية للمتغيرات . ومن المعقول أن نفترض أنه لو أمكن بذل جهد كاف للتخلص من هذه الأخطاء لأمكن تحقيق ذلك . ولكن قد يتطلب هذا جهدا وتكلفة فوق طاقة الباحث ، كما قد يتعذر تحقيقه للمشاهدات التاريخية الماضية ، ولذلك يمكن أن نعتبر أن هناك دائما قدرا من أخطاء المشاهدة فى واحد أو أكثر من المتغيرات فى هذه الحالة يتكون كل متغير اقتصادى من جزئين أحدهما حقيقى والآخر خطأ فاذا رمزنا الى الجزء الحقيقى بوضع علامة (٨) فوق رمز المتغير والى الخطأ برمز ر (ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ....) فان المتغيرات التى تظهر فى علاقة دالية مثل (٢) تكون هى المتغيرات الحقيقية أى أن المعادلة الحقيقية تكون هى :

$$\hat{\text{ص}} = \text{أ} + \text{ب}\,\hat{\text{ع}} + \text{ج}\,\hat{\text{س}}$$

أما المشاهدات الفعلية :

ص = ص̂ + ق١ ع = ع̂ + ق٢ س = س̂ + ق٣ (٤)

فلا يمكن أن تحقق هذه العلاقة بالضبط . ولو عوضنا بهذه القيم فى (٣) لوجدنا أن

(ص ــ ق١) = ا + ب (ع ــ ق٢) + جـ (س ــ ق٣)

أى أن ص = ا + ب ع + جـ س + ق (٥)

حيث ق = ق١ ــ ب ق٢ ــ جـ ق٣ (٦)

ولو أن أخطاء المشاهدة كانت قاصرة على المتغير ص فان

ص = ص̂ + ق = ا + ب ع + جـ س + ق

أى أن العلاقة الدالية تربط الجزء الحقيقى ص̂ بالمتغيرات المشاهدة ع ، س :

ص̂ = ا + ب ع + جـ س ، ص = ص̂ + ق (٧)

فاذا انعدمت أخطاء المشاهدة حتى فى ص وجدنا أن المعادلة (٢) تحقق المشاهدات مباشرة أما اذا وجدت أخطاء المشاهدة فسوف نفترض أنها تغيرات عشوائية تارة بالزيادة وأخرى بالنقص وأنها خالية من التحيز لأنه من الممكن القضاء على التحيز ان وجد .

(٢) الثانى وهو أخطاء المعادلات Errors in Eugtions أو ما تسمى بالهزات فى المعادلات Shocks تمييزا له عن الأخطاء التى تصيب القياس ، فهى تمثل اهتزازا يصيب المعادلة من نقطة الى أخرى بحيث أنه لو انعدمت أخطاء القياس لكانت المشاهدات (= المتغيرات الحقيقية) تهتز فى علاقتها مع بعضها البعض . ويرجع هذا النوع من الأخطاء الى عدة أسباب الأول هو أن العلاقة المفترضة بالرغم من أنها علاقة صحيحة ومطابقة للواقع إلا ان الأفراد فى تصرفاتهم الاقتصادية اليومية لا يلتزمون بها تماما بسبب وجود عوامل عرضية تؤثر فيها ـ كالأحوال الجوية أو الاضرابات أو الآفات الخ ... ولذلك نفترض أن هذه العوامل تتغير بصورة عشوائية ، لأنها لو اتصفت بالانتظام لأمكن التعبير عنها كمتغيرات داخل المعادلة .

كذلك قد تكون الصيغة المستخدمة تقريبية كما هو الحال فى المعادلات الخطية بحيث يمكن اعتبار أن المعادلة كان يمكن أن تحتوى على حدود من درجات أعلى فى المتغيرات ، ولكن نظرا لأننا

حددنا مجال التغير ضمن حدود صغيرة فهى اذن من قبيل التغيرات الطفيفة التى يمكن اهمالها عندما ترفع لقوى عالية ٠

أو قد تكون المعادلة ناقصة بمعنى أن هناك متغيرات أخرى يمكن ادراجها فيها ولكنها أهملت لضآلة تأثيرها أو لعدم انتظام التأثير فهو تارة بالزيادة وأخرى بالنقص وهكذا ٠ وأخيرا فقد يكون الفرض النظرى خاطئا بمعنى أن المتغيرات المأخوذة فى الاعتبار ليست هى التى تحدد تصرفات الأفراد فعلا ٠ وعلى ذلك فان بعض أخطاء المعادلات يمكن التجاوز عنها بينما البعض الآخر يدل على ضرورة تصحيح النظرية ولا بد من وسيلة للحكم بها اذا كانت الأخطاء المشاهدة يمكن اجازتها أو لا يمكن ٠

هذان النوعان من الأخطاء معروفان فى جميع الابحاث الاحصائية فى التطبيقات المختلفة ، فما هو الداعى الى تمييز الأساليب الخاصة بالبحث القياسى فى الاقتصاد عن غيره من الابحاث التطبيقية الأخرى ؟ الواقع أن هناك عاملان رئيسيان :

(١) الأول هو أن أخطاء المشاهدة الموجودة فى الأبحاث الأخرى تكون عادة من النوع المبين فى المعادلة (٧) أى أنها تكون قاصرة على متغير واحد هو ص الذى يعبر عن نتيجة التجربة باعتبار أن المتغيرات ع ، س هى عوامل خاضعة لرقابة الباحث بحيث يمكن تحديدها بدون خطأ ٠ غير أن الشائع فى الأبحاث الاقتصادية هو وجود أخطاء فى جميع المتغيرات بالشكل المفترض فى (٥) ، (٦) ٠ وهذا يعنى أن المتغير العشوائى ق (وهو غير مشاهد) يكون غير مستقل عن المتغيرات المشاهدة س ، ع كما هو مفترض فى كثير من الطرق المستخدمة فى الأبحاث الاحصائية فى الميادين الأخرى ٠

(٢) الثانى هو أن النموذج الاقتصادية تشمل عادة على عدة متغيرات متجاوبة يخصص لكل منها معادلة ولكن كل معادلة تشتمل على أكثر من متغير متجاوب واحد ، وجميع هذه المعادلات تتحقق فى آن واحد بحيث أن أى خطأ يصيب المعادلة التى تحدد أحد المتغيرات المتجاوبة ينتقل الى المتغيرات المتجاوبة الاخرى فى نفس المعادلة وبذلك نصل الى وضع مماثل لذلك الذى يصادفنا فى حالة وجود خطأ مشاهدة فى أكثر من متغير فى المعادلة ٠

كمثال لذلك نفرض أن س = الاستثمار ، ص = الاستهلاك ، ع = الدخل

اذن لدينا ٣ متغيرات وسنفترض أن الاستثمار س محدد من خارج النموذج (بواسطة الخطة مثلا) وأن المتغيرين ص ، ع متغيرين متجاوبين ٠ اذن تلزمنا معادلتان ، ولنفرض أننا كنا نعلم القيم الحقيقية لهاتين

المعادلتين :

المعادلة الأولى : تعريف الدخل بأنه مجموع الاستهلاك والاستثمار $\hat{ع} = \hat{ص} + \hat{س}$

المعادلة الثانية : الاستهلاك يتوقف على الدخل أى معادلة الاستهلاك $\hat{ص} = ١٠٠ + ٠ر٨ \hat{ع}$

هذه المعادلات تصح بين المتغيرات بدون أخطاء ولكن المتغيرات الفعلية تحتوى على أخطاء بسبب انحرافها عن هذه المعادلات . ونلاحظ أن المتغير س يحدد بقرار خارجى أى بدون خطأ بالمعنى المفهوم لأخطاء المعادلات . بينما ص ، ع المتحققين يمكن أن تصيبهما أخطاء نتيجة انحراف الواقع عن المعادلة . اذن لو عوضنا بالمتغيرات الفعلية فى معادلة الاستهلاك لوجب ادخال متغير ق للدلالة على هذا الخطأ فى سلوك الأفراد : من حيث أنهم لا يحددون دخلهم عند مستوى الدخل بالضبط بل ينحرفون بسبب عوامل أخرى . أما معادلة تعريف الدخل فهى صحيحة بحكم التعريف . أى أن النموذج يصبح .

ع = ص + س ، ص = ١٠٠ + ٠ر٨ ع + ق

لنفرض أن س = ١٠٠ وأن ق = صفر . من المعادلة الأولى يمكن التعويض فى الثانية فنجد أن ص = ١٠٠ + ٠ر٨ (ص + س) = ١٠٠ + ٠ر٨ ص + ٠ر٨ س

ومنها ٠ر٢ ص = ١٠٠ + ٠ر٨ س أى أن ص = ٥٠٠ + ٤ س

وبالتعويض عن س بالقيمة ١٠٠ اذن ص = ٥٠٠ + ٤ × ١٠٠ = ٩٠٠ بينما ع = ١٠٠٠

لنفرض الآن أن س = ١٠٠ ولكن ق = ١٠ فى هذه الحالة نجد أن حل المعادلتين يعطى

ص = ١٠٠ + ٠ر٨ (ص + س) + ق

ومنها ص = ٥٠٠ + ٤ س + ٥ ق

أى أن الخطأ فى المعادلة هو ١٠ (= ق) بينما الخطأ فى ص نفسها هو ٥٠ (= ٥ ق) وبما أن س محددة أصلا فلا بد أن باقى الخطأ وهو ٤٠ ذهب الى الدخل . ويتضح هذا من أن التعويض فى المعادلة الأخيرة عن س = ١٠٠ يعطى

ص = ٥٠٠ + ٤ × ١٠٠ + ٥ × ١٠ = ٩٥٠

وبالتعويض فى المعادلة التعريفية : ∴ ع = ص + س = ٩٥٠ + ١٠٠ = ١٠٥٠

وعلى هذا بان النموذج يصبح كالآتى :

ع = ص + س ـــ ١٠٥٠ = ٩٥٠ + ١٠٠

ص = ١٠٠ + ٠ر٨ ع + ق ـــ ٩٥٠ = ١٠٠ + ٠ر٨ × ١٠٥٠ + ١٠

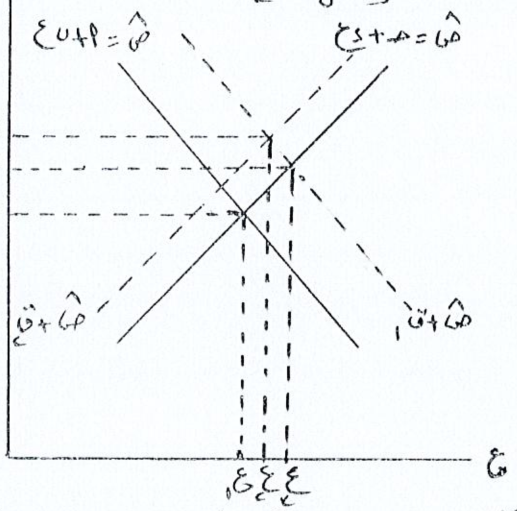
لنفرض مرة أخرى أن س = ١٠٠ بينما ق = ـــ ١٠

بتطبيق العلاقات السابقة نجد أن حل النموذج يعطى : ع = ٩٥٠ ، ص = ٨٥٠

وعلى هذا فان افتراض ان المتغيرين ع ، ص متجاوبين بينما س محدد جعل من المستحيل أن نفترض أن الدخل ع يتحدد بصورة مستقلة عن الخطأ ق الذى ظهر فى معادلة الاستهلاك ، لأننا لــــو افترضنا أن الدخل فى كل من الحالات السابقة ظل ثابتا عند ١٠٠٠ وكان الاستهلاك تـــارة ٩٠٠ وأخرى ٩٥٠ وثالثة ٨٥٠ لانهارت المعادلة التعريفية للدخل أو لكان من اللازم تغيير الاستثمار وهو عكس المفروض .

ولكى نوضح هذه الظاهرة بمثال آخر نفرض أن ص هى الكمية ، ع السعر

[شكل (١)]



ومعادلة الطلب هى ص = ا + ب ع + ق ١

ومعادلة العرض هى ص = ج + د ع + ق ٢

حيث ق ١ ، ق ٢ خطآن فى المعادلتين وهما بمثابة اضافات (جبرية) الى الحدين المطلقين ا ، ج بشكل يجعل كل خط يتحرك مواز لنفسه . ولنفرض أنه لــو انعدمت الأخطاء كانت قيمتى ص ، ع اللتين تحققـــا النموذج هما ع ١ ، ص ١ واضح من انتقال المعادلتين بسبب الخطأين ق ١ ، ق ٢

ان كلا من ص ، ع يأخذان قيمتين جديدتين وحتى لو كانت ق ٢ = صفر فان ظهور ق ١ يغير من كل من ص ، ع الى ص ٢ ، ع ٢ كما هو مبين فى الرسم . أى أن الخطأ ق ١ لا يؤثر فقط فى ص بل فى ع أيضا .

هذه الآنية للمعادلات وللأخطاء فيها تميز البحث القياسى الاقتصادى عن غيره من الأبحـــاث الاحصائية فى نواحى التطبيق الأخرى وتتطلب عدم معالجة أية معادلة اقتصادية بمعزل عن غيرها مـــن المعادلات ، عند تقدير معالم أية واحدة منها . أى أن فكرة النماذج الاقتصادية الكاملة لها أهميتهـا من حيث التحليل الاحصائى بجانب أهميتها الاقتصادية .

على أن وجود الأخطاء فى ذاته لا يكفى لتحويل البحث الى مشكلة احصائية تعالج بالطـــرق الاحصائية المعروفة ، فالاخطاء العشوائية ليست مجرد عوامل عرضية تحدث حيثما اتفق : بل ان الخاصية

الاساسية لها كأى متغير عشوائى هى أنها تأخذ قيما مختلفة باحتمالات محددة (ولو أنها قد تكون مجهولة) . وعلى ذلك فان الخطوة التالية لتعريف المتغيرات العشوائية فى البحث هى تحديد صفات التوزيع الاحتمالى الذى يفترض أنها تتوزع وفقا له : أى المتوسط والتباين ، ودالة التوزيع بوجه عام ، وفى بعض الأحيان يكفى تعيين المتوسط والتباين وفى أحيان أخرى يلزم تعيين دالة التوزيع نفسها وهى عادة تكون دالة التوزيع المعتاد .

ونظرا لان تقديرات المعالم تحسب من المشاهدات ، التى تكون بحكم التحليل السابق دوالا فى الأخطاء ، فان التقديرات نفسها تكون دوالا فى متغيرات عشوائية ، وبالتالى يمكن بحث خصائصها العشوائية الأمر الذى لا مفر منه اذا أريد اختبار معنوية هذه التقديرات .

هذه الخطوات هى الخطوات المألوفة فى معالجة مشاكل التقدير الاحصائى وهى :

(١) مشكلة تحديد صفات التوزيع الاحصائى للمتغيرات العشوائية الأساسية .

(٢) مشكلة التقدير لمعالم النموذج بعد تحويلها الى معالم لهذا التوزيع أى جعلها دوال فى معالمه الأصلية .

(٣) مشكلة ايجاد توزيع للتقديرات مستمدا من التوزيع الأصلى ووفقا لطريقة التقدير وبالتالى استنتاج الاختبارات اللازمة للتقديرات .

٥/١ ـ الصياغة الرياضية للعلاقات الاقتصادية :

ذكرنا من قبل أن الصيغة النظرية للمعادلات الاقتصادية تكون عادة فى شكل دالة غير محددة مثل (١) ، وأن عملية القياس تتطلب وضع هذه الدالة فى صورة صريحة ، وأبسط الصور الممكنة هى صورة العلاقة الخطية (٢) . ويرجع هذا الى أنه يمكن فى حدود ضيقة أن نقرب أى دالة متصلة بخط مستقيم كما فى الشكل التالى (*)

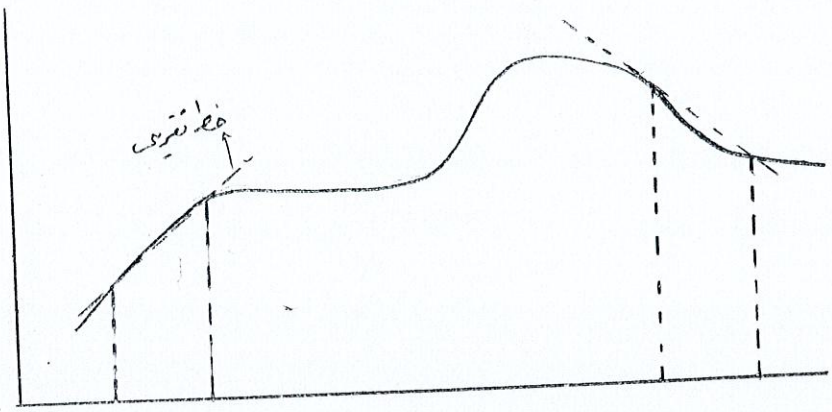
(*) اذا كانت ص = د (س) وكان أ مقدار ثابت بحيث أن ش = س ـ أ فان ص = د (أ + ش) ويمكن كتابتها كالآتى (حسب نظرية تايلور)

$$ص = د(أ) + ش\,د'(أ) + \frac{ش^{٢}}{٢}\,د''(أ) + \frac{ش^{٣}}{٦}\,د'''(أ) + \ldots\ldots$$

فاذا اعتبرنا أن ش صغيرة فاننا نستطيع أهمال قواها العليا وبوضع د (أ) = ب ، د'(أ) = جـ

فان ص = ب + جـ ش (بالتقريب)

[شكل (٢)]



هذه الصورة المبسطة لها ميزتها فى التحليل الرياضى نفسه ، ولو أنها تفترض قيودا على معدلات التغير لا يلزم أن تكون صحيحة دائما ، ولكن أهم من ذلك أن غالبية النظريات الاحصائية تكون أيسر فى التطبيق لو أن المعادلة كانت بهذه الصورة الخطية . ونلاحظ أن هناك نوعان رئيسيان من المعادلات الخطية :

(١) المعادلة الخطية المتجانسة : لنفرض أن ص تتوقف على س بحيث تتناسب معها باستمرار أى

ص : س = ½ : ١ معنى هذا أن :

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{½}{١} = \frac{١}{٢} \quad \text{أى ص} = ½ \text{ س}$$

أو عموما

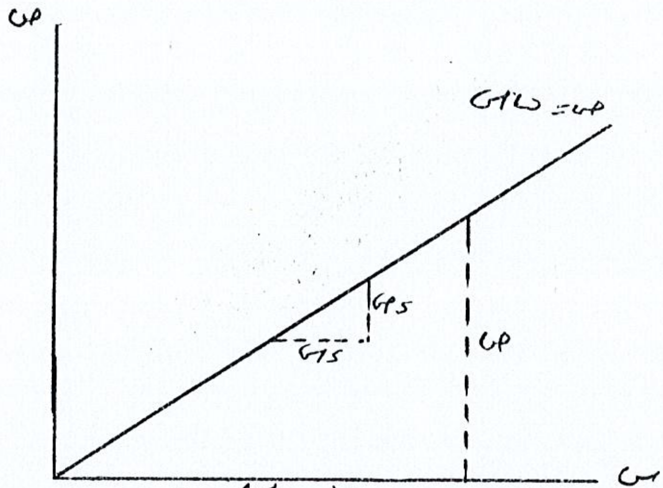
$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ب}}{١} \quad \therefore \text{ص} = \text{ب س}$$

فمثلا لو اعتبرنا ص هى المستخدم من عنصر معين لانتاج ناتج معين حجمه س فان ب تمثل المستخدم لانتاج ١ أى وحدة واحدة (فى المتوسط) وتعتبر فى هذه الحالة "معاملا" فنيا للاستخدام .

ويلاحظ أن ب تمثل أيضا ما يلزم من العنصر لانتاج وحدة اضافية . أى أنها ليست فقط معاملا متوسطا بل وأيضا معاملا حديا : $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \text{ب}$. ولذلك فان التجانس يعنى تساوى المعامل فى المتوسط وعند الحد . وبذلك نجد أن :

$$\text{ص} = \text{ب س} \quad \therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{ب} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} \qquad (٨)$$

وتكون هذه المعادلة ممثلة بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل (شكل ٣)



[شكل (٢) المعادلة الخطية المتجانسة]

(٢) <u>المعادلة الخطية غير المتجانسة</u> : المعادلة (٨) تعتبر حالة خاصة من المعادلة

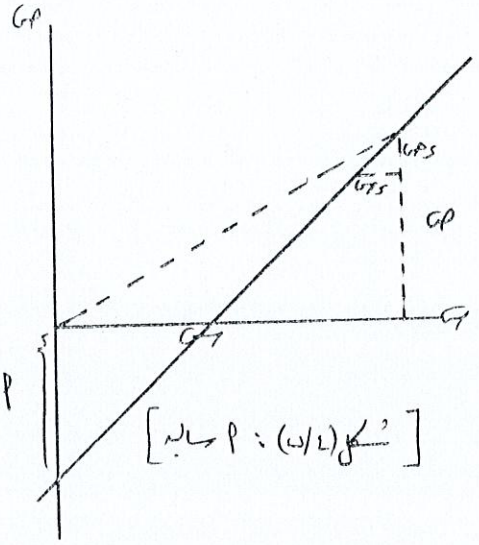
ص = ا + ب س (٩)

فيها ا = صفر لأن ا تمثل الجزء المقطوع من المحور الرأسى والخاصية الأساسية لهذه المعادلة أنه اذا لم تكن ا = صفر

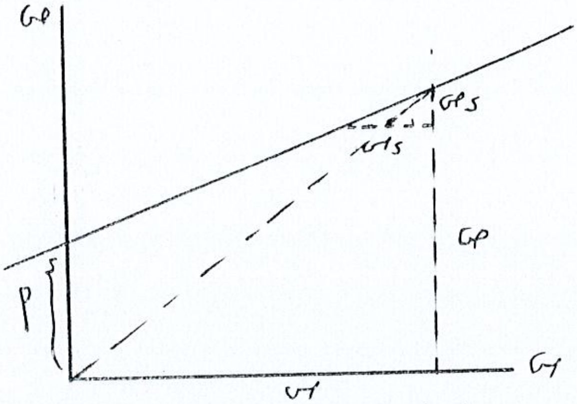
فان المعامل المتوسط لا يساوى المعامل الحدى . فاذا كانت ا سالبة فان المتوسط يكون أكبر من الحدى وبالعكس اذا كانت ا موجبة لأن :

$$\text{الحدى} = \frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}} = \text{ب} \quad ، \text{المتوسط} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ا}}{\text{س}} + \text{ب} \qquad (١٠)$$

وواضح أن $\frac{\text{ا}}{\text{س}}$ يتناقص عدديا كلما زادت س ، فاذا كانت ا سالبة (وباعتبار س موجبة) فـان المتوسط ينقص عن الحدى بالمقدار $\frac{\text{ا}}{\text{س}}$ الذى يتناقص تدريجيا وهذا يتضح من الشكل التالى



[شكل (٤/ب) : م سالبة]



[شكل (٤/أ) : م موجبة]

فالخط الواصل من نقطة الأصل الى نقطة على المعادلة ميله $= \frac{ص}{س}$ وهذا الخط أسفل المعادلة عندما م موجبة (شكل ٤/أ) أى أنه أشد ميلا منها . وهو أعلى المعادلة عندما م سالبة (شكل ٤/ب) أى أنه أقل ميلا منها . ولو رجعنا الى شكل (٣) لوجدنا أن الخط ينطبق على منحنى المعادلة ولذا تساوى الاثنان عند انعدام م .

وعلى هذا فلو أننا افترضنا أن المعامل الفنى للانتاج يزيد بالنسبة للوحدة الاضافية عنه للوحدات الأصلية لكان معنى هذا أن الحدى أعلى من المتوسط وهذه حالة م سالبة . أى أن افتراض شكل معين للمعادلة له نتائج اقتصادية لا بد من التأكد من صحتها أولا قبل قبول هذا الشكل .

على أن الصورة الخطية ليست هى الصورة الوحيدة التى يمكن استخدامها فمن الممكن أن نعتبر أن لدينا متغيران ك ، ع العلاقة بينهما كالآتى :

$$ك = م\, ع^{ب} \qquad (١١)$$

حيث م ، ب ثوابت . واضح أننا لو أخذنا اللوغاريتمات فان

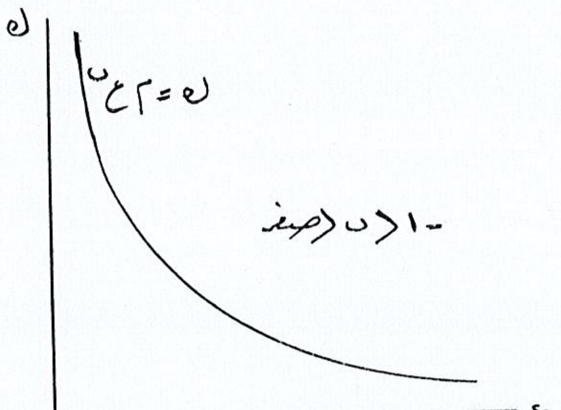
$$لو\ ك = لو\ م + ب\ لو\ ع \qquad (١٢)$$

أى أن المعادلة أصبحت خطية فى اللوغاريتمات بدلا من قيم المتغيرات نفسها وفى هذه الحالة نجد بتطبيق قواعد التفاضل أن :

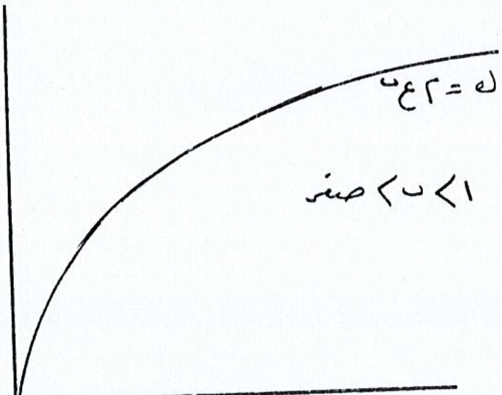
$$\frac{\text{د ك}}{\text{د ع}} = \frac{\text{د}\,(\text{م ع}^{\text{ب}})}{\text{د ع}} = \text{م} \times \text{ب ع}^{\text{ب}-1} = \text{ب} \times \text{م}\,\frac{\text{ع}^{\text{ب}}}{\text{ع}} = \text{ب} \times \frac{\text{ك}}{\text{ع}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{د ك}}{\text{د ع}} = \text{ب}\,\frac{\text{ك}}{\text{ع}} \qquad (١٣)$$

أى أن النسبة بين المعامل الحدى والمعامل المتوسط ثابتة وتساوى ب . فاذا كانت ب موجبة وأقل من الوحدة كان الأول أقل من الثانى. مما يعنى تضاؤل الثانى كلما كبر ب ع ،وتتزايد ك مع ع ولكن بمعدل متناقص (شكل ٥/أ) . كذلك اذا كانت ب سالبة وأقل عدديا من الوحدة فان ك تتناقص مع تزايد ع ، ولكن بمعدل متناقص (شكل ٥/ب)



شكل (٥/ب)



شكل (٥/أ)

أما اذا كانت ب أكبر من الوحدة فان المنحنى يأخذ الشكل الرائى أى يتصاعد بمعدل متزايد ويكون محدبا من أسفل وليس من أعلى كما فى شكل (٥/أ) فاذا كانت سالبة فان المنحنى يأخذ شكلا مماثلا للشكل (٥/ب) ولو أن معدل التناقص يكون أسرع.

فاذا رجعنا الى المعادلة (١٢) وجدنا أنها تشبه (٩) حيث

ص = لو ك   س = لو ع   أ = لو م   (١٤)

معنى هذا أننا نستطيع أن نستفيد من سهولة المعادلات الخطية لو استخدمنا لوغاريتمات المتغيرات بدلا

من المتغيرات نفسها والواقع أن المعادلة (١٣) تبين أن " مرونة " المنحنى ثابتة لأن المرونة = $\dfrac{\text{المعامل الحدى}}{\text{المعامل المتوسط}}$ · وبعبارة أخرى فان معدل التغير النسبى وليس المطلق يكون ثابتا على مثل هذه المنحنى · وهذا الفرض شائع الاستخدام فى كثير من الظواهر الاقتصادية مثل الطلب والانتاج ·

واذا كانت ص تتوقف على أكثر من متغير واحد ع ١ ، ع ٢ مثلا فان امتداد (١١) هو

$$\text{ك} = \text{م}\ \text{ع}_{١}^{\text{ب}_{١}}\ \text{ع}_{٢}^{\text{ب}_{٢}} \qquad (١١')$$

ومنها

$$\text{لو ك} = \text{لو م} + \text{ب}_{١}\ \text{لو ع}_{١} + \text{ب}_{٢}\ \text{لو ع}_{٢} \qquad (١٢')$$

أى أن المعادلة خطية أيضا فى اللوغاريتمات وبذلك تشبه (٢)

هناك فرض آخر يقضى بأن العلاقة بين ك ، ع يمكن أن تأخذ الشكل الآتى

$$\text{ك} = \text{م}\ \text{جـ}^{\text{ع}} \qquad (١٥)$$

أى أن ع تكون فى الأس بعكس الفرض (١٢) · وبأخذ اللوغاريتمات فان

$$\text{لو ك} = \text{ا} + \text{ب ع} \quad (\text{ا} = \text{لو ا} \ ،\ \text{ب} = \text{لو جـ}) \qquad (١٦)$$

وتبين هذه المعادلة أنه اذا أخذنا (١٥) كأساس فانه يمكن تحويلها الى صورة خطية تربط لوغاريتم ك مع قيم ع وليس مع لوغاريتم ع · ومرة أخرى نجد أنه بتحويل مناسب أمكن الاعتماد على الصورة الخطية أى أن المعادلات الخطية يمكن أن يتسع نطاقها ليشمل عدة أنواع من العلاقات مما يزيد فى قيمتها التحليلية الأمر الذى يضعف الاعتراضات التى يمكن توجيهها لهذه الصورة البسيطة ·

واذا فاضلنا (١٦) وجدنا أن :

$$\frac{\partial\,\text{لوك}}{\partial\,\text{ك}} = \frac{\partial\,\text{لوك}}{\partial\,\text{ع}} \times \frac{\partial\,\text{ك}}{\partial\,\text{ع}} = \frac{\partial\,\text{ك}}{\partial\,\text{ع}} \times \frac{١}{\text{ك}}$$

$$\therefore \quad \frac{d\,\text{ك}}{d\,\text{ع}} \times \frac{١}{\text{ك}} = \text{ب}$$

$$\therefore \quad \text{المرونة} = \frac{\partial\,\text{ك}}{\partial\,\text{ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}} = \text{ب ع} \qquad (١٧)$$

ومعنى هذا أن المرونة تتغير مع ع · فاذا كانت ب موجبة كانت المرونة متزايدة بتزايد ع ، وبالعكس اذا كانت سالبة أو فى هذه الحالة الأخيرة تكون جـ أقل من الوحدة (ولكنها موجبة)

يتلخص الموقف اذن فى الآتى :

من الممكن الاعتماد على الصورة الخطية للعلاقات سواء اعتبارها متجانسة أو غير متجانسة ويمكن أن تربط هذه الصورة بين

(١) المتغيرات الأصلية نفسها ، مما يعنى تناسب التغيرات المطلقة أى ثبات معدل التغير المطلق ·

(٢) لوغاريتمات المتغيرات ، مما يعنى تناسب التغيرات النسبية أى ثبات المرونة ·

(٣) لوغاريتم المتغير التابع والمتغيرات المتبوعة مما يعنى تناسب التغير النسبى فى التابع مع التغير المطلق فى المتغيرات المتبوعة ·

ولذلك فان المعادلات الخطية تغطى حالات عديدة من العلاقات التى يمكن أن تصادفنا فى الدراسات الاقتصادية ·

٦/١ ــ الرسوم التوضيحية للبحوث :

ان طرق القياس فى الاقتصاد تتميز بأنها تهتم بالترابط القائم بين العلاقات الاقتصادية ، بحيث يضطر الباحث الى دراسة كافة جوانب المشكلة التى يعالجها قبل أن يقوم بتقدير معاملات العلاقة الخاصة التى تهمه · فهو قد يكون مهتما أساسا بدراسة علاقة الطلب على سلعة معينة ، ولكن وجود علاقات أخرى تتفاعل معها فى الحياة العملية مثلا علاقة العرض تتطلب منه تبين العوامل التى تؤثر فى كل من هذه العلاقات الأخرى · وكما ذكرنا من قبل فان الباحث يجب أن يتأكد من فروض الصيغة النظرية التى يبنى عليها البحث ، لذلك لا بد من عمل تصوير كامل للموقف يساعده على تبين العلاقات المختلفة على توزيع المتغيرات بين داخلية وخارجية وبيان أثر التتابع الزمنى ومجراه فى هذه العلاقات.

ومن الممكن أن يبدأ الباحث هذا التوزيع فى شكل جداول يدرج فى خانة منها أسماء المتغيرات الداخلية وفى أخرى أسماء المتغيرات الخارجية ، ويسجل فى قائمة المعادلات التى ترد فى ذهنه من واقع النظريات المختلفة · غير أنه من الأفضل أن يكون هذا التصوير بيانيا بحيث يقوم برسم خريطة توضيحية تساعده على تحديد العلاقات المختلفة وتعتبر بمثابة وسيلة للتفكير فى عناصر البحث ·

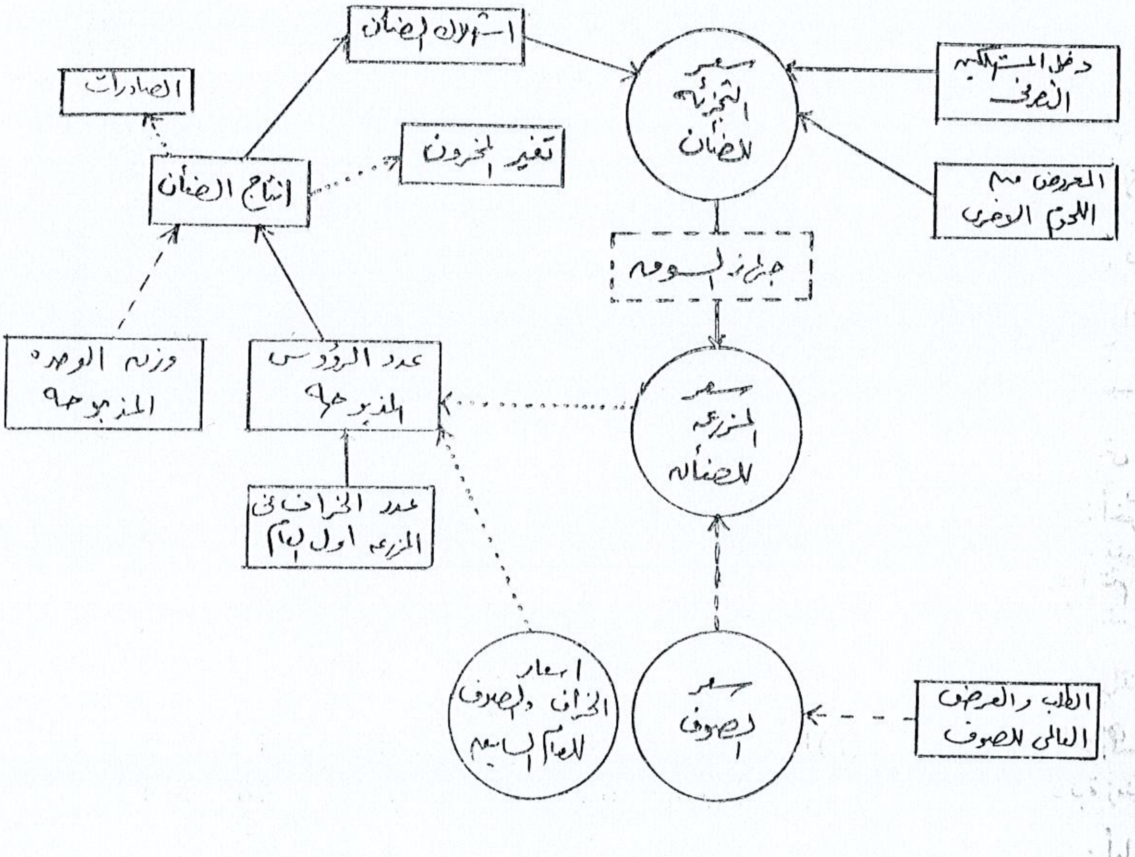
مثل هذه الخرائط التوضيحية flow - charts تتوقف على موضوع البحث ، ولذلك سنكتفى

هنا يذكر بعض الأمثلة لبيان طريقة العمل ٠

فالشكل التالى مبنى على بحث قام به مكتب الاقتصاد الزراعى بوزارة الزراعة الأمريكية بشأن طلب وعرض اللحم الضأن ٠ ويلاحظ أن القاعدة العامة للرسم كالآتى :

(١) الأسعار تبين بدوائر بينما القيم والكميات تبين بمستطيلات ٠ أما المؤسسات السوقية فتبين بمستطيلات بخطوط متقطعة ٠

(٢) الأسهم تبين اتجاهات التأثير ٠ فالخطوط المتصلة تبين العوامل الرئيسية والخطوط المتقطعة تبين العوامل الأقل أهمية والخطوط المنقطة تبين العوامل الضئيلة الأهمية أو المشكوك فى أمرها ويبين اتجاه السهم اتجاه التأثير ٠



شكل (٦) الرسم التوضيحى للطلب والعرض من اللحم الضأن

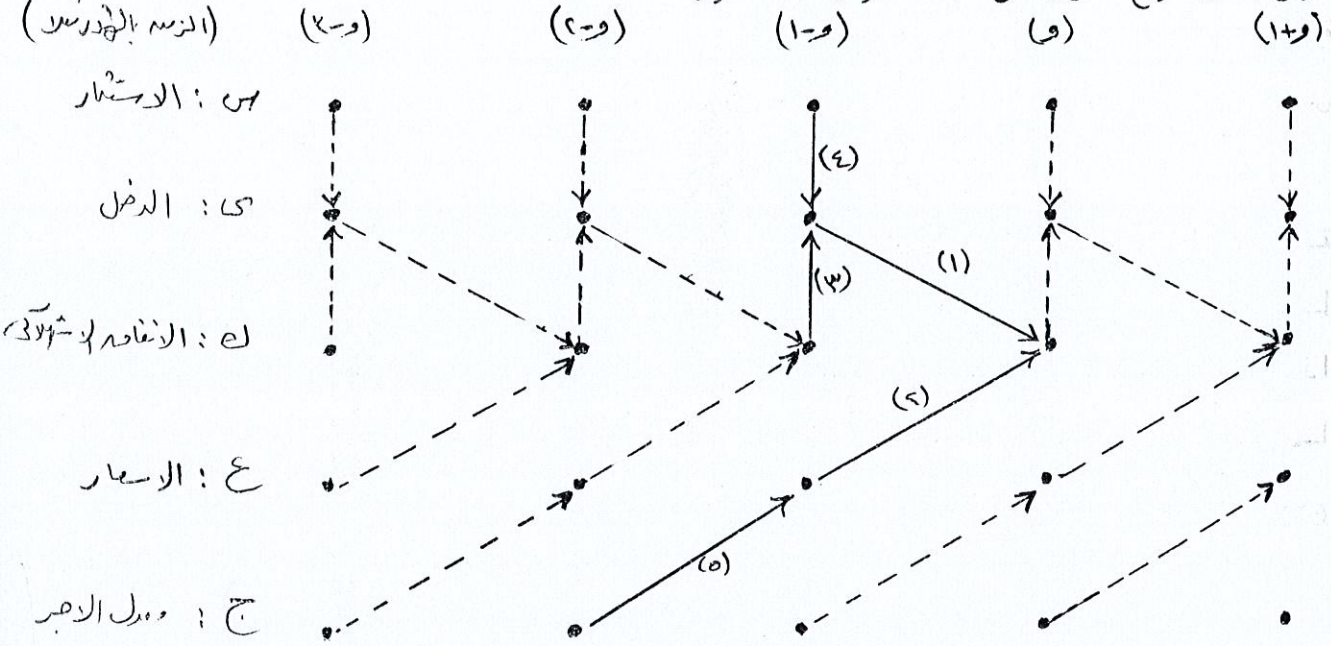
لنبدأ من أعلى الرسم ، فنلاحظ أن هناك مستطيلا خاصا باستهلاك اللحم الضأن هذا الاستهلاك أو بعبارة أصح ، المعروض للاستهلاك هو عبارة عن جزء من الانتاج ، ولذلك فان هناك سهم من الانتاج الى الاستهلاك ٠ ولاستتمام الصورة يخرج سهمان متقطعان من الانتاج أحدهما للتغير فى المخزون والآخر للصادرات ، وقد رسما متقطعين لأنهما من العوامل الثانوية بالنسبة للبحث نفسه ٠ ولكن لا بد من تتبع الانتاج نفسه ، فنجد أنه يتأثر بعدد الرؤوس المذبوحة ومتوسط وزن الرأس المذبوحة ، ولما كان عدد الرؤوس المذبوحة يتوقف على العدد الموجود فى أول السنة فان السهم المتصل يشير الى هذه العلاقة ٠ ومن جهة أخرى فقد يتأثر العدد المخصص للذبح (والذى تمت تربيته لهذا الغرض) بمستوى الأسعار السابق لكل من الخراف والصوف ، وهذا هو المبين بالسهم المنقط ٠ فارتفاع السعر النسبى للصوف فى العام الماضى يجعل المنتجين يقبلون على تخصيص عدد أكبر لأغراض الصوف بدل الذبح وبالعكس ٠

بهذا الشكل نكون قد رددنا الكمية المعروضة للاستهلاك الى عدد الخراف فى أول العام وأخذنا فى الاعتبار العوامل الثانوية مثل التغير فى المخزون والصادرات والأسعار السابقة ٠ ونريد الآن أن ننتقل الى تفاعل هذا العرض مع الطلب ، فنلاحظ أن تصرف المستهلكين يتوقف الى حد كبير على دخلهم التصرفى ، ومن هذا التفاعل يتحدد سعر التجزئة للحم الضأن الذى يتأثر أيضا بالمعروض الأنواع الأخرى من اللحوم ٠ وعن طريق جهاز السوق يتم تحديد سعر المزرعة للضأن وفقا لسعر التجزئة ، أى بعبارة أخرى يجب أن نأخذ فى الحسبان عند مناقشة سعر المزرعة أثر سعر التجزئة (وكل العوامل التى تؤثر فيه) وفى نفس الوقت أثر سعر الصوف الذى يتأثر بالطلب والعرض العالمى للصوف ٠ ومن جهة أخرى فان سعر المزرعة للضأن يؤثر فى عدد الرؤوس المذبوحة خاصة اذا قورن بالسعر الماضى ٠ وبهذا تتم حلقات البحث ٠

وواضح أن هذا النموذج يحتوى على متغيرات خارجية هى دخل المستهلكين والمعروض من اللحوم الأخرى والطلب والعرض العالميين للصوف ووزن الوحدة المذبوحة كما أن هناك متغيرات محددة زمنيا وليست فى حاجة الى تفسير مثل أسعار العام السابق وعدد الخراف الموجودة فى أول العام ٠ أما باقى المتغيرات فمتجاوبة لأنها تتبادل التأثير مع بعضها البعض ٠ ويمكن اذن أن نصوغ العلاقات اللازمة لتفسير كل منها ٠

هناك نوع آخر من الرسوم التوضيحية يقترحه تينبرجن لمعالجة العلاقات الزمنية هو

<u>مجموعات الأسهم</u> Arrow System والقاعدة العامة تماثل تلك التى استخدمت فى شكل (٦) حيث تشير الاسهم الى اتجاهات العلاقات بين المتغيرات المختلفة ، ولكن يضاف لذلك ادخال عنصر الزمن بشكل صريح حتى يتمكن تتبعه فترة بعد الأخرى ٠



[شكل (٧) مجموعات الاسهم]

ففى شكل (٧) نخصص سطرا لكل متغير وعمودا لكل فترة زمنية مأخوذة بالتسلسل فاذا اعطينا (و) قيمة معينة فاننا نستطيع تتبع اتجاهات تأثير المتغيرات فى الفترات السابقة واللاحقة ٠ فالانفاق الاستهلاكى فى فترة معينة يتأثر بالدخل السابق (أى فى الفترة السابقة) وهنا يمثل بالأسهم التى تنتقل من الدخل فى فترة الى الاستهلاك فى تاليتها ٠ كذلك يتأثر الانفاق بالأسعار فى الفترة السابقة ، ولذلك نرسم سهما مماثلا ٠ وعلى هذا تكون لدينا العلاقة

$$ك_و = \text{دالة فى } (ى_{و-١} ، ع_{و-١})$$

وتتمثل بالسهمين (١) ، (٢) وجميع الاسهم المماثلة فى الفترات المتتالية

ولكن الاكتفاء بهذه العلاقة يتطلب اعتبار الدخل والأسعار متغيرين محددين لا يتأثران بالاستهلاك فى نفس الفترة أو فترات سابقة ٠ ولكن معلوم أن الدخل فى فترة معينة يتكون من الانفاق الاستهلاكى فى نفس الفترة والاستثمار فى نفس الفترة أى :

$$ى_و = ك_و + س_و$$

ومعنى هذا ان الدخل $ى_{و-١} = ك_{و-١} + س_{و-١}$ وهذا يتمثل بالسهمين (٣) ،(٤) وجميع الأسهم المماثلة . وهذه الأسهم لا تربط فترة بسابقتها بل تربط متغيرات فى نفس الفترة ومن الممكن أن نبحث عن العوامل التى تحدد الأسعار ، فنجد مثلا أنها تتأثر بتكاليف الانتاج فى الفترة السابقة ممثلة بمعدلات الأجور ، وهذا يتمثل بالسهم رقم (٥) والأسهم المماثلة .

وعلى هذا يمكن أن نستمر فى اضافة المتغيرات لتفسير المتغيرات التى ظهرت فى الرسم واضافة أسهم لبيان اتجاهات العلاقات . وتعتبر المتغيرات التى تخرج منها أسهم دون أن يتجه اليها أى سهم متغيرات خارجية بينما تلك التى يتجه اليها سهم واحد على الأقل متغيرات داخلية . فاذا أخذنا القيم الجارية للمتغيرات الداخلية فى فترة (و) اعتبرت متغيرات متجاوبة وخصصنا لكل منها معادلة تضم جميع المتغيرات التى تتجه الأسهم منها الى ذلك المتغير . وبذلك تستكمل النموذج المراد دراسته .

١/٧ ــ تعريف الاقتصاد القياسى :

يتبين من الدراسة السابقة للبحث القياسى للاقتصاد أن أهم ما يميز هذا النوع من الأبحاث هو :

(١) اعتمادها على فروض نظرية مستمدة من الدراسات النظرية فى علم الاقتصاد .

(٢) الصياغة الرياضية لهذه الفروض بشكل مبسط يراعى فيه استكمال جميع العلاقات المتداخلة بين المتغيرات .

(٣) استخدام الأسلوب الاحصائى المناسب لتقدير معالم هذه العلاقات .

وعلى ذلك تعريف علم الاقتصاد القياسى بأنه " العلم الذى يدرس تكوين النظريات الاحصائية اللازمة لدراسة العلاقات الاقتصادية المصاغة فى أسلوب رياضى والمبنية على فروض نظرية اقتصادية معينة "

ولذلك يعتبر البعض أن هذا العلم هو بمثابة مزيج من علوم الرياضة والاقتصاد والاحصاء ، وهذا يعنى أن الاكتفاء بواحد أو اثنين من هذه الجوانب لا يؤدى الى " الاقتصاد القياسى " بمعناه الدقيق . والسؤال الذى يتبادر الى الذهن هو : ما الذى يجعل هذا المزيج الجديد ضرورة من ضرورات البحث العلمى ، وما الذى يجعله يفضل غيره من وسائل التحليل ؟

للاجابة على هذا السؤال نتصور أن باحثا أراد تفسير ظاهرة معينة لاحظها من مجموعة من البيانات : مثلا نمو الدخل . من الممكن أن يرسم سلسلة زمنية للدخل ويوفق لها خطا اتجاه عام ويحسب معدل اتجاه معين وهو يستعين فى ذلك بالصياغة الرياضية وأدوات التحليل الاحصائى وهو يعالج ظاهرة اقتصادية ، ومع ذلك لا يرتقى البحث الى مستوى البحث القياسى لأن التفسير الذى يقدمه للظاهرة لم يستمد من نظرية اقتصادية محددة المعالم .

بالمثل لو لاحظنا بمقارنة احصاءات عدد من الظواهر وجود علاقات بينها : كأن نجد أن عدد السكان يزيد والدخل يزيد معه ، فان دراسة هذه العلاقة بالأسلوب الاحصائى لا يضمن أن نحصل على علاقة ذات مغزى علمى دقيق ، لأن هذين المتغيرين يزيدان مع الزمن مثلا مما يؤدى الى العلاقة المشاهدة . ولنتجنب مثل هذه العلاقات الظاهرية لا بد من الرجوع الى النظرية الاقتصادية لنستمد منها العلاقات الواجب دراستها .

يضاف الى هذا أن المشاكل الاحصائية التى تتولد عن الأبحاث القياسية فى الاقتصاد لها طابع يميزها عن تلك التى تصادف الباحث فى فروع المعرفة الأخرى (انظر بند ٤) ، ولا تظهر هذه المشاكل بوضوح الا عندما نبدأ فى صياغة العلاقات على أساس النظريات الاقتصادية . ولذلك كان الامتداد الطبيعى الذى اتجه اليه علم الاقتصاد القياسى هو تعديل النظرية الاحصائية بما يتفق مع الاحتياجات الاقتصادية . فالاكتفاء بالمعالجة الرياضية للعلاقات الاقتصادية لا يجعل البحث معدا للتطبيق العملى المباشر ، وهذه المعالجة تأخذ بها النظرية الاقتصادية فى بعض مراحلها أو ربما يخصص لها علم مستقل هو علم الاقتصاد الرياضى Mathematical Economics وهذا ليس بالأمر المستحدث ، بل لقد ساعد البحث الرياضى فى الاقتصاد فى بعض الأحيان على جعل التطبيق العملى بعيد المنال .

وسوف نبدأ بمعالجة الأساليب الاحصائية المعروفة خاصة نظرية الانحدار ثم ننتقل منها الى بعض الأساليب التى يختص بها الاقتصاد القياسى . وأخيرا نضرب أمثلة لعدد من التطبيقات القياسية فى فروع الاقتصاد المختلفة لكى يسترشد بها القارئ فى دراسته الخاصة .

جدول رقم (٣ / ب)

توزيـــع نسبـة التبايـــن " ف " بمستوى ثقـــــة ٩٩ %

ن٢ \ ن١	١	٢	٣	٤	٥	٦	٨	١٢	٢٤	١٠٠
٢	٩٨ر٤٩	٩٩ر٠٠	٩٩ر١٧	٩٩ر٢٥	٩٩ر٣٠	٩٩ر٣٣	٩٩ر٣٦	٩٩ر٤٢	٩٩ر٤٦	٩٩ر٤٩
٣	٣٤ر١٢	٣٠ر٨٢	٢٩ر٤٦	٢٨ر٧١	٢٨ر٢٤	٢٧ر٩١	٢٧ر٤٩	٢٧ر٠٥	٢٦ر٦٠	٢٦ر٢٣
٤	٢١ر٢٠	١٨ر٠٠	١٦ر٦٩	١٥ر٩٨	١٥ر٥٢	١٥ر٢١	١٤ر٨٠	١٤ر٣٧	١٣ر٩٣	١٣ر٥٧
٥	١٦ر٢٦	١٣ر٢٧	١٢ر٠٦	١١ر٣٩	١٠ر٩٧	١٠ر٦٧	١٠ر٢٧	٩ر٨٩	٩ر٤٧	٩ر١٣
٦	١٣ر٧٤	١٠ر٩٢	٩ر٧٨	٩ر١٥	٨ر٧٥	٨ر٤٧	٨ر١٠	٧ر٧٢	٧ر٣١	٦ر٩٩
٧	١٢ر٢٥	٩ر٥٥	٨ر٤٥	٧ر٨٥	٧ر٤٦	٧ر١٩	٦ر٨٤	٦ر٤٧	٦ر٠٧	٥ر٧٥
٨	١١ر٢٦	٨ر٦٥	٧ر٥٩	٧ر٠١	٦ر٦٣	٦ر٣٧	٦ر٠٣	٥ر٦٧	٥ر٢٨	٤ر٩٦
٩	١٠ر٥٦	٨ر٠٢	٦ر٩٩	٦ر٤٢	٦ر٠٦	٥ر٨٠	٥ر٤٧	٥ر١١	٤ر٧٣	٤ر٤١
١٠	١٠ر٠٤	٧ر٥٦	٦ر٥٥	٥ر٩٩	٥ر٦٤	٥ر٣٩	٥ر٠٦	٤ر٧١	٤ر٣٣	٤ر٠١
١٢	٩ر٣٣	٦ر٩٣	٥ر٩٥	٥ر٤١	٥ر٠٦	٤ر٨٢	٤ر٥٠	٤ر١٦	٣ر٧٨	٣ر٤٦
١٤	٨ر٨٦	٦ر٥١	٥ر٥٦	٥ر٠٣	٤ر٦٩	٤ر٤٦	٤ر١٤	٣ر٨٠	٣ر٤٣	٣ر١١
١٦	٨ر٥٣	٦ر٢٣	٥ر٢٩	٤ر٧٧	٤ر٤٤	٤ر٢٠	٣ر٨٩	٣ر٥٥	٣ر١٨	٢ر٨٦
١٨	٨ر٢٨	٦ر٠١	٥ر٠٩	٤ر٥٨	٤ر٢٥	٤ر٠١	٣ر٧١	٣ر٣٧	٣ر٠١	٢ر٦٨
٢٠	٨ر١٠	٥ر٨٥	٤ر٩٤	٤ر٤٣	٤ر١٠	٣ر٨٧	٣ر٥٦	٣ر٢٣	٢ر٨٦	٢ر٥٣
٢٥	٧ر٧٧	٥ر٥٧	٤ر٦٨	٤ر١٨	٣ر٨٦	٣ر٦٣	٣ر٣٢	٢ر٩٩	٢ر٦٢	٢ر٢٩
٣٠	٧ر٥٦	٥ر٣٩	٤ر٥١	٤ر٠٢	٣ر٧٠	٣ر٤٧	٣ر١٧	٢ر٨٤	٢ر٤٧	٢ر١٣
٤٠	٧ر٣١	٥ر١٨	٤ر٣١	٣ر٨٣	٣ر٥١	٣ر٢٩	٢ر٩٩	٢ر٦٦	٢ر٢٩	١ر٩٤
٦٠	٧ر٠٨	٤ر٩٨	٤ر١٣	٣ر٦٥	٣ر٣٤	٣ر١٢	٢ر٨٢	٢ر٥٠	٢ر١٢	١ر٧٤
٨٠	٦ر٩٦	٤ر٨٨	٤ر٠٤	٣ر٥٦	٣ر٢٥	٣ر٠٤	٢ر٧٤	٢ر٤١	٢ر٠٣	١ر٦٥

م ٠ سعيد

ن١ = درجات حريـة التقديـر الاكبر للتبايـن

ن٢ = درجات حريـة التقديـر الاصغر للتبايـن

ملحق للفصل الأول

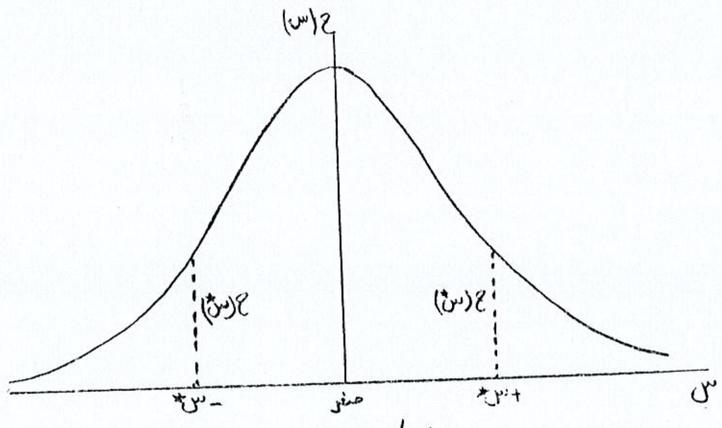
بعض القواعد الاحصائية

أشرنا فى الفصل الأول الى أن الاقتصاد القياسى ان هو الا امتداد طبيعى لنظرية الاحصاء فى تطبيقاتها على الأبحاث الاقتصادية ، ولذلك فمن المفيد أن نلخص هنا بعض القواعد الاحصائية المستمدة من نظرية الاحصاء والتى سوف نحتاج اليها فى الفصول التالية

أولا ــ التوزيع المعتاد :

من أشهر التوزيعات التى تعتمد عليها نظرية الاحصاء ، التوزيع المعتاد ، وهو توزيع لمتغير متصل يتميز بالصفات التالية :

١ ــ الوزيع متماثل ووحيد القيمة بحيث لو طبقت الورقة عند القمة لانطبقت كل نقطة على الفرع الايسر للمنحنى على مثيلتها على الفرع الايمن ــ وعلى ذلك لو اعتبرنا أن س تتوزع توزيعا معتادا وأن نقطة الصفر (أى المحور الرأسى) تقع عند القمة بالضبط فان أى قيمة سالبة ــ س* يكون لها نفس الأحداثى الذى للنقطة الموجبة + س* التى تبعد عن المحور الرأسى نفس البعد : (شكل ١)



شكل (١)

ويسمى الأحداثى الرأسى ص بأسم دالة كثافة الأحتمال ، وهو دالة فى القيمة س .

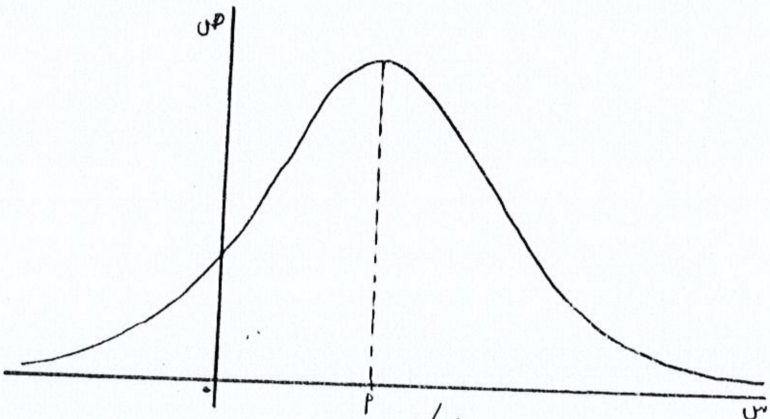
أى أن   ع (س*) = ع (ـ س*)

٢ـ يترتب على هذا التماثل أن الوسط الحسابى يقع عند القمة بالضبط وبذلك فهو يساوى المنوال . ومن جهة أخرى فان المساحة تحت المنحنى تنقسم عند القمة الى النصف بالضبط ولذلك فان هذه النقطة تعين الوسيط أيضا .

٣ـ فاذا اختلفت نقطة الأصل عن النقطة المناظرة للقمة بحيث وقعت القمة على بعد أ من نقطة الصفر (أى عند س = أ) ، ظلت صفة التماثل على حالها ، وكان

الوسط الحسابى = الوسيط = المنوال = أ

كما فى (شكل ٢)



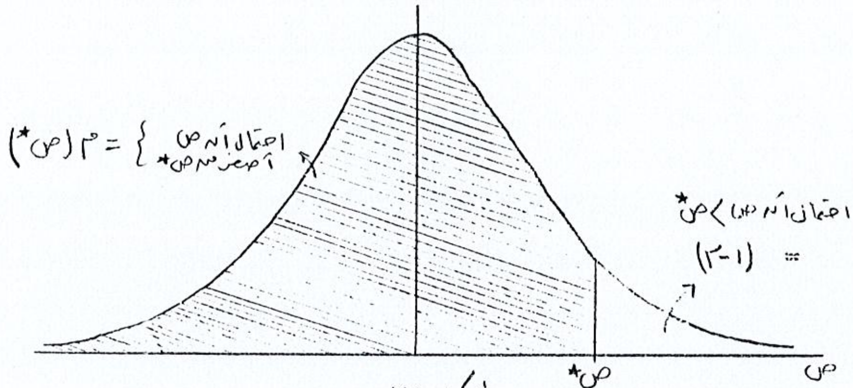
شكل (٢)

وتكون دالة كثافة الاحتمال هى

$$ع\,(س) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,ط}}\,هـ^{-\frac{1}{2\sigma^{2}}(س - أ)^{2}} \qquad (1)$$

حيث ط = $\frac{22}{7}$ هى النسبة التقريبية بينما هـ هى المتسلسلة الأسية بينما أ ، $س^{2}$ معلمتان للتوزيع : أ = الوسط الحسابى بينما σ^{2} = تباين التوزيع .

ويلاحظ أن ص تتغير بين — ∞ ، + ∞ . ولذلك فان احتمال كون ص أصغر من قيمة معينة ص* هو التكامل من — ∞ الى ص* ويساوى مساحة المنحنى الواقعة الى يسار النقطة ص = ص* (شكل ٤)



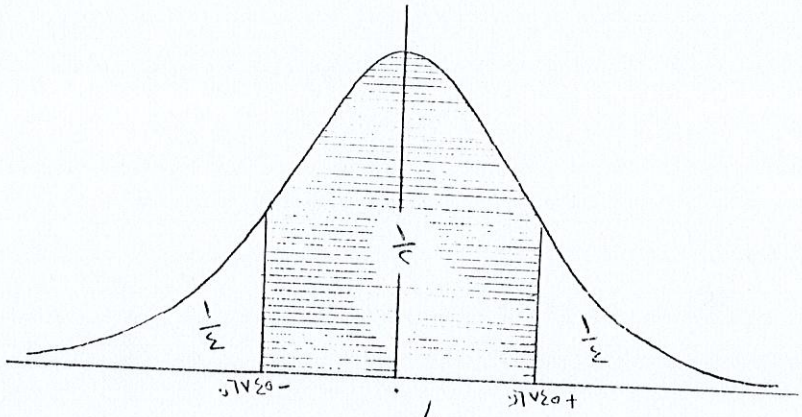
شكل (٤)

وعلى ذلك اذا رمزنا لهذه المساحة بالرمز م فان

$$م\,(ص^*) = \int_{-\infty}^{ص^*} \frac{1}{\sqrt{2\,ط}}\, هـ^{-\frac{ص^2}{2}}\, ء\,ص \qquad (٥)$$

وينتج أن احتمال أن ص > ص* هو (١—م) وهو المساحة المتبقية أى الواقعة الى يمين ص*. وأخيرا فان احتمال أن ص تقع بين ص* ، — ص* هو احتمال أن ص أصغر من ص* مطروحا منها احتمال أن تكون ص أصغر من — ص*. ولكن هذا الاحتمال الاخير هو نفسه (بسبب التماثل) احتمال أن تكون ص أكبر من + ص*. معنى هذا أن الاحتمال المطلوب =
م — (١—م) = ٢ م —١ (حيث م > $\frac{1}{2}$ اذا كانت ص* موجبة) . فمن جدول (١) نجد أن احتمال أن ص أصغر من ٨ر٠ هو ٧٨٨١ر٠ وعلى ذلك فان احتمال أن ص أكبر من ٨ر٠ = احتمال أن ص أصغر من —٨ر٠ =
١ — ٧٨٨١ر٠ = ٢١١٩ر٠ اذن احتمال أن ص تقع بين (—٨ر٠ ، ٨ر٠) =
٧٨٨١ر٠ — ٢١١٩ر٠ = ٢ × ٧٨٨١ر٠ — ١ر٠٠٠ = ٥٧٦٢ر٠

٦ـ وباستخدام هذه القاعدة الأخيرة نجد أن قيمة ص التى تجعل احتمال الوقوع بين $\pm$ ص* هو نصف المساحة بالضبط هى ٦٧٤٥ر٠ أى أن نصف " التكرارات " يقع بين ـ ٦٧٤٥ر٠ ، + ٦٧٤٥ر٠ والنصف الآخر يقع خارج هذه المنطقة (أى $\frac{1}{4}$ الى اليمين ، $\frac{1}{4}$ الى اليسار)



شكل (٥)

وبوجه عام فان ٥٠ % من التكرارات لايختلف عن الوسط الحسابى بأكثر من ٦٧٤٥ر٠ أمثال الانحراف المعيارى للتوزيع ٠ ومن الممكن أن نحسب احتمالات الوقوع بين $\pm$ ص لقيم معينة لها أهمية خاصة كما فى جدول (أ) حيث ح هى الاحتمال ، ١ ـ ح هى الاحتمال المكمل

٤ـ لنفرض أننا أخذنا انحرافات المتغير س عن وسطه الحسابي أى (س ـ أ) ثم قسمناها على الانحراف المعيارى وبالتالى عرفنا متغير جديد هو

$$\text{ص} = \frac{\text{س} - \text{أ}}{\sigma} \qquad (٢)$$

اذن ص يكون متغير معتاد، متوسط الصفر وتباينه الوحدة . لأن التباين هو الا متوسط مربعات الانحرافات (س ـ أ) وبما أنه = $\sigma^{٢}$ ، فان تباين ص = $\frac{١}{\sigma^{٢}} \times \sigma^{٢} = ١$. ولذلك فان المتغير ص يسمى متغير معتاد بالصورة المعيارية . ونلاحظ أن شكل المنحنى يظل كما هو وان اختلفت وحدات القياس ونقطة الاصل على المحور الافقى . وبالتالى فان ع (ص) = ع (س) ، حيث س هى المناظرة لقيمة ص فى (٢) . أى أن

$$\text{س} = \text{أ} + \sigma \times \text{ص} \qquad (٣)$$

فلو كانت أ = ٣٠ بينما $\sigma = ٥$ فان ص = ٤ معناها قيمة تبعد عن الوسط الحسابى ٣٠ بما يساوى ٤ أمثال الانحراف المعيارى ٥ . اذن س = ٣٠ + ٥ × ٤ = ٥٠ . وبعبارة أخرى فان س تزيد عن المتوسط بمقدار ٥٠ ـ ٣٠ = ٢٠ بالوحدات الأصلية أو ٤ بوحدات كل منها ٥ (حسب قيمة الانحراف المعيارى)

وميزة هذه الصورة المعيارية هى أنها سهلة التبويب لأننا لو وضعنا σ فى المعادلة (١) تساوى الوحدة بينما $\frac{(\text{س} - \text{أ})^{٢}}{\sigma^{٢}} = \text{ص}^{٢}$ لأصبحت دالة كثافة الاحتمال :

$$\text{ع}(\text{ص}) = \frac{١}{\sqrt{٢\,\text{ط}}}\ \text{هـ}^{-\frac{\text{ص}^{٢}}{٢}} \qquad (٤)$$

أى أنها تتوقف على ص فقط ويمكن حسابها بالتعويض عن ص بقيمها المختلفة وبذلك اذا عرفت لدينا أ ، σ أمكننا ايجاد ع (س) لأنها = ع (ص) حيث س محسوبة بدلالة ص من (٣)

ولذلك فان من السهل تبويب القيم الخاصة بالدالة ع (ص) فى جدول واحد ثم استنتاج ع (س) بعملية تحويل بسيطة . فان الممكن أن نجد أن $\frac{1}{\sqrt{2\text{ط}}} = \sqrt{\frac{7}{44}} = \frac{1}{2.5066} = 0.3989$ فاذا كانت ص = صفر فان ح (ص = صفر) $= 0.3989$

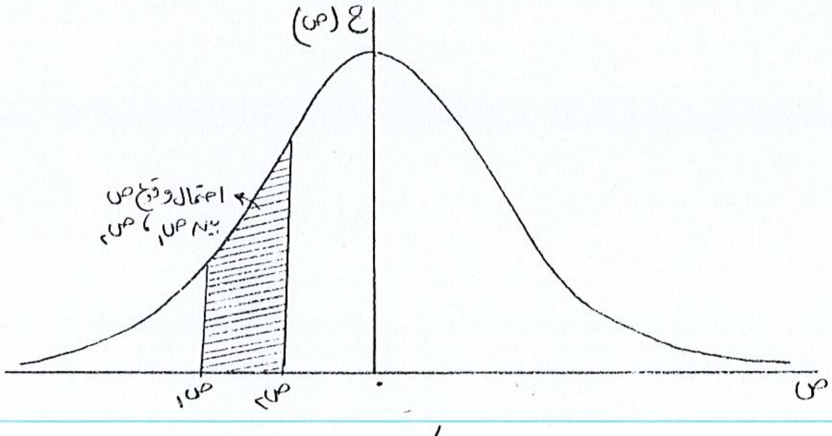
واذا كانت ص = ١ فان $\text{هـ}^{-\frac{\text{ص}^2}{2}} = \text{هـ}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\text{هـ}}} = \frac{1}{\sqrt{2.71828}} = 0.6065$.

وعلى ذلك فان $\text{ع}(\text{ص} = 1) = \text{ع}(\text{ص} = -1) = 0.3989 \times 0.6065 = 0.2420$ وهكذا .

ويمكن تبويب هذه النتائج كما فى جدول (١).

ففى المثال السابق نجد أنه عندما س = ٥ر٢٢ فان $\text{ص} = \frac{22.5 - 30}{5} = \frac{-7.5}{5} = -1.5$ ومن الجدول نجد أن ع = ١٢٩٥ر٠ وهكذا .

٥- لايجاد احتمال وقوع ص بين قيمتين ص_1 ، ص_2 فكامل الدالة ع بين ص_1 ، ص_2 ، ويكون الاحتمال هو المساحة الواقعة بين هاتين النقطتين تحت المنحنى (شكل ٣)



شكل (٣)

جدول (أ) - المنحنى المعتاد

ح = احتمال الوقوع بين - ص ، + ص

ص	ح = احتمال الوقوع بين - ص ، + ص	١-ح = احتمال الوقوع أقل من - ص ، أكبر من + ص
٠٫٦٧٤	٠٫٥٠٠٠	٠٫٥٠٠٠
١٫٠٠٠	٠٫٦٨٢٧	٠٫٣١٧٣
١٫٦٤	٠٫٩٠٠٠	٠٫١٠٠٠
١٫٩٦	٠٫٩٥٠٠	٠٫٠٥٠٠
٢٫٠٠	٠٫٩٥٤٥	٠٫٠٤٥٥
٢٫٢٣	٠٫٩٨٠٠	٠٫٠٢٠٠
٢٫٥٨	٠٫٩٩٠٠	٠٫٠١٠٠
٢٫٦٠	٠٫٩٩٠٦	٠٫٠٠٩٤
٣٫٠٠٠	٠٫٩٩٧٣	٠٫٠٠٢٧

وعلى هذا فان ح هى احتمال أن | ص | < ص* أى انحراف أقل من ص* سواء بالزيادة أو النقص

، ١-ح هى احتمال أن | ص | > ص* أى انحراف أكبر من ص* سواء بالزيادة أو النقص

ثانيا- توزيع ت :

رأينا أنه اذا كانت المعلمتين أ ، س معلومتين فان المتغير س يمكن تحويله الى متغير جديد ص = $\frac{س - أ}{ى}$ له توزيع معتاد بمتوسط صفر وانحراف معيارى الوحده ولكن يحدث أحيانا الا تكون ى معلومة ولكن أ معلومة . فى هذه الحالة يمكن تحويل المتغير س الى متغير جديد هو :

$$ت = \frac{س - أ}{ع} \qquad (٦)$$

حيث ع هى تقدير للانحراف المعيارى σ . ولكن ما معنى التقدير ؟

لو أن المشاهدات س كانت تشمل كل المجتمع (اللانهائى) لأمكننا حساب المتوسط أ وهو الوسط الحسابى للسينات أى مجموعها على عددها ، ولأمكن حساب الانحراف المعيارى σ بايجاد جذر متوسط مربعات الانحرافات عن أ . ولكن الذى يحدث عادة أن يكون لدينا عدد من المشاهدات س منتمية الى مثل هذا المجتمع وليس كل المشاهدات الممكنة من المجتمع . ولذلك نفترض أنها عينة عشوائية من هذا المجتمع . اذن لن يكون الوسط الحسابى $\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن}$ المحسوب من المشاهدات هو الوسط الحسابى الحقيقى ولكنه تقدير له . وهو تقدير مناسب لأن توقعه هو

$$ت (\bar{س}) = ت \frac{مجـ س}{ن} = \frac{١}{ن} [ت(س_١) + ت(س_٢) + \dots + ت (س_ن)]$$

$$= \frac{١}{ن} [أ + أ + \dots + أ] = \frac{ن أ}{ن} = أ$$

$$\therefore \quad ت (\bar{س}) = أ \qquad (٧)$$

وعلى ذلك نستطيع استخدام الوسط المشاهد $\bar{س}$ لحساب متوسط مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابى (أى التباين) . وعلى ذلك نوجد مجموع المربعات $(س - \bar{س})^٢$ ونستخدمه لايجاد تقدير $ع^٢$ يكون توقعه هو $\sigma^٢$. وهنا نلاحظ أولا أن:

تباين ($\bar{س}$) = توقع مربع انحراف $\bar{س}$ عن توقعه أ

$$\therefore \quad ت (\bar{س} - أ)^٢ = ت (\frac{مجـ س}{ن} - أ)^٢ = \frac{١}{ن^٢} ت (مجـ س - ن أ)^٢$$

$$= \frac{١}{ن^٢} ت [(س_١ - أ) + (س_٢ - أ) + \dots + (س_ن - أ)]^٢$$

$$= \frac{1}{ن^{2}}\ ت\Big[(س_{1} - أ)^{2} + (س_{2} - أ)^{2} + \cdots\cdots + (س - أ)^{2}$$

$$+\ 2\,(س_{1} - أ)\,(س_{2} - أ) + 2\,(س_{1} - أ)\,(س_{3} - أ) + \cdots\cdots +$$

$$2\,(س_{ن-1} - أ)\,(س_{ن} - أ)\Big]$$

وحيث أن توقع المجموع = مجموع التوقعات ، توقع أى مقدار $(س - أ)^{2}$ هو σ^{2} بينما أن توقع حاصل الضرب هو حاصل ضرب التوقعين اذا كان المقدارين مستقلين عن بعضهما كما هو مفترض ، لذلك نجد أن توقعات حواصل الضرب فى المقدار الاخير تتلاشى ويبقى فقط

$$ت\,(\bar{س} - أ)^{2} = \frac{1}{ن^{2}}\,(\sigma^{2} + \sigma^{2} + \cdots\cdots + \sigma^{2}) = \frac{ن\,\sigma^{2}}{ن^{2}} = \frac{\sigma^{2}}{ن}$$

أى أن

$$تباين\ (\bar{س}) = \frac{\sigma^{2}}{ن} \qquad (٨)$$

وأخيرا ، حيث أننا نستخدم مج $(س_{ر} - \bar{س})^{2}$ لتقدير التباين فاننا نلاحظ أن توقع هذا المجموع هو :

$$ت\,[مج\,(س - \bar{س})^{2}] = ت\,[مج\,(س_{ر} - \bar{س} - أ + أ)^{2}]$$

$$= ت\ مج\,[\,(س_{ر} - أ) - (\bar{س} - أ)\,]^{2}$$

$$= ت\ مج\,[\,(س_{ر} - أ)^{2} - 2\,(\bar{س} - أ)\,(س - أ) + (\bar{س} - أ)^{2}\,]$$

$$= ت\,[\,مج\,(س - أ)^{2} - 2\,(\bar{س} - أ)\ مج\,(س - أ) + ن\,(\bar{س} - أ)^{2}\,]$$

وهنا نلاحظ أن

$$ت\,مج\,(س_{ر} - أ)^{2} = ت\,[\,(س_{1} - أ)^{2} + (س_{2} - أ)^{2} + \cdots\,] = ن\,\sigma^{2}$$

كذلك

$$\text{مج}\,(\text{س}_{\text{ر}} - \text{أ}) = \text{مج}\,\text{س} - \text{ن}\,\text{أ} = \text{ن}\left(\frac{\text{مج}\,\text{س}_{\text{ر}}}{\text{ن}} - \frac{\text{ن}\,\text{أ}}{\text{ن}}\right) = \text{ن}\,(\bar{\text{س}} - \text{أ})$$

$$\therefore\ (\bar{\text{س}} - \text{أ}) \times \text{مج}\,(\text{س}_{\text{ر}} - \text{أ}) = \text{ن}\,(\bar{\text{س}} - \text{أ})^{2}$$

وعلى هذا فان الحدين الاخيرين فى التوقع متشابهان ومعامل أولهما هو -2ن والثانى هو ن أى أنهما يؤلان الى $-\text{ن}\,(\bar{\text{س}} - \text{أ})^{2}$ ، وبذا يكون التوقع يساوى .

$$\text{ت}\,\text{مج}\,(\text{س}_{\text{ر}} - \text{أ})^{2} - \text{ن}\,\text{ت}\,(\bar{\text{س}} - \text{أ})^{2} = \text{ن}\,\sigma^{2} - \text{ن} \times \frac{\sigma^{2}}{\text{ن}} = (\text{ن} - 1)\,\sigma^{2}$$

اذن لو أخذنا

$$\text{ع}^{2} = \frac{\text{مج}\,(\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}})^{2}}{\text{ن} - 1} \qquad (٩)$$

فان هذا المقدار يكون تقدير مناسب للمعلمة σ^{2} لأن

$$\text{ت}\,(\text{ع}^{2}) = \frac{1}{\text{ن} - 1}\,\text{ت}\,\text{مج}\,(\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}})^{2} = \frac{1}{\text{ن} - 1} \times (\text{ن} - 1)\,\sigma^{2} = \sigma^{2} \qquad (١٠)$$

اذن ليكون التقدير متفقا مع التباين الحقيقى فان مجموع مربعات الانحرافات يجب أن يقسم على (ن − ١) وليس على ن .

هذا العدد (ن − ١) يطلق عليه أسم "عدد درجات الحرية" ولن نتعرض هنا للتفسير الذى دعى الى استخدام هذا الاصطلاح ، ولكن يمكن أن نبرره كالاتى :

لو فرض أن كانت لدينا خمسة مشاهدات ٤ ، ٩ ، ٢ ، ٧ ، ٨ فان المتوسط هو $\bar{\text{س}} = \frac{4 + 9 + 2 + 7 + 8}{5} = 6$. فاذا كنا نعرف أربعة مفردات فقط (٤ ، ٩ ، ٢ ، ٧) والمتوسط ، لتحددت قيمة الخامسة = ٥ × ٦ − (٤ + ٩ + ٢ + ٧) = ٣٠ − ٢٢ = ٨ . ولو فرض أننا سحبنا عينة أخرى من خمسة مفردات وكان متوسطهما ٦ أيضا وعرفنا أن الأربعة الأولى هى ٨ ، ٥ ، ٦ ، ٧ فان الخامسة لابد أن تكون ٤ .

أى أن معرفة المتوسط تركت لنا حرية اختيار أربعة مفردات من الخمسة وبالتالى أفقدتنا درجة من الدرجات الخمس لحرية اختيار مفردات العينة .

وبعبارة أخرى فان استخدام البيانات مرة لحساب الوسط الحسابى ينقص درجات الحرية درجة واحدة من ن الى ن - ١ كذلك لو حدث أننا استخدمنا البيانات مرتين لحساب تقديرين لمعلمتين من معالم المجتمع ، فقدنا درجتين للحرية وهكذا (ولو أن هذه القاعدة تستوجب شروطا معينة للتطبيق ليس هنا مجال ذكرها) .

وعلى ذلك فان المقدار ع الوارد فى مقام المتغير ت (معادلة ٦) محسوب من (ن - ١) درجات حرية ولذلك نتوقع أن يختلف توزيع المتغير وفقا لدرجات الحرية ن' (= ن - ١ فى هذه الحالة) ، ولو أن ن' آلت الى مالانهاية لآلت ع^2 الى σ^2 ولحصلنا على التوزيع المعتاد لأن العينة تنطبق على المجتمع . ولذلك فان التوزيع ت يكون هو الآخر متماثلا حول المتوسط أ ولكنه أكثر تباينا عن التوزيع المعتاد لأن استخدام التقدير ع يزيد من التباين .

ويبين جدول (٢) القيم ت* للمتغير ت التى تجعل المساحة ح الواقعة بين - ت* ، + ت* تساوى قدرا معلوما . أى أن :

ح = احتمال أن ا ت ا < ت*

تماما كما فى حالة جدول (أ) للتوزيع المعتاد . ويلاحظ أنه عندما تكبر ن' يصبح الفرق بين قيم ت وقيم ص للتوزيع المعتاد المناظرة لاحتمال معين ح طفيفا ، بحيث يمكن استخدام التوزيع المعتاد كتقريب مقبول عندما تكبر ن' (> ٣٠ مثلا) .

ثالثا- استخدامات التوزيع المعتاد وتوزيع ت :

يمكن استغلال العلاقات السابقة بعدة أشكال :

١- اختيار انتماء مفردة الى مجتمع : لو فرض أننا سحبنا مفردة ما ووجدنا قيمتها

= س* (٥٠ مثلا) فما هو احتمال أن نحصل على قيم أخرى تزيد فى بعدها عن متوسط المجتمع الأصلى عن هذه القيمة اذا كان متوسط المجتمع هو ٤٣ وانحرافه المعيارى ٣ ؟

نظرا لأننا نعلم σ=٣ فاننا نحسب

$$ص = \frac{٥٠ - ٤٣}{٣} = \frac{٧}{٣} = ٢٫٣٣$$

ومن جدول (١) نجد أن ص تقع بين ٢٫٣ ، ٢٫٤ فى ثلث المسافة تقريبا لذلك تقع م بين ٠٫٩٨٩٣ ، ٠٫٩٩١٨ وتكون مساوية بالتقريب للمقدار الأول + $\frac{١}{٣}$ الفرق أى ٠٫٩٨٩٣ + $\frac{١}{٣}$ × (٠٫٠٠٢٥) = ٠٫٩٩٠١ وتكون المساحة المكملة هى ١ ـ م = ٠٫٠١ ولكن من الممكن أن نحصل على قيم تبعد عن أ بأكثر من ٢٫٣٣ من الجهة الأخرى (أى أقل من ٤٣ ـ ٧ = ٣٦) . ولذلك فان الاحتمال المطلوب هو ٠٫٠٢ وهنا نقول أن احتمال البعد عن المتوسط بأكثر من ٧ لايتجاوز ٢ ٪ وهذا احتمال ضئيل ـ الأمر الذى يدعونا الى التشكك فى أن هذه المفردة تنتمى الى المجتمع وأن الفرق (الكبير) المشاهد يرجع الى مجرد الصدفة . لذلك نفضل القول بأن المفردة تنتمى لمجتمع آخر (بمتوسط آخر) .

والواقع أنه جرت العادة على اعتبار أنه اذا كان مثل هذا الاحتمال لايتجاوز ٥ ٪ كان الفرق المشاهد معنويا أى دالا على وجود فرق معنوى وليس راجعا الى مجرد الصدفة والخطأ فى مثل هذا الحكم لايتجاوز ٥ ٪ من الحالات التى تصدر فيها أحكاما مماثلة ، وهذه " مخاطرة " طفيفة يمكن التجاوز عنها . واذا أردنا التشدد خفضنا هذا الاحتمال الى ١ ٪ . ولذلك يقال أن هناك مستويان (مألوفان) للمعنوية مستوى ٥ ٪ ومستوى ١ ٪ .

لنفرض الآن أننا لم نكن نعلم σ ولكن حسبنا تقديرها ع من عينة من ١٠ مفردات فكان ٢٫٥ . فى هذه الحالة نحسب .

$$ت = \frac{٥٠ - ٤٣}{٢٫٥} = \frac{٧}{٢٫٥} = ٢٫٨$$

وهنا نرجع الى جدول ت بدرجات حرية المقام وهى ن/ = ١٠ ـ ١ = ٩ فنجد أن ٢٫٨ تقع عند ح = ٩٨ ٪ تقريبا (عندها ت = ٢٫٨٢) ولذلك نصدر حكما مماثلا للسابق .

٢ـ اختيار انتماء متوسط عينة لمجتمع : لنفرض الآن أننا سحبنا عينة من نفس المجتمع السابق حجمها ١٥ وحسبنا متوسطها فكان ٤٠ وحسبنا تقدير الانحراف المعيارى منها فكان ع = ٣٫٣ وأردنا اختبار انتماء هذه العينة لذلك المجتمع الذى متوسطه ٤٣ وذلك (أ) بفرض معرفة σ = ٣ ، (ب) بفرض عدم معرفة σ

(أ) لو أننا عرفنا σ فاننا نستطيع حساب الانحراف المعيارى للمتوسط وهو $\sqrt{\sigma^2/\text{ن}}$ = $\sqrt{9/15}$ = ٠٫٧٧٥ وعلى ذلك فلو اعتبرنا أن الوسط الحسابى $\bar{\text{س}}$ يتوزع توزيعا معتادا حول الوسط أ = ٤٣ وبانحراف معيارى = ٠٫٧٧٥ ، فاننا نستطيع حساب ص = $\frac{40 - 43}{0.775}$ = ـ ٣٫٨٧٣ . ونظرا لأننا نهتم فقط بمقدار الانحراف عن المتوسط سواء كان بالزيادة أو النقص فاننا نهمل الاشارة ، ونجد من جدول (١) أن احتمال أن البعد يتجاوز ٣٫٨٧ يكاد يكون صفرا ولذلك نستنتج أن العينة لايمكن أن تكون قد جاءت من هذا المجتمع . ومن الممكن حسب ما أوضحناه من قبل أن نتفق على مستوى معين للمعنوية وليكن ٩٩ ٪ قبل القيام بحساب ص . ونقول أنه لو جاءت ص أكبر من ٢٫٥٨ وهى القيمة فى جدول (٢) المناظرة لهذا المستوى رفضنا فرض انتماء العينة للمجتمع ـ أما اذا جاءت دونها لم نرفض هذا الفرض (ولكن لانستطيع تأكيده) . اذن بما أن القيمة المشاهدة وهى ٣٫٨٧٣ (بغض النظر عن الاشارة) أكبر من ٢٫٥٨ فاننا نرفض عند هذا المستوى للمعنوية .

ب ـ فاذا لم نكن نعرف σ فاننا نستخدم ع وبذلك نحسب تقدير الانحراف المعيارى للمتوسط وهو ع / $\sqrt{\text{ن}}$ = ٣٫٣ / $\sqrt{15}$ = ٠٫٨٥٢ ثم نحسب ا ت ا = $\left| \frac{-3}{0.852} \right|$ = ٣٫٥٢١ . ونظرا لأننا أخذنا مستوى معنوية ٩٩ ٪ فاننا نبحث فى جدول (٢) عن قيمة ت بدرجات حرية ن/ = ١٥ ـ ١ = ١٤ فنجدها ٢٫٩٨ وبما أن القيمة المشاهدة أكبر منها فاننا نرفض فرض انتماء العينة للمجتمع .

وفى أى من الحالات السابقة نجد أن القاعدة العامة هى ايجاد خارج القسمة

$$\frac{\text{مقدار معين} - \text{متوسطه}}{\text{انحرافه المعيارى}} \qquad (١١)$$

فاذا كان الانحراف المعيارى هو الحقيقى استخدمنا جدول التوزيع المعتاد ـ واذا كان هو المقدر من المشاهدات نفسها استخدمنا جدول ت بدرجات حريـــة التقدير . وهذا يصح سواء كان المقدار المختبر هو مفردة أو متوسط ، أو ربما غير ذلك من المقادير المحسوبة من العينة ،مع مراعاة أن يكون المقام هو الانحـــراف المعيارى لهذا المقدار .

٣ـ ايجاد حدود ثقة لمتوسط المجتمع : لنفرض أننا سحبنا عينة من ١٥ مفردة وحسبنا متوسطها فوجدناه ٤٠ وحسبنا ع منها فوجدناه ٣ر٣ كما سبق ،فمن الممكن أن نفكر كالتالى : ماهى القيمة التى يجب أن يبلغها أ لكى نصل الى قيمة للمتغير ت يكون عندها ح = ٩٥ ٪ بالضبط . لو رجعنا الى جدول ت بدرجات حرية = ١٤ وجدنا أن هذه القيمة هى ٢ر١٤ . وعلى ذلك فان المقدار .

$$\left|\frac{\text{أ} - \bar{\text{س}}}{\text{ع} / \sqrt{\text{ن}}}\right| = \left|\frac{\bar{\text{س}} - \text{أ}}{\text{ع} / \sqrt{\text{ن}}}\right| = ٢ر١٤$$

ومعنى هذا أن :

$$\frac{\text{أ} - \bar{\text{س}}}{\text{ع} / \sqrt{\text{ن}}} = ٢ر١٤ \qquad ، \qquad \frac{\text{أ} - \bar{\text{س}}}{\text{ع} / \sqrt{\text{ن}}} = + ٢ر١٤$$

اذن $\text{أ} = \bar{\text{س}} - ٢ر١٤ \frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}}$ ، $\text{أ} = \bar{\text{س}} + ٢ر١٤ \frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}}$

أى أ = ٤٠ ـ ٢ر١٤ × ٨٥٢ر٠ = ٤٠ ـ ١٨٢ر١ = ٣٨ر١٨

، أ = ٤٠ + ٢ر١٤ × ٨٥٢ر٠ = ٤٠ + ١٨٢ر١ = ٤١ر٨٢

ومعنى هذا أنه لكى يكون فرض انتماء العينة لمجتمع معين فرضا مقبولا فلابد وأن يكون متوسط هذا المجتمع واقعا بين ٣٨ر١٨ ، ٤١ر٨٢ . أما اذا كان واقعا خارج هــذه الحدود رفضنا الفرض بخطأ لايتجاوز ٥٪.

هذان الحدان يسميان حدا الثقة ، أى الحدين اللذين نقدر وقوع المعلمة الحقيقية بينهما بدرجة ثقة معينة (٩٥ ٪ أو ٩٩ ٪) . ونلاحظ أنهما حسبا كالآتى :

الحد الادنى = التقدير من المشاهدات ـ الانحراف المعيارى للتقدير × ت عند مستوى ثقة معينة لدرجات حرية تقدير الانحراف المعيارى (١٢)

الحد الاعلى = التقدير من المشاهدات + الانحراف المعيارى للتقدير × ت نفسها

ونلاحظ أنه لو كان الانحراف المعيارى محسوبا من المجتمع نفسه كانت الدرجات الحرية = ∞ ونستخدم السطر الاخير من جدول ت وهو ص أى المتغير المعتاد .

رابعا ـ توزيعات أخرى :

هناك توزيعات أخرى تستمد من التوزيع المعتاد أهمها :

١ ـ توزيع $كا^٢$: وهو توزيع مجموع $ن_١$ مربعات متغيرات مستقلة مسحوبة من مجتمع معتاد متوسطه الصفر وانحرافه المعيارى الوحدة . أى

$$كا^٢ = ص_١^٢ + ص_٢^٢ + \cdots + ص_{ن_١}^٢$$

ونظرا لأن $كا^٢$ مجموع مربعات فانها تكون دائما موجبة (تتغير من صفر الى ∞) وتزيد مع زيادة $ن_١$ ويكون توزيعها ملتو الى اليسار .

٢ ـ توزيع ف : المقدار

$$ف = \frac{كا^٢ \text{ بدرجات حرية } ن_١ \text{ مقسوما على هذه الدرجات}}{كا^٢ \text{ بدرجات حرية } ن_٢ \text{ مقسوما على هذه الدرجات}} \qquad (١٣)$$

عبارة عن خارج قسمة $ن_١$ مربعات انحرافات متغير معتاد عن متوسطها على تباينها الاصلى فى درجات حريتها مقسوما على خارج قسمة $ن_٢$ مربعات انحرافات متغير معتاد عن متوسطها على تباينها الاصلى فى درجات حريتها ، وهذا المقدار له درجتان للحرية أحدهما للبسط والاخرى للمقام . ولذلك فان جدولها (جدول ٣) يبوب حسب هاتين الدرجتين ، الأولى لأعمدة الجدول والثانية لسطوره . والقيم المبوبة فى الجدول

هى التى عندها المساحة الى اليسار هى ٩٥ ٪ (جدول ٣ / أ) أو ٩٩ ٪ (جدول ٣ / ب) . فمثلا لو كانت لدينا قيمة ف = ٦ر١٤ محسوبة من خارج قسمة بسطه محسوب من ٣ درجات حرية ومقامه من ٥ درجات حرية فان القيمة المشاهدة تكون معنوية عند مستوى ثقة ٩٥ ٪ (أو مستوى معنوية ٥ ٪) وذلك لأن القيمة المبينة فى جدول (٣ / أ) هى ٥ر٤١ ولكنها ليست معنوية عند مستوى ثقة ٩٩ ٪ (أو مستوى معنوية ١ ٪) لأن جدول (٣ / ب) يعطى ١٢ر٠٦ . ولكن ماذا تعنى المعنوية هنا . ؟

لو أن البسط والمقام كانا بالشكل المفروض لوجب أن يتساوى البسط والمقام لأن كل منهما يمثل تباينا معينا (خارج قسمة مجموع مربعات على درجات حريته) ولكن أخطاء الصدفة تجعل أحدهما أعلى أو أقل من الآخر وسنفترض أننا كتبنا الأكبر فى البسط ، وكلما زاد الفرق بين البسط والمقام صغر احتمال الحصول على مثله أو أكبر منه . ولذلك اذا تجاوزت قيمة ف المشاهدة تلك المبينة فى الجداول بدأنا نشتبه فى أن البسط يتكون من عنصرين أحدهما هو $ك_ن^2$ والآخر فرق حقيقى بحيث نرفض أن الاثنين يمثلان نفس التباين وأن البسط (وهو الاكبر) يحتوى بجانب ذلك على عنصر آخر .

وعلى ذلك فلو كان كل من البسط والمقام تقدير لتباين معين σ^2 وكان البسط يختلف عن σ^2 فان النسبة سوف تزيد بمقدار هذا الفرق . ولذلك فان كبر النسبة عما هو مسجل بالجداول يدعو للاشتباه فى وجود مثل هذا الفرق ، ونرفض الفرض بأن البسط تقدير للمعلمة σ^2 فقط مثل المقام . وسوف يظهر مغزى هذه النسبة عند اجراء اختبارات الانحراف فيما بعد .

هناك ملاحظة جديرة بالتنوية هنا . هى أنه اذا كان المقام = $ع^2$ أى تقدير تباين المجتمع بينما البسط درجات حريته = ١ فقط ، فانه يمثل مربع انحراف قراءة واحدة $(س - أ)^2$. اذن تكون $ن_1 = 1$ ، $ن_2 = ن - 1$ وتكون $ف = \frac{(س - أ)^2}{ع^2}$ ولكن هذا ليس الا مربع ت . ولذلك فانه اذا كانت $ن_1 = 1$ فان ف تكون مربع ت بدرجات حرية $ن' = ن_2$. ومن الممكن التأكد من ذلك بمقارنة العمود الاول من جدول ف بقيم $ت^2$ المحسوبة من قيم ت المناظرة .

جدول رقم (١)

المنحنى المعتاد

ع = أحداثى المنحنى عند النقطة ص أى $\left(\frac{1}{\sqrt{٢ط}} هـ^{-\frac{ص^{٢}}{٢}} \right)$

م = المساحة تحت المنحنى الى يسار ص = احتمال أن المتغير أقل من ص

ص	المساحة م	الاحداثى ع	ص	المساحة م	الاحداثى ع
٠ر٠	٠ر٥٠٠٠	٠ر٣٩٨٩	٢ر٠	٠ر٩٧٧٢	٠ر٠٥٤٠
٠ر١	٠ر٥٣٩٨	٠ر٣٩٧٠	٢ر١	٠ر٩٨٢١	٠ر٠٤٤٠
٠ر٢	٠ر٥٧٩٣	٠ر٣٩١٠	٢ر٢	٠ر٩٨٦١	٠ر٠٣٥٥
٠ر٣	٠ر٦١٧٩	٠ر٣٨١٤	٢ر٣	٠ر٩٨٩٣	٠ر٠٢٨٣
٠ر٤	٠ر٦٥٥٤	٠ر٣٦٨٣	٢ر٤	٠ر٩٩١٨	٠ر٠٢٢٤
٠ر٥	٠ر٦٩١٥	٠ر٣٥٢١	٢ر٥	٠ر٩٩٣٨	٠ر٠١٧٥
٠ر٦	٠ر٧٢٥٧	٠ر٣٣٣٢	٢ر٦	٠ر٩٩٥٣	٠ر٠١٣٦
٠ر٧	٠ر٧٥٨٠	٠ر٣١٢٣	٢ر٧	٠ر٩٩٦٥	٠ر٠١٠٤
٠ر٨	٠ر٧٨٨١	٠ر٢٨٩٧	٢ر٨	٠ر٩٩٧٤	٠ر٠٠٧٩
٠ر٩	٠ر٨١٥٩	٠ر٢٦٦١	٢ر٩	٠ر٩٩٨١	٠ر٠٠٦٠
١ر٠	٠ر٨٤١٣	٠ر٢٤٢٠	٣ر٠	٠ر٩٩٨٧	٠ر٠٠٤٤
١ر١	٠ر٨٦٤٣	٠ر٢١٧٩	٣ر١	٠ر٩٩٩٠	٠ر٠٠٣٣
١ر٢	٠ر٨٨٤٩	٠ر١٩٤٢	٣ر٢	٠ر٩٩٩٣	٠ر٠٠٢٤
١ر٣	٠ر٩٠٣٢	٠ر١٧١٤	٣ر٣	٠ر٩٩٩٥	٠ر٠٠١٧
١ر٤	٠ر٩١٩٢	٠ر١٤٩٧	٣ر٤	٠ر٩٩٩٧	٠ر٠٠١٢
١ر٥	٠ر٩٣٣٢	٠ر١٢٩٥	٣ر٥	٠ر٩٩٩٨	٠ر٠٠٠٩
١ر٦	٠ر٩٤٥٢	٠ر١١٠٩	٣ر٦	٠ر٩٩٩٨	٠ر٠٠٠٦
١ر٧	٠ر٩٥٥٤	٠ر٠٩٤٠	٣ر٧	٠ر٩٩٩٩	٠ر٠٠٠٤
١ر٨	٠ر٩٦٤١	٠ر٠٧٩٠	٣ر٨	٠ر٩٩٩٩	٠ر٠٠٠٣
١ر٩	٠ر٩٧١٣	٠ر٠٦٥٦	٣ر٩	١ر٠٠٠٠	٠ر٠٠٠٢
٢ر٠	٠ر٩٧٧٢	٠ر٠٥٤٠	٤ر٠	١ر٠٠٠٠	٠ر٠٠٠١

جدول رقم (٢)

القيم المطلقة للمتغير "ت"

عند درجات حرية ن/ واحتمالات ح للقيم المحصورة

بين ± ت

ح / ن/	٠٫٥٠	٠٫٩٠	٠٫٩٥	٠٫٩٨	٠٫٩٩
١	١٫٠٠٠	٦٫٣٤	١٢٫٧١	٣١٫٨٢	٦٣٫٦٦
٢	٠٫٨١٦	٢٫٩٢	٤٫٣٠	٦٫٩٦	٩٫٩٢
٣	٠٫٧٦٥	٢٫٣٥	٣٫١٨	٤٫٥٤	٥٫٨٤
٤	٠٫٧٤١	٢٫١٣	٢٫٧٨	٣٫٧٥	٤٫٦٠
٥	٠٫٧٢٧	٢٫٠٢	٢٫٥٧	٣٫٣٦	٤٫٠٣
٦	٠٫٧١٨	١٫٩٤	٢٫٤٥	٣٫١٤	٣٫٧١
٧	٠٫٧١١	١٫٩٠	٢٫٣٦	٣٫٠٠	٣٫٥٠
٨	٠٫٧٠٨	١٫٨٦	٢٫٣١	٢٫٩٠	٣٫٣٦
٩	٠٫٧٠٣	١٫٨٣	٢٫٢٦	٢٫٨٢	٣٫٢٥
١٠	٠٫٧٠٠	١٫٨١	٢٫٢٣	٢٫٧٦	٣٫١٧
١١	٠٫٦٩٧	١٫٨٠	٢٫٢٠	٢٫٧٢	٣٫١١
١٢	٠٫٦٩٥	١٫٧٨	٢٫١٨	٢٫٦٨	٣٫٠٦
١٣	٠٫٦٩٤	١٫٧٧	٢٫١٦	٢٫٦٥	٣٫٠١
١٤	٠٫٦٩٢	١٫٧٦	٢٫١٤	٢٫٦٢	٢٫٩٨
١٥	٠٫٦٩١	١٫٧٥	٢٫١٣	٢٫٦٠	٢٫٩٥
١٦	٠٫٦٩٠	١٫٧٥	٢٫١٢	٢٫٥٨	٢٫٩٢
١٧	٠٫٦٨٩	١٫٧٤	٢٫١١	٢٫٥٧	٢٫٩٠
١٨	٠٫٦٨٨	١٫٧٣	٢٫١٠	٢٫٥٥	٢٫٨٨

تابع جدول رقم (٢)

	٠ر٥٠	٠ر٩٠	٠ر٩٥	٠ر٩٨	٠ر٩٩
١٩	٠ر٦٨٨	١ر٧٣	٢ر٠٩	٢ر٥٤	٢ر٨٦
٢٠	٠ر٦٨٧	١ر٧٢	٢ر٠٩	٢ر٥٣	٢ر٨٤
٢١	٠ر٦٨٦	١ر٧٢	٢ر٠٨	٢ر٥٢	٢ر٨٣
٢٢	٠ر٦٨٦	١ر٧٢	٢ر٠٧	٢ر٥١	٢ر٨٢
٢٣	٠ر٦٨٥	١ر٧١	٢ر٠٧	٢ر٥٠	٢ر٨١
٢٤	٠ر٦٨٥	١ر٧١	٢ر٠٦	٢ر٤٩	٢ر٨٠
٢٥	٠ر٦٨٤	١ر٧١	٢ر٠٦	٢ر٤٨	٢ر٧٩
٢٦	٠ر٦٨٤	١ر٧١	٢ر٠٦	٢ر٤٨	٢ر٧٨
٢٧	٠ر٦٨٤	١ر٧٠	٢ر٠٥	٢ر٤٧	٢ر٧٧
٢٨	٠ر٦٨٣	١ر٧٠	٢ر٠٥	٢ر٤٧	٢ر٧٦
٢٩	٠ر٦٨٣	١ر٧٠	٢ر٠٤	٢ر٤٦	٢ر٧٦
٣٠	٠ر٦٨٣	١ر٧٠	٢ر٠٤	٢ر٤٦	٢ر٧٥
٦٠	٠ر٦٧٨	١ر٦٧	٢ر٠٠	٢ر٣٩	٢ر٦٦
المعتاد (=∞)	٠ر٦٧٤	١ر٦٤	١ر٩٦	٢ر٣٣	٢ر٥٨

جدول رقم (٣ / أ)

توزيع نسبة التباين " ف " عند مستوى ثقة ٩٥ ٪

ن١ / ن٢	١	٢	٣	٤	٥	٦	٨	١٢	٢٤	١٠٠
٢	١٨ر٥١	١٩ر٠٠	١٩ر١٦	١٩ر٢٥	١٩ر٣٠	١٩ر٣٣	١٩ر٣٧	١٩ر٤١	١٩ر٤٥	١٩ر٤٩
٣	١٠ر١٣	٩ر٥٥	٩ر٢٨	٩ر١٢	٩ر٠١	٨ر٩٤	٨ر٨٤	٨ر٧٤	٨ر٦٤	٨ر٥٦
٤	٧ر٧١	٦ر٩٤	٦ر٥٩	٦ر٣٩	٦ر٢٦	٦ر١٦	٦ر٠٤	٥ر٩١	٥ر٧٧	٥ر٦٦
٥	٦ر٦١	٥ر٧٩	٥ر٤١	٥ر١٩	٥ر٠٥	٤ر٩٥	٤ر٨٢	٤ر٦٨	٤ر٥٣	٤ر٤٠
٦	٥ر٩٩	٥ر١٤	٤ر٧٦	٤ر٥٣	٤ر٣٩	٤ر٢٨	٤ر١٥	٤ر٠٠	٣ر٨٤	٣ر٧١
٧	٥ر٥٩	٤ر٧٤	٤ر٣٥	٤ر١٢	٣ر٩٧	٣ر٨٧	٣ر٧٣	٣ر٥٧	٣ر٤١	٣ر٢٨
٨	٥ر٣٢	٤ر٤٦	٤ر٠٧	٣ر٨٤	٣ر٦٩	٣ر٥٨	٣ر٤٤	٣ر٢٨	٣ر١٢	٢ر٩٨
٩	٥ر١٢	٤ر٢٦	٣ر٨٦	٣ر٦٣	٣ر٤٨	٣ر٣٧	٣ر٢٣	٣ر٠٧	٢ر٩٠	٢ر٧٦
١٠	٤ر٩٦	٤ر١٠	٣ر٧١	٣ر٤٨	٣ر٣٣	٣ر٢٢	٣ر٠٧	٢ر٩١	٢ر٧٤	٢ر٥٩
١٢	٤ر٧٥	٣ر٨٨	٣ر٤٩	٣ر٢٦	٣ر١١	٣ر٠٠	٢ر٨٥	٢ر٦٩	٢ر٥٠	٢ر٣٥
١٤	٤ر٦٠	٣ر٧٤	٣ر٣٤	٣ر١١	٢ر٩٦	٢ر٨٥	٢ر٧٠	٢ر٥٣	٢ر٣٥	٢ر١٩
١٦	٤ر٤٩	٣ر٦٣	٣ر٢٤	٣ر٠١	٢ر٨٥	٢ر٧٤	٢ر٥٩	٢ر٤٢	٢ر٢٤	٢ر٠٧
١٨	٤ر٤١	٣ر٥٥	٣ر١٦	٢ر٩٣	٢ر٧٧	٢ر٦٦	٢ر٥١	٢ر٣٤	٢ر١٥	١ر٩٨
٢٠	٤ر٣٥	٣ر٤٩	٣ر١٠	٢ر٨٧	٢ر٧١	٢ر٦٠	٢ر٤٥	٢ر٢٨	٢ر٠٨	١ر٩٠
٢٥	٤ر٢٤	٣ر٣٨	٢ر٩٩	٢ر٧٦	٢ر٦٠	٢ر٤٩	٢ر٣٤	٢ر١٦	١ر٩٦	١ر٧٧
٣٠	٤ر١٧	٣ر٣٢	٢ر٩٢	٢ر٦٩	٢ر٥٣	٢ر٤٢	٢ر٢٧	٢ر٠٩	١ر٨٩	١ر٦٩
٤٠	٤ر٠٨	٣ر٢٣	٢ر٨٤	٢ر٦١	٢ر٤٥	٢ر٣٤	٢ر١٨	٢ر٠٠	١ر٧٩	١ر٥٩
٦٠	٤ر٠٠	٣ر١٥	٢ر٧٦	٢ر٥٢	٢ر٣٧	٢ر٢٥	٢ر١٠	١ر٩٢	١ر٧٠	١ر٤٨
٨٠	٣ر٩٦	٣ر١١	٢ر٧٢	٢ر٤٩	٢ر٣٣	٢ر٢١	٢ر٠٦	١ر٨٨	١ر٦٥	١ر٤٢

ن١ = درجات حرية التقدير الاكبر للتباين

ن٢ = درجات حرية التقدير الاصغر للتباين

جدول رقم (٣ / ب)

توزيـــع نسبـة التبايـــن " ف " بمستوى ثقـــة ٩٩ ٪

ن٢ \ ن١	١	٢	٣	٤	٥	٦	٨	١٢	٢٤	١٠٠
٢	٩٨ر٤٩	٩٩ر٠٠	٩٩ر١٧	٩٩ر٢٥	٩٩ر٣٠	٩٩ر٣٣	٩٩ر٣٦	٩٩ر٤٢	٩٩ر٤٦	٩٩ر٤٩
٣	٣٤ر١٢	٣٠ر٨٢	٢٩ر٤٦	٢٨ر٧١	٢٨ر٢٤	٢٧ر٩١	٢٧ر٤٩	٢٧ر٠٥	٢٦ر٦٠	٢٦ر٢٣
٤	٢١ر٢٠	١٨ر٠٠	١٦ر٦٩	١٥ر٩٨	١٥ر٥٢	١٥ر٢١	١٤ر٨٠	١٤ر٣٧	١٣ر٩٣	١٣ر٥٧
٥	١٦ر٢٦	١٣ر٢٧	١٢ر٠٦	١١ر٣٩	١٠ر٩٧	١٠ر٦٧	١٠ر٢٧	٩ر٨٩	٩ر٤٧	٩ر١٣
٦	١٣ر٧٤	١٠ر٩٢	٩ر٧٨	٩ر١٥	٨ر٧٥	٨ر٤٧	٨ر١٠	٧ر٧٢	٧ر٣١	٦ر٩٩
٧	١٢ر٢٥	٩ر٥٥	٨ر٤٥	٧ر٨٥	٧ر٤٦	٧ر١٩	٦ر٨٤	٦ر٤٧	٦ر٠٧	٥ر٧٥
٨	١١ر٢٦	٨ر٦٥	٧ر٥٩	٧ر٠١	٦ر٦٣	٦ر٣٧	٦ر٠٣	٥ر٦٧	٥ر٢٨	٤ر٩٦
٩	١٠ر٥٦	٨ر٠٢	٦ر٩٩	٦ر٤٢	٦ر٠٦	٥ر٨٠	٥ر٤٧	٥ر١١	٤ر٧٣	٤ر٤١
١٠	١٠ر٠٤	٧ر٥٦	٦ر٥٥	٥ر٩٩	٥ر٦٤	٥ر٣٩	٥ر٠٦	٤ر٧١	٤ر٣٣	٤ر٠١
١٢	٩ر٣٣	٦ر٩٣	٥ر٩٥	٥ر٤١	٥ر٠٦	٤ر٨٢	٤ر٥٠	٤ر١٦	٣ر٧٨	٣ر٤٦
١٤	٨ر٨٦	٦ر٥١	٥ر٥٦	٥ر٠٣	٤ر٦٩	٤ر٤٦	٤ر١٤	٣ر٨٠	٣ر٤٣	٣ر١١
١٦	٨ر٥٣	٦ر٢٣	٥ر٢٩	٤ر٧٧	٤ر٤٤	٤ر٢٠	٣ر٨٩	٣ر٥٥	٣ر١٨	٢ر٨٦
١٨	٨ر٢٨	٦ر٠١	٥ر٠٩	٤ر٥٨	٤ر٢٥	٤ر٠١	٣ر٧١	٣ر٣٧	٣ر٠١	٢ر٦٨
٢٠	٨ر١٠	٥ر٨٥	٤ر٩٤	٤ر٤٣	٤ر١٠	٣ر٨٧	٣ر٥٦	٣ر٢٣	٢ر٨٦	٢ر٥٣
٢٥	٧ر٧٧	٥ر٥٧	٤ر٦٨	٤ر١٨	٣ر٨٦	٣ر٦٣	٣ر٣٢	٢ر٩٩	٢ر٦٢	٢ر٢٩
٣٠	٧ر٥٦	٥ر٣٩	٤ر٥١	٤ر٠٢	٣ر٧٠	٣ر٤٧	٣ر١٧	٢ر٨٤	٢ر٤٧	٢ر١٣
٤٠	٧ر٣١	٥ر١٨	٤ر٣١	٣ر٨٣	٣ر٥١	٣ر٢٩	٢ر٩٩	٢ر٦٦	٢ر٢٩	١ر٩٤
٦٠	٧ر٠٨	٤ر٩٨	٤ر١٣	٣ر٦٥	٣ر٣٤	٣ر١٢	٢ر٨٢	٢ر٥٠	٢ر١٢	١ر٧٤
٨٠	٦ر٩٦	٤ر٨٨	٤ر٠٤	٣ر٥٦	٣ر٢٥	٣ر٠٤	٢ر٧٤	٢ر٤١	٢ر٠٣	١ر٦٥

ن١ = درجات حريـة التقديـر الاكبر للتبايـن
ن٢ = درجات حريـة التقديـر الاصغر للتبايـن