المفارقات وأثرها في تطور المنطق والرياضيات

أ. د. زبيدة مونية بن ميسي (ضيف شرف المؤتمر)
قسم الفلسفة
كلية العلوم الإنسانية والاجتماعية
جامعة الحاج لخضر باتنة١
الجزائر

تمهيد:

لقد اهتم الفلاسفة والمناطقة والرياضيون مع نهاية القرن التاسع عشر ومطلع القرن العشرين بالدراسات والمفاهيم المنطقية، لما لها من أهمية بالغة ناتجة عما حقّقته من تقدم كبير في مختلف مباحثها، ومن بين تلك المفاهيم نجد مفهوم "المفارقة"، التي يجد الباحث غير المتخصص سهولة في إدراك معناها، بالنّظر إليها على أنّها مجرد أغاليط وتناقضات وخُدع وأكاذيب مُسلية، إلّا أنّ المتأمّل في مضامينها رياضيا ومنطقيا يدرك أن لها دورا هاما لا يستهان به في هذين العلمين.

ومن جهة أخرى كان لاكتشاف المفارقة في المنطق الدور الفعال والأثر الواضح في تطوير هذا العلم(المنطق)، خاصة بعد أن أصبح المنطق الكلاسيكي عقيما لا يحقق الدور الجديد الذي يتطلبه الفكر المعاصر، كما أنها من العوامل التي ساعدت على ظهور مفاهيم جديدة في المنطق الرياضي على نحو جعل في استطاعة العلماء حلّ الكثير من المشكلات الرياضية التي سبّبت ما عرف بأزمة الأسس، واكتشاف عدّة تناقضات ومفارقات في النسق الرياضي الجديد الخاص بنظرية المجموعات، وسرعان ما كشف البحث الدقيق أنّ هذه التناقضات لم تكن ذات طبيعة رياضية، بل كانت ذات طابع منطقي عام وهو ما نسمّيه بالتناقضات المنطقية، مما كان له أثر كبير في إحداث تغيير أساسي في المنطق، وإعادة بناء نسقه من أجل التّغلب على هذه التناقضات. فتأثير هذه المفارقات في تطوّر المنطق والرياضيات أدّى في نهاية الأمر إلى منجزات رئيسة: نظرية الأنماط لراسل، ونظرية بدهنة الرياضيات لزرميلو(Zermelo)، فضلا عن ذلك لقد شجعت أيضا على ظهور حدسية بروور(Brouwer) ونظرية مستويات اللغة مع ألفريد تارسكي (Tarski).

وبناء على ما سبق تهدف هذه الدراسة الراهنة إلى الإجابة عن التساؤل التالي: ما أثر المفارقة في تطوير العلوم الصورية :المنطق والرياضيات؟وما المنجزات التي حققتها على مستوى المنطق الرياضي خاصة؟

١ مفهوم المفارقة (paradoxe):

كلمة "مفارقة "في أصلها الإفرنجي مشتقّة من الكلمة اليونانية (paradoxa). وتتألّف من مقطعين أولّهما (para) وتعني المخالف أو الضدّ، وثانيهما (doxa) وتعني الرّأي. فيكون المعنى الإجمالي لهذه الكلمة هو ما يضاد الرّأي الشّائع عموما[١]. وتعتبر المفارقة من أكثر الكلمات المستخدمة في اللّغة العربية الحديثة؛ إذ شاع استخدام هذا اللّفظ في البداية

(١) مراد وهبة: المعجم الفلسفي، مادة: المفارقة دار الثقافة الجديدة، القاهرة، ط٣، ١٩٧٩، ص ١١٦

للدّلالة على الآراء المخالفة للمعتقدات المألوفة ومعارضة الأفكار المأخوذ بها المنقولة عبر التّراث[١].

ولهذا فالمفارقة في معناها العام تعني الابتعاد عن الآراء العامة إلى حدّ الغرابة الشّديدة، ومن هنا أُطلق هذا اللّفظ على الرّأي الغريب الذي لا يفتقده صاحبه، ولكنّه يدافع به أمام النّاس لحملهم على الإعجاب به، والرّأي المفارق لهذا المعنى ليس بالضرورة فاسدا. بل كلّ ما هنالك هو أنّه مخالف لما يعتقده الناس.

تأخذ كلمة المفارقة في المنطق معنى أكثر دقّة، هي تتألّف من قضيتين متناقضتين، وتبرهن على صدق وكذب الحكم الواحد أو تبرهن على الحكم وعلى نفيه في وقت واحد، أي غياب مبدأ عدم التناقض[٢]. والمفارقة في أكثر صورها المنطقيّة تكمن في تكافؤ ظاهريّ لقضيّتين تكون إحداهما نفيا للأخرى، وفي هذه الحالة إذا كان لدينا الصّيغة التالية: (ق C– ق) فإنّ هذه الصيغة نفسها يمكنها إثبات – ق، وذلك من خلال القانون الصّحيح لحساب القضايا والذّي يكون على النّحو التالي: (ق C –ق. C. – ق) وفي حالة ما إذا كان لدينا (–ق C ق) فإنّ هذا سيؤدّي إلى إثبات ق، ولذلك فإنّه من خلال ق يكافئ – ق يمكننا الحصول على الصّيغة التالية: ق يستلزم – ق وهذه الصّورة المتطرّفة للمفارقة تسمّى أحيانا "نقيضة " (Antinomy).

يقتضي منّا البحث في طبيعة المفارقات سواء على المستوى اللّغوي أو من النّاحية المنطقيّة القيام بتمييزات هامّة وأساسيّة تتمثّل في البدء بتمييز "المفارقة "عن الأغلوطة وعن النّقيضة، حيث إنّ "المغالطة " هي لفظ إفرنجي مشتقّ من اللّفظ اللّاتيني(fallax) ويعني المخادع[٣].

والمغالطة تكون مركّبة من مقدّمات شبيهة بالحقّ، ولكنّه ليس حقّا بل يسمّى سفسطة. ومن هنا يتبيّن لنا بأنّ المغالطة هي حجّة تبدأ بمقدّمتين صادقتين تؤدّي إلى نتيجة مرفوضة رغم مطابقتها لقواعد الاستدلال الصّورية، مثل "مغالطة الملعب" عند "زينون الإيلي" (Zénon D’Elée). والمغالطات عديدة أشهرها : المغالطة بالعرض، وترتكب حين يستنتج الإنسان نتيجة مطلقة بسيطة دون قيد ولا شرط من شيء لا يصدق إلّا بالعرض، ومغالطة بالجوهر، أي الانتقال ممّا هو صادق بشرط إلى ما هو صادق بالإطلاق[٤]، وهناك مغالطة بالتّركيب والتّقسيم تخلط بين ما يحمل إيجابا على لفظ مركّب مأخوذ بصورة جمعيّة

(١) إبراهيم مدكور:المعجم الفلسفي، مادة: المفارقة، مجمع اللغة العربية، القاهرة، ١٩٨٣، ص ١٨٨
(٢) إسماعيل عبد العزيز: المفارقات المنطقيّة، دار الثقافة، القاهرة، ط١، ١٩٩٣، ص. ص ٩. ٨.
(٣) مراد وهبة: المعجم الفلسفي، مادة: المفارقة، ص ٦١٢.
(٤) المرجع نفسه، الصفحة نفسها.

وبين ما يحمل إيجابا على كلّ عنصر من العناصر المكوّنة لهذا اللّفظ مثل القول بأنّ الخمسة زوج وفرد. ومغالطة الحدّ الرابع تنشأ عن استخدام حد واحد بمعنيين مختلفين مما يجعل عدد الحدود الربعة عوض ثلاثة كما هو وارد في شروط القياس الحملي.

أمّا النّقيضة فهي التي تتّخذ شكل تناقض يقع العقل فيه عند خوضه في ظواهر تتجاوز العالم الخارجي، في حين نجد المفارقة هي ذلك التّعبير الظّاهر الصّحيح لكن بدليلين متناقضين[١]. انطلاقا من أنّ المفارقة هي حجّة غير قابلة للإبطال لكونها تحتوي على نتيجة تتناقض مع نفسها، وتستخدم أساسا للتّحقق من اتّساق نظرية ما، ونسلك في ذلك طريقين أساسين، يتحّدد الأوّل في التّأكد من أنّ النّظرية لا تحتوي على مفارقة ما. أمّا السّبيل الثّاني، فيتمّ بأخذ مفارقة ما وإدماجها في النّظرية لمعرفة ما إذا كان بإمكان هذه الأخيرة حلّها.

كما يكمن الاختلاف الجوهريّ بين المفارقة والأغلوطة والنّقيضة، في ارتباط "المفارقة"و"الأغلوطة" بالمجال الدلالي على الرّغم من وجود مفارقات منطقية ذات بعد تركيبي. بينما ترتبط "النّقائض" إجمالا بالمجال المنطقي والرياضي بصفة خاصة. وتجدر الإشارة إلى أن هناك من ميّز بين المفارقة والنّقيضة بإرجاعها إلى مفارقات دلالية تستند إلى تصوّرات دلالية من قبل الصّدق والكذب والتّعريف. . . في مقابل المفارقات التركيبية التي تستخدم تصورات تنتمي أساسا إلى نظرية المجموعات، وهذا التمييز نجده عند كل من "كواين"(Quine) و"رامسي"(Ramssi)[٢]، ومن هنا يتبين لنا بأنّ هذه التّمييزات تنبني على أصل يسمح بالّتفرقة بين المفارقات العامة التي تهمّ أسس التطور المنطقي، والمفارقات الخاصة التي تتعلّق أساسا بالتّطبيق الرياضي والمنطقي لبعض المفاهيم مثل نظرية المجموعات، ويترتّب عن ذلك التّمييز بين: المغالطات التي ترتبط بالمجال الدّلالي اللّغوي، والنّقائض وتهمّ المجال الرياضي والمنطقي أساسا. وتتحدّد خصوصياتها في الأخذ بتصوّرات ومفاهيم رياضية مثل نظرية المجموعات، وعمليّات تنتمي إلى المنطق (منطق المحمولات)، أما المفارقات فيتعلّق الأمر أساسا بالمفارقات الدّلالية التي يصطلح عليها (مفارقات بالمعنى الدقيق) تمييزا لها عمّا نسمّيه أحيانا(المفارقات التركيبية أو المنطقية) التي يمكن أن تتّخذ صيغة النّقيضة، وتتميّز المفارقة بكونها توقعنا في التّناقض انطلاقا من الدّور الذي تنطوي عليه الكلمات أو التّعابير التي نستند إليها. ويعود هذا إلى أنّ المفارقات الدّلالية تقوم على مفاهيم وتصوّرات دلالية كالتّعريف والصّدق مثلا. ويتفرّع هذا النّمط من

---

(١) حسن الباهي: اللغة والمنطق (بحث في المفارقات)، دار الأمان، الرباط، ط١، ٢٠٠٠، ص ١٥٧
(٢) المرجع نفسه، ص ١٥٨.

المفارقات إلى مفارقات (دلالية ماصدقيّة) ومفارقات (دلالية مفهوميّة) وكمثال على النّمط الأوّل نجد "مفارقة ريتشارد"(Richard) التي عبّر عنها كل من "كارناب" (Carnap) وقد كان ذلك في صورة مختصرة، و"كيري" (Kerry) وهذا في عام ١٩٦٣، حيث عبّر هذا الأخير عن صورة أخرى اعتمدها للبرهنة على أنّ مجموع الدّوال العددية غير قابلة للبرهنة. إضافة إلى "مفارقة بيري"(Berry) و"مفارقة الكذّاب" في صورتها الأصلية أو من خلال الرّوايات المتعدّدة التي اشتقّت منها. كما تجدر الإشارة إلى"برتراند راسل" (Bertrand Russel) من خلال اهتمامه بمسألة النّقائض والمفارقات إلى درجة جعلته ينزع عن المفارقة صفة النّقيضة بمعناها الدّقيق. حيث لاحظ بأنّ الوضع لا يستلزم أن يكون أحد العددين أكبر والآخر أصغر عندما يتعلّق بعددين تركيبيين، إلّا أنّ هذه النتيجة التي خلص إليها "راسل" تتناقض مع إحدى مبرهنات "كانتور"(Cantor).

٢- المفارقات الرياضية:

إن المفارقات والمتناقضات لعبت دورا كبيرا في تطوير النظريات في مختلف العلوم، وإذا ركزنا على الرياضيات، فإن الشك هو بداية الوصول إلى المفارقات[1]. وعندما نقول مفارقة، يعني أن الرياضي يمكن أن يبرهن على صدق أو كذب القضية في آن واحد، أي غياب مبدأ عدم التناقض. ويرى بوانكاريه أن وقوع المناطقة في المفارقات لأنهم يعتبرون في البداية المجموعات متناهية، لكنهم يتعاملون معها على أنها لا متناهية، ولهذا يرى ضرورة عدم تجاهل القضايا اللامتناهية. وكذا ضرورة تفادي التصنيفات. وعليه فما أهم هذه المفارقات (الرياضية) ؟

في هذا الصدد نجد " كانتور " مؤسس نظرية المجموعات هو بدوره قد تحدث عن مفارقة تُعرف باسمه. ثم توالت المفارقات في الظهور. حيث نجد مفارقة ريتشارد وراسل وبيري ومفارقة بورالي فورتي، وهي مفارقات كان لها دور كبير في تطوير النظريات الرياضية.

أ- مفارقة بورالي فورتي :

ظهرت مفارقة بورالي فورتي سنة ١٨٩٧ يقول راسل : ". . . لقد اكتشف بورالي فورتي التناقض المتصل لأكبر عدد ترتيبي قبل أن أكتشف تناقضي "[٢] فبورالي فورتي اكتشف وجود المفارقة في الأعداد المرتبة اللامتناهية عند كانتور، وتنص هذه المفارقة على أن الأعداد الترتيبية اللامتناهية يمكن أن تُرتب ترتيبا تصاعديا، بحيث إنه من بين كل

(1) Claude Paul Bruter: De l'Intuition à la Controverse, Albert Blanchard, Paris, 1987, p61.
(٢) برتراند راسل : فلسفتي كيف تطورت؟ ترجمة، عبد الرشيد الصادق، مكتبة الأنجلومصرية، مصر ١٩٦٣، ص ٩٢

عددين منهما أيا كان يوجد دائما عدد أقل من الآخر، وإن أكبر الأعداد الترتيبية اللامتناهية هي آخر سلسلة تلك الأعداد. ولذا فإن هذه المفارقة تثبت أنه كلما حددنا أكبر الأعداد الترتيبية، فإنه يمكننا إضافة١، فنحصل على عدد ترتيبي جديد يكون هو الأكبر. ولهذا فأكبر الأعداد الترتيبية اللامتناهية ليس أكبر الأعداد الترتيبية اللامتناهية وهذا تناقض، وعليه فإن مفارقة بورالي فورتي لها علاقة بأكبر عدد ترتيبي متصاعد[١].

ولتوضيح المفارقة نأخذ مثال مجموعة عناقيد العنب موزعة كما يلي :عنقود فارغ، عنقود فيه حبة واحدة، عنقود فيه حبتان، عنقود فيه ثلاث حبات. . . وهكذا إلى ما لانهاية من الحبّات، ولتكن هذه العناقيد مرتبة ترتيبا تصاعديا : الأول، الثاني، الثالث. . . إن العنقود الفارغ يشكل الفئة الأولى ونرمز له بالعدد الترتيبي ١، العنقود الذي فيه حبة واحدة يشكل الفئة الثانية ونقابله بالعدد الترتيبي ٢، والعدد الترتيبي الذي نقابله بالفئة هو الرقم الذي يلي الأرقام الترتيبية الموجودة في الفئة، وهكذا فالعنقود الذي عدد حباته ١٠ عدده الترتيبي المقابل هو ١١، والفئة التي تشمل على جميع الأعداد الترتيبية وهي لامتناهية، عددها الترتيبي أكبر من أكبر عدد ترتيبي. وبالتالي لا وجود لعدد ترتيبي أكبر من جميع الأعداد، وهنا تكمن المفارقة.

ب _ مفارقة كانتور:

اكتشفها كانتور سنة ١٨٩٩، ولكن الإعلان عنها كان في سنة ١٩٣٢. وتتعلق بأكبر الأعداد الأصلية، وفحوى هذه المتناقضة أن نظرية المجموعات تنص على إمكانية توزيع عناصر مجموعة ما إلى مجموعات جزئية تكون أكبر عددا من عناصر تلك المجموعة[٢].

مثال : إذا كانت لدينا المجموعة A حيث { ٣ ، ٢ ، ١ ,A={0 فإن كمجموعة أجزاء المجموعة A :

$$A = \{\varnothing\ \{0\},\{1\},\{2\}, \{3\},\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{0,1,2\},\{0,1,3\},\{0,2,3\},\{0;1;2;3\}\}$$

نلاحظ هنا أن مجموعة الأعداد الجزئية لـA = 16 بينما عدد عناصر المجموعة A = 4

يقول راسل :« افترض أن مضيفك قد خيّرك في نهاية الطعام بين ثلاثة أنواع من الحلوى، ودعاك لتناول نوع أو نوعين أو لتناول الثلاثة جميعها حسب مشيئتك، فكم طريقة

(1) Christian Godin: La Totalité, La Philosophie, Champ Vallon,1998,P239.

(٢) محمد عابد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم ، العقلانية المعاصرة وتطور العقل العلمي، مركز دراسات الوحدة العربية، لبنان، ٢٠٠٢، ص١٠٠.

من طرق التصرف أمامك ؟ أنت قد ترفض الأنواع جميعا، هذا اختيار واحد، وقد تأخذ منها نوعا واحدا، وهذا ممكن على أنحاء ثلاثة ومن ثم ينتج ثلاثه اختيارات أيضا، وقد تختار اثنين من بينهما، وهذا أيضا ممكن على أنحاء ثلاثه أو أنك تختار الثلاثة جميعها، وهذا ما ينتج لك إمكانية واحدة نهائية، بذلك مجموع الاختيارات الممكنة ثمانية اختيارات »[١]، ولهذا فإن تحليل راسل للمفارقة يطابق المثال العددي الذي تم تقديمه، وهو ما يؤكد أن الجزء أكبر من الكل وهذا تناقض.

ج- مفارقة راسل :

هي من أشهر المفارقات التي انطوت علها نظرية المجموعات، ولقد اكتشفها برتراند راسل سنة ١٩٠١، وتتعلق بمجموعة جميع المجموعات: "... وقد كان اكتشافي احد هذه المتناقضات سنة ١٩٠١. . . واهتديت إلى هذا التناقض عندما كنت أتأمل برهان كانتور والذي يثبت به أن ليس ثمة عدد أصلي (عاد) أكبر من سائر الأعداد "[٢]. يوضح راسل هذه المفارقة بقوله "الفصل الشامل الذي نبحث أمره والذي يجب أن يشمل كل شيء، يجب أن يشمل نفسه كواحد من أعضائه "، وبعبارة أخرى إن وجد مثل هذا الشيء الذي نسميه كل شيء، إذن " كل شيء " شيء ما، وعضو من الفصل "كل شيء " ولكن عادة لا يكون الفصل " عضوا من نفسه " فالإنسانية ليست إنسانا[٣].

فمفارقة راسل تطرح سؤالا جوهريا : هل مجموعة الكل هي عنصر من ذاتها ؟ فإذا أردنا تكوين جماعة كل الفصول التي ليست أعضاء نفسها، فهذا فصل : هل هو عضو من نفسه أم لا ؟ فإن كان فهو أحد تلك الفصول التي ليست أعضاء من نفسها، وإن لم يكن، فهو ليس أحد تلك الفصول التي ليست أعضاء من أنفسها، أي أنه عضو من نفسه، وهكذا كل من الفرضين _ إنه عضو وليس عضوًا من نفسه _ يستلزم تناقضا، وفي هذا تناقض.

مثال : فهرس جميع الفهارس هل يكون عضوا أو لا يكون في ذاته ؟ وإذا كان فهرس جميع الفهارس يشمل ذاته كعضو، فهو حينئذ سيكون فهرسا زائدا بين جميع الفهارس، ومن ثم لا يكون فهرسا لجميع الفهارس. أما إن كان الفهرس لا يشمل ذاته، فهل هذا ممكن ؟ وهنا نجد أنفسنا بين " مجموعة كل المجموعات " هل تشتمل على ذاتها أم لا ؟

١- إما أن المجموعة تحتوي ذاتها، وحينها لا يمكن أن تكون ضمن المجموعات التي لا تحتوي على ذاتها، ومن ثم لا تنتمي إلى مجموعة جميع المجموعات التي لا تشتمل

(١) برتراند راسل : فلسفتي كيف تطورت؟ ص ٩٦.
(٢) المصدر نفسه، ص ٥٠.
(٣) برتراند راسل: مقدمة للفلسفة الرياضية، ترجمة محمد مرسي أحمد، مؤسسة سجل العرب، ١٩٦٢، ص١٩٩.

على ذاتها. هذا في حين أنها هي نفسها [مجموعة جميع المجموعات لا تحتوي على ذاتها] وهنا التناقض، فيجب إذن أن لا تحتوي على ذاتها.

٢- إذا لم تحتوي المجموعة على ذاتها، فهذا يعني أنها إحدى المجموعات التي لا تحتوي على ذاتها. وبالتالي:

٣- يجب أن تنتمي إلى ١ [مجموعة جميع المجموعات التي تحتوي على ذاتها] وبما أنها هي هذه المجموعة بالذات، فيجب أن تنتمي إلى نفسها، أي تحتوي على ذاتها وهذا تناقض. ولهذا فالرياضي يجد نفسه أمام إشكال صعب : إذا انطلق من فرضية أن " مجموعة جميع المجموعات التي لا تحتوي على ذاتها هي مجموعة تشتمل على نفسها، كانت النتيجة هي أنها لا تشمل على نفسها، وإذا انطلقنا من الفرضية المضادة وقلنا إنها " مجموعة " لا تشتمل على ذاتها، كانت النتيجة أنها تشتمل على ذاتها"[١]، فإثبات القضية ونقيضها يؤديان إلى التناقض.

ومفارقة راسل تشبه مفارقة الكريتي الكذاب الذي قال كل الكريتيين كذابون. فلو كان يقول الحقيقة بشأن الكريتيين، فإنه في هذه الحالة يكذب، لكن لو كان يكذب فهو يقول الحقيقة، ولهذا فإن كان يكذب فهو كذب صادق، وهو إذن لا يكذب، وإذا لم يكن يكذب فهو حين يقول إني أكذب فهو يكذب. ومن كلا الفرضين يلزم التناقض[٢].

ومما سبق فإن مفارقة راسل أساسها مجموعة جميع المجموعات، وحلّها كان له دور مهم في بناء النظرية الخاصة بالمجموعات وسياقها الأكسيومي.

د- مفارقة ريتشارد :

لقد عرض " ريتشارد" (Jules Richard ١٨٦٢-١٩٥٦) نص هذه المفارقة في مقال بعث به إلى المجلة العامة للعلوم الدقيقة والتجريبية في ٢ جوان ١٩٠٥. ويمكن تلخيص هذه المفارقة[٣] بما يلي :

- إذا كان لدينا ٢٦ حرفًا أبجديًا، ترتيب الحروف على التوالي : مثنى مثنى، ثلاثي ثلاثي، رباعي رباعي. . . " فنحصل على جدول لا متناه من الحالات أو الإمكانات من الحروف"[٤].

(١) محمد عابد الجابري : مدخل إلى فلسفة العلوم المعاصرة وتطور العقل العلمي، ص ١٠٢

(٢) برتراند راسل :أصول الرياضيات، ص١٨.

(3) Jules Richard: Principes des Mathématiques et le Problème des Ensembles, Revue générale de sciences pures et appliquées ,année 1905 ,n12 ,p12.

(4) Denis Vernant: La Philosophie Mathématique, Bertrand Russel, J Vrin, Paris,1993,p274.

- إذا كان لدينا أعداد، كل عدد يعرف بواسطة كلمات ومنه الحروف، فكل حالة من الحروف من الجدول تمثل تعريفا للعدد، فنحصل حينها على مجموعة E لكل الأعداد المعرفة بواسطة عدد من الكلمات ومنه الحروف.
- ليكن P الذي يتكون من (ن) عدد من المجموعة E حيث ٠ هو عدد صحيح، وبالنسبة ل (ن) عشري P+1 إذا كانت 9, 8 # P ، فهذا العدد N لا ينتمي إلى E. وإذا كان (ن) رقم له يكون (ن) رقم عشري لهذا العدد وهذا لا يوجد
- و إذا ما أطلقنا على العبارة التي عرفنا بها N ب G فإن العدد N معرف بواسطة كلمات G، أي بعدد متناه من الكلمات، إذن يجب أن ينتمي إلى E، ولكنه لا ينتمي إلى E وهذا تناقض.

كما تطرق برتراند راسل إلى هذه المفارقة بالتحليل في مقال نشره سنة ١٩٠٦، وأثناء بحثه أشار إلى مفارقة بيري (Berry) ونصّها : « أصغر عدد طبيعي غير مسمى بأقل من ثمانية عشرة حرفا، وظهر مسمّى بسبعة عشر حرفا »[١]. ويرى يوانكاريه أن هذه المفارقة قريبة من مفارقة ريتشارد إلى درجة أنها أحيانا تأخذ هذا الاسم[٢]. ويؤكد يوانكاريه أن كل المفارقات ناتجة عن الوقوع في حلقة مفرغة، وعدم قدرتها على تجاوزها، فالمناطقة وقعوا في الفخ عندما اعتمدوا على المجموعات المتناهية، وتعاملوا معها على أساس أنها لامتناهية[٣].

٣- المفارقات السيمنطيقية (اللغوية) :

لقد كان للمفارقات الرياضية أثر كبير على الباحثين المعاصرين وخاصة الرياضيين منهم. فما إن أبلغ كانتور مفارقته إلى ريتشارد، وديدكند، ووايتهد في خطاب بتاريخ ٣١ أوت ١٨٩٩حتى أصبحت المفارقة موضوعا للنقاش بين المهتمين على وجه الخصوص بنظرية المجموعات، مما كان له الأثر الكبير في لفت أنظار الرياضيين إلى المفارقات التي عُرفت بالمفارقات السيمنطيقية (اللغوية). لقد ارتبطت المفارقات السيمنطيقية أساسا بالقضايا التي غرضها الرئيس التعبير عن لغة معينة، وبالتالي فهي لم تنشأ نتيجة عيوب منطقية محددة، بقدر ما تعود إلى غموض بعض المسائل اللغوية، مما جعلها تتسبب في مشاكل تنتمي أساسا على حد قول " بيانو " إلى اللغويات.

(1) Bertrand Russel: Les Paradoxes de la Logique , Revue de Métaphysique et de Morale, année 14, Vol5, 1906,p645.
(2) Henri Poincaré, La Logique de l'Infini, Revue de Métaphysique et de Morale, année 17, Vol 5, 1909, p 481.
(3) Ibidem.

وفي ظل هذا النقاش اهتم الباحثون من جديد بالمفارقات التي سبق الاهتمام بها في العصور القديمة والوسيطة كمفارقة الكذّاب، هذا من ناحية، ومن ناحية أخرى زاد اهتمامهم بمفارقات جديدة، حيث نشر ريتشارد عام ١٩٠٥ مفارقة ارتبطت أساسا بتعريف الأعداد الحقيقية، لتظهر في الوقت نفسه "مفارقة كواينج" التي اهتمت أيضا بمجموعة الأعداد الحقيقية القابلة للتعريف. وسنذكر على سبيل المثال لا الحصر مفارقة الكذاب ومفارقة بيري.

أ – مفارقة الكذّاب :

تعود هذه المفارقة من الناحية التاريخية إلى أبوليدس المالطي معاصر أرسطو ؟، وخاصة أننا تعرف أنه لم يَرِد ذكرها عند أفلاطون، على حين ضمّنها أرسطو في كتاب "السفسطيقا" عام ٣٣٠ ق م. ونظرا لمعارضة أبوليدس لمنطق أرسطو القائم على مبدأ عدم التناقض، فلقد انتهى إلى استحالة وصف القضية سواء بالإيجاب أو السلب، واستدل على ذلك بالحجة التي تجسد المفارقة المعروفة بتناقض " إبمنديز الإقريطي " الذي يُحكى عنه أنه قال: « كل الكريتيين كذابون » مما جعل الناس يتساءلون إذا كان صادقا في قوله أم كان كاذبا.

وعلى ذلك فإنه إذا كان كل الكريتيين كذابون وإذا كان إبمنديز أحد هؤلاء فإنه في هذه الحالة سيكون كاذبا. نتيجة لاتصافه بصفة هؤلاء القوم، وبالتالي يكون قوله الذي أقره عن كل الكريتيين كاذبا، ويكون نقيضه هو الصادق، أي أن كل الكريتيين يصدقون. وبما أن إبمنديز واحد منهم، إذن فهو صادق. وهكذا نرى إبمنديز لا يكون صادقا في قوله، هذا إلا إذا كان كاذبا، وعلى هذا المنوال نفسه لا يكون كاذبا في قوله هذا إلا إذا كان صادقا. وفي هذا كله يقع التناقض، ومن ثم المفارقة التي عرفت في تاريخ الفكر بمفارقة الكذّاب(١).

وقد احتلت هذه المفارقة مكانة كبيرة عند المناطقة نظرا لأهميتها، حيث لم يقف اهتمامهم على مجرد عرض هذه المفارقة بصور متنوعة، بل ظهرت مفارقات أخرى جديدة ارتبطت ارتباطا وثيقا بها. لقد قدّم "جودل" عام ١٩٣٩ مفارقة تتشابه إلى حد بعيد مع مفارقة الكذّاب، هذه الأخيرة التي ارتبطت بدورها بمجموعة من المفارقات الرياضية والمنطقية على نحو ما رأيناه لدى راسل. إضافة إلى ارتباطها بمجموعة أخرى من المفارقات السيمنطيقية، كمفارقة بيري(٢).

---

(1) Joseph M Bochenski : Ancient Formal logic, North Holland Publishing Company, Amesterdam , 1951 , p 101

(٢) إسماعيل عبد العزيز : المفارقات المنطقية، المرجع السابق، ص ٧٩

ب – مفارقة بيري:

قدّم بيري عام ١٩٠٦ مفارقة نشرها راسل، تمحور موضوعها حول تعريف الأعداد الصحيحة[١]، حيث إن تعريف أي عدد صحيح ينطوي على عدد محدود من المقاطع. انطلاقا من هذا يمكن الوصول إلى عدد محدود من التعريفات عن طريق تقديم عدد محدود من المقاطع. ولذلك فإن القول الذي يقرّ بأن : العدد الأدنى غير قابل للتعريف في أقل من ١٩ مقطعا. هو قول في الأصل يدل على عدد صحيح محدود. غير أن العبارة الواقعة بين قوسين إنما هي تعريف يتألف من ١٢ مقطعا. ومن هنا يتبين لنا بأن العدد الصحيح الأدنى غير القابل للتعريف في أقل ١٩ مقطعا يكون معرفا في ١٢ مقطعا، وهنا تقع المفارقة والتي يمكن أن نعيد صياغتها من جديد بالاعتماد على الكلمات بدلا من المقاطع[٢] تجدر الإشارة هنا إلى أن مفارقة بيري تتشابه مع العديد من المفارقات، كمفارقة ريتشارد. هذا الأخير الذي أثبت من خلال مفارقاته أن مجموعة الأعداد المتواصلة لا يمكن أن تكون مرتبة جيدا، وإلا وقعنا في التناقض. وهو الأمر الذي تفطن إليه " زرميلو" من خلال بحثه الذي ألقاه في المؤتمر الرياضي المنعقد في هيزنبرغ عام ١٩٠٤، والذي أثبت من خلاله أن أية مجموعة يمكن أن تكون مرتبة جيّدا.

وبناء على ما سبق فرغم التباين والتنوع في المفارقات السيمنطيقية، إلا أن هذا الاختلاف لم يحدث مشاكل وصراعات، بل كانت جميعا تؤكد على تناقضات أصيلة في المعنى دون وجود عيوب منطقية واضحة، مما يؤكد لنا أن المفارقات الرياضية والمنطقية كانت تمثل تهديدا للرياضيين والمناطقة على السواء، وهذا ما دفع العديد من الباحثين ينساقون إليها، فعمدوا إلى بيانها، وتحليلها، والكشف عن عيوبها، فضلا عن تقديم الاقتراحات المختلفة والحلول الناجعة لتجنبها.

استنتاج:

لقد كان اكتشاف المفارقة في المنطق من بين الأسباب الرئيسة التي سارعت في تطوير الدراسات المنطقية،بعد أن أصبح المنطق التقليدي عاجزا عجزا تاما عن تحقيق الدور الجديد الذي يجب أن يلعبه في الفكر من ثراء في المضمون، ودقة صورية، وفائدة تنتج عن طريقة استخدامه.

لقد كانت هناك محاولات للمناطقة والرّياضيين المعاصرين لحلّ المفارقات ساهمت في استجابة عدد كبير من علماء الرّياضيات لتقديم حلول مختلفة لتلك المفارقات من

(١) المرجع نفسه، ص ٨٨

(2) Russel : Mathematical Logic as Based on the Theory of Types ,American Journal of Mathematics, Vol. 30, No. 3 (Jul. , 1908), p241.

بينهم:""فرانكل""(Fränkel) و""بار هليل""(Barr) اللذّان قدّما تصنيفات لهذه المحاولات وحدّدا أهمّ الذّين أسهموا بجهد فيها، فذكرا كلّ من "راسل""(Russel)، و"ميرمانوف"(Mirmanoff)، و"فنسلر" (Finsler)، "كارناب""(Carnap) وغيرهم، بوصفهم من أبرز الذّين حاولوا حلّ النّقائض، أو المفارقات النّاشئة عموما من وجهة النّظر الرياضية المنطقيّة.

ورغم استجابات المناطقة وعلماء الرياضيات لحلول المفارقات، إلّا أن موقف""هنري بوانكاريه كان خاصّا، لأنّه رحّب بوجود التّناقضات في المنطق، مبيّنا في جداله مع""راسل""(Russel) في بداية القرن العشرين أنّ مفارقات نظريّة المجموعات تعود إلى خطأ رئيس يتعلّق بافتراض وجود المجموعات اللّامتناهية بالفعل، وأنّ كلمة""كلّ"" المسمّاة بالصّور الكلّي يمكن أن تنطوي على معنيين: أحدهما جمعي والآخر استغراقيّ.

ضف إلى ذلك نظرية الأنماط التي قدّمها""راسل" على أنها الحلّ لمجموعة التّناقضات التي تنطوي على أفكار رياضية ومنطقيّة. وهو ما صرّح به"" رامزي""الذّي يرى أنّ المفارقات اللّغوية تكون بتجنّب الخلط بين الكلمة أو العبارة ومدلولها. أما" كواين""فقد قدّم نظريّة بديلة لنظريّة""راسل""في الأنماط وهي نظريّة التّطابق، مؤسّسا نسقا منطقيّا حلّ محلّ نسق""البرنكبيا""، واقترح منهجا تخلّص به من مفارقة""بورالي فورتي""و""نقائض راسل""إلّا أنّه لم يتمكّن من استبعاد كلّ المفارقات.

وإذا كان "زرملو" قد اعتمد على نظريّة بدهنة نظريّة المجموعات للتّخلص من مفارقات نظريّة المجموعات، وأكد أنّه لإبعاد وإقصاء التناقضات، يجب حصر العمليات التي تثير الشّكوك مع الحفاظ على ماهو مهمّ في نّظرية كانتور وديديكند "أريد أن أبيّن كيف أنّ النظرية التي توّصل إليها "كانتور" و"ديدكند" يمكن أن تردّ إلى بعض التّعريفات، سبعة تعريفات أو أكسيومات مستقلّة بعضها عن بعض"[١] . فإنّ البعض الآخر قد استعان في ذلك على المنطق المتعدّد القيم الذي يقر باستحالة تطبيق قانوني **عدم** التّناقض والثّالث المرفوع على نظريّة المجموعات، ومن هنا جاء رفض المنطق الكلاسيكيّ ثنائي القيم، واستخدم بدلا عنه المنطق المتعدّد القيم.

أما على مستوى اللغة، فإن دراسة المفارقات عموما كانت سببا مباشرا في ظهور نظرية على جانب كبير من الأهمية، وهي النظرية الخاصة بالتمييز بين مستويات اللغة،

---

(1) Zermelo : Recherches sur les Fondements de la Théorie des Ensembles Recherches sur les Fondements de la Théorie des Ensembles , dans Rivenc – Rouilhan , Logique et Fondements des Mathématiques,, P 371.

بحيث نميّز في اللّغة بين لغة الموضوع التي لها علاقة بالأشياء في العالم الخارجي، وبين لغة ما بعد هذه اللّغة، وهي التي تتّخذ من لغة الموضوع مادة لها. ثمّ نجد لغة ما بعد لغة ما بعد اللّغة، والتي تتخذ من لغة ما بعد اللّغة مادة لها. وهكذا باستمرار بحيث لا نتعامل مع اللّغة ككلّ باختلاف تدرّجها بطريقة واحدة، نظراً لأنّ ذلك يؤدّي في أغلب الأحوال إلى تناقضات لا يمكن إزالتها إلّا بالتّمييز بين مستويات اللّغة، وهو التمييز الذي أكده ألفرد تارسكي، وكان له دور في الدراسات السيمنطقية، كما ساعد فعلا في تقدم الدراسات المنطقية.